§ 2 GEOMETRIE DER EBENE UND DES RAUMES

In diesem Kapitel betrachten wir Modelle der zwei- und dreidimensionalen Räume, die wir aus unserer täglichen Erfahrung kennen. Bekanntlich können wir die Menge der reellen Zahlen als Modell einer Geraden verwenden – daher der Name **Zahlengerade.**

Die arithmetischen Operationen in $\mathbf{R}$ haben dann eine natürliche geometrische Interpretation (Zusammensetzung von Strecken usw.)

Ähnlich kann man das kartesische Produkt $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (kurz $\mathbf{R}^2$), d.h. die Menge aller geordneten Paare (ξ_1, ξ_2), wobei $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}$, als Modell einer Ebene verwenden, wobei wir (ξ_1, ξ_2) mit dem Punkt P, der die Koordinaten (ξ_1, ξ_2) bzgl. eines Koordinatsystems hat, (oder mit dem Ortsvektor $\vec{OP}$) identifizieren. Wiederum kann man $\mathbf{R}^2$ mit gewissen Operationen versehen, die einfache und natürliche geometrische Interpretationen besitzen.

Vektoraddition: (vgl. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten, Kräfteparallelogramm). Aus Bild 1 erkennt man, daß die Koordinaten des Vektors $\vec{OA} + \vec{OB}$ gleich $(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2)$ sind.

Streckung: Die **λ-Streckung** $(\lambda \geq 0)$ des Vektors $\vec{OA}$ ist der Vektor mit derselben Richtung und der λ-fachen Länge (falls $\lambda < 0$, kehren wir die Richtung um) (Bild 2). Wir sehen wieder, daß die neuen Koordinaten $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2)$ sind. Wir definieren daher:

$$x + y = (\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2) \quad \lambda x = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2),$$

wobei $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$ und $\lambda \in \mathbf{R}$.

Einfache Eigenschaften:

$x + y = y + x$ (Kommutativität der Addition)
$(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität der Addition)
$x + 0 = 0 + x = x$ (Existenz eines Nullelements)
$1.x = x$
$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
wobei $x, y, z \in \mathbf{R}^2, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ und 0 das Element $(0, 0)$ bedeutet.

Da wir die Operationen in $\mathbf{R}^2$ über die Operationen in $\mathbf{R}$ definiert haben, können wir diese Eigenschaften nachprüfen, indem wir auf die entsprechenden Eigenschaften von $\mathbf{R}$ zurückgreifen.

Z.B. $x + y = y + x$

Sei $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x + y &= (\xi_1, \xi_2) + (\eta_1, \eta_2) \\ &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2) && \text{Definition der Addition in } \mathbf{R}^2 \\ &= (\eta_1 + \xi_1, \eta_2 + \xi_2) && \text{Kommutativität der Addition in } \mathbf{R} \\ &= y + x. \end{aligned}$$

Wir kommen jetzt zu einer Eigenschaft von $\mathbf{R}^2$, die etwas tiefer liegt. Es ist klar, daß der drei-dimensionale Raum eine ähnliche Struktur hat. Es stellt sich die Frage: Wie können wir die "Zweidimensionalität" der Ebene bzw. die "Dreidimensionalität" des Raumes mathematisch charakterisieren? Dazu brauchen wir den Begriff "Linearkombination": Seien $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2)$ Vektoren (d.h. Elemente von $\mathbf{R}^2$). Eine **Linearkombination** von $\{x, y\}$ ist ein Vektor der Gestalt $\lambda x + \mu y \, (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$.

Es gibt Vektoren x, y in $\mathbf{R}^2$ mit den Eigenschaften:
a) x und y sind **linear unabhängig** d.h. $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ und $\lambda x + \mu y = 0$ impliziert $\lambda = \mu = 0$.
b) $\{x, y\}$ spannt $\mathbf{R}^2$ auf d.h. jedes $z \in \mathbf{R}^2$ ist eine Linearkombination von x und y.

Z.B. können wir die Vektoren $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ wählen. Dann gilt: $(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(1, 0) + \xi_2(0, 1)$.

Zwei Vektoren mit diesen Eigenschaften nennen wir eine **Basis** für $\mathbf{R}^2$. $\mathbf{R}^2$ ist **zweidimensional,** da $\mathbf{R}^2$ eine Basis mit zwei Elementen besitzt.
Es wäre allerdings denkbar, daß $\mathbf{R}^2$ auch eine Basis mit etwa drei Elementen besitzt. Der nächste Satz zeigt, daß dies nicht der Fall ist.

Satz: Seien x, y, z Vektoren in $\mathbf{R}^2$. Dann sind x, y, z linear abhängig, d.h. es gibt Skalare λ, μ, ν in $\mathbf{R}$, die nicht alle gleich null sind, sodaß $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$.

Beweis: Sei $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2), z = (\zeta_1, \zeta_2)$

Dann gilt: $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \lambda \xi_1 + \mu \eta_1 + \nu \zeta_1 &= 0 \\ \lambda \xi_2 + \mu \eta_2 + \nu \zeta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Das ist ein homogenes System von zwei Gleichungen mit drei Unbekannten (λ, μ, ν) und hat daher eine nicht triviale Lösung. q.e.d.

Jetzt geben wir eine Charakterisierung von Paaren $\{x, y\}$, die eine Basis von $\mathbf{R}^2$ bilden. Der Beweis zeigt die enge Beziehung zwischen linearen Gleichungssystemen und Fragen über lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit. Zunächst ein einfacher Satz über Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Satz: Betrachte das System

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}a_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
1) (*) hat eine Lösung für jedes Paar (b_1, b_2);
2) Das homogene System

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$$

hat nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = 0$;
3) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Beweis: Vgl. Übungsblätter.

Satz: Seien $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2)$ Vektoren in $\mathbf{R}^2$.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
1) $\{x, y\}$ sind linear unabhängig;
2) $\{x, y\}$ spannen $\mathbf{R}^2$ auf;
3) das Gleichungssystem (mit Unbekannten λ, μ)

$$\begin{aligned} \lambda\xi_1 + \mu\eta_1 &= \zeta_1 \\ \lambda\xi_2 + \mu\eta_2 &= \zeta_2 \end{aligned} \tag{$*$}$$

hat immer eine Lösung;
4) das homogene System

$$\lambda\xi_1 + \mu\eta_1 = 0$$
$$\lambda\xi_2 + \mu\eta_2 = 0$$

hat nur die triviale Lösung
5) $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \neq 0$.

Beweis: Nach dem obigen Satz genügt es zu zeigen, daß 2) und 3) (bzw. 1) und 4)) äquivalent sind.
Aber $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\lambda x + \mu y = 0, \lambda = \mu = 0$ folgt, d.h. wenn das System

$$\lambda\xi_1 + \mu\eta_1 = 0$$
$$\lambda\xi_2 + \mu\eta_2 = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.
Der Beweis der Äquivalenz von 2) und 3) ist ähnlich.

Wir haben jetzt die Ebene mit dem Raum $\mathbf{R}^2$ identifiziert. Aus historischen Gründen werden wir ein Element von $\mathbf{R}^2$ **einen Punkt** (Bezeichnung A, B, C, P, Q usw.) bzw. **einen Vektor** (Bezeichung x, y, z usw.) nennen. Wir schreiben die Koordinaten von P (bzw. x, y, z) in die Form (ξ_1^P, ξ_2^P) (bzw. $(\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2), (\zeta_1, \zeta_2)$).

Für zwei Punkte P, Q in $\mathbf{R}^2$ ist der Vektor $\vec{PQ}$ (auch **Ortsvektor** $\vec{PQ}$ oder **Pfeil von** P **nach** Q – geschrieben x_{PQ}) das Element

$$(\xi_1^Q - \xi_1^P, \xi_2^Q - \xi_2^P)$$

aus $\mathbf{R}^2$.

Einfache Eigenschaften:
1) $x_{PQ} + x_{QR} = x_{PR}$;
2) Falls P ein Punkt in $\mathbf{R}^2$ ist, x ein Vektor in $\mathbf{R}^2$, dann gibt es genau ein $Q \in \mathbf{R}^2$, sodaß $x_{PQ} = x$.

Gerade: Seien a, b, c reelle Zahlen, mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Wir schreiben

$$L_{a,b,c}$$

für die Menge aller $x = (\xi_1, \xi_2)$ in $\mathbf{R}^2$, sodaß $a\xi_1 + b\xi_2 + c = 0$.
Eine Menge L dieser Gestalt heißt **eine Gerade.**
"P liegt auf der Geraden $L_{a,b,c}$" oder "die Gerade $L_{a,b,c}$ geht durch P" heißt einfach, daß $x_P \in L_{a,b.c}$ d.h. $a\xi_1^P + b\xi_2^P + c = 0$.

Bemerkung: Man sieht leicht, daß $L_{a,b,c,} = L_{a_1,b_1,c_1}$ genau dann, wenn $ab_1 = a_1b, ac_1 = a_1c$ und $bc_1 = b_1c$ (d.h. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, falls a_1, b_1, c_1 nicht null sind).
Jetzt kann man leicht nachrechnen, daß die sogenannten **Inzidenzaxiome von Euklid** erfüllt sind.

Inz.1) Seien $P = (\xi_1, \xi_2), Q = (\eta_1, \eta_2)$ verschiedene Punkte in $\mathbf{R}^2$. Dann gibt es genau *eine* Gerade $L_{a,b,c}$, die durch P und Q geht.
Denn (a, b, c) muß eine Lösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} a\xi_1 + b\xi_2 + c = 0 \\ a\eta_1 + b\eta_2 + c = 0 \end{aligned}$$

sein.
Das ist ein homogenes System von zwei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten (a, b, c) und hat daher eine nicht triviale Lösung, die wir jetzt ausrechnen. Wir machen eine Fallunterscheidung
Fall 1) $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \neq 0$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$b = \frac{c(\xi_1 - \xi_2)}{\eta_2\xi_1 - \eta_1\xi_2} \quad a = \frac{c(\eta_1 - \eta_2)}{\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2}$$

Wählen wir eine Lösung mit $c \neq 0$, so gilt $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ (da $\xi_1 - \xi_2 \neq 0$ oder $\eta_1 - \eta_2 \neq 0$). Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, daß jede Lösung ein Vielfaches einer gegebenen Lösung ist.

Fall 2) $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$. Dann ist $c = 0$ und das Gleichungssystem reduziert sich auf das System:

$$\begin{aligned} a\xi_1 + b\xi_2 = 0 \\ a\eta_1 + b\eta_2 = 0 \end{aligned}$$

Falls etwa $\xi_1 \neq 0$, dann ist $L_{\frac{\xi_2}{\xi_1},1,0}$ die gesuchte Gerade.

Eine Gerade dieser Gestalt (d.h. mit $c = 0$) nennen wir **einen eindimensionalen Teilraum von $\mathbf{R}^2$**.

Inz.2) Auf einer Geraden liegen mindestens drei Punkte.

Inz.3) Es existieren drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen (solche Punkte heißen **nicht kollinear**).

(Wähle etwa die Punkte $(0,0), (1,0), (0,1)$. Das entsprechende System

$$\begin{aligned} 0.a + 0.b + c &= 0 \\ 1.a + 0.b + c &= 0 \\ 0.a + 1.b + c &= 0 \end{aligned}$$

hat keine Lösung mit $a^2 + b^2 \neq 0$).

Jetzt untersuchen wir den wichtigen Begriff der Parallelität. Zwei Vektoren $x, y\,(\neq 0)$ sind **parallel,** falls es ein $\lambda \in \mathbf{R}$ gibt, sodaß $x = \lambda y$. (In Symbolen: $x||y$).

(N.B. Seien $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2)$, mit $\xi_1 \neq 0$. Dann gilt $x||y$ genau dann, wenn $\eta_1 \neq 0$ und $\xi_2/\xi_1 = \eta_2/\eta_1$).

Satz: Seien $L = L_{a,b,c}$, $L_1 = L_{a_1,b_1,c_1}$ Geraden im $\mathbf{R}^2$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) Seien P, Q (bzw. P_1, Q_1) verschiedene Punkte auf L (bzw. L_1). Dann gilt $x_{PQ}||x_{P_1Q_1}$.

2) Es existiert $\lambda \neq 0$, sodaß $a = \lambda a_1, b = \lambda b_1$.

In diesem Fall sagen wir, daß L und L_1 parallel sind, (in Symbolen: $L||L_1$).
Falls $L||L_1$, dann gilt entweder $L = L_1$ oder $L \cap L_1 = \emptyset$.

Beweis: Nehmen wir an, daß $a = \lambda a_1, b = \lambda b_1$.
Sei $P = (\xi_1, \xi_2)$, $Q = (\eta_1, \eta_2)$, $P_1 = (\xi_1^1, \xi_2^1)$, $Q_1 = (\eta_1^1, \eta_2^1)$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} a(\xi_1 - \eta_1) + b(\xi_2 - \eta_2) &= 0 \\ a_1(\xi_1^1 - \eta_1^1) + b_1(\xi_2^1 - \eta_2^1) &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

Falls etwa $a \neq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \xi_1 - \eta_1 &= -\frac{a}{b}(\xi_2 - \eta_2) \\ \xi_1^1 - \eta_1^1 &= -\frac{b_1}{a_1}(\xi_2^1 - \eta_2^1) = -\frac{b}{a}(\xi_2^1 - \eta_2^1) \end{aligned}$$

d.h. $PQ||P_1Q_1$

Falls $a = 0$, dann ist $b \neq 0$ und wir können analoge Überlegungen etwa mit $(\xi_2 - \eta_2) = -\frac{a}{b}(\xi_1 - \eta_1)$ anstellen.

Nehmen wir jetzt an, daß 1) gilt und wählen wir verschiedne Punkte P, Q, P_1, Q_1 wie oben. Es gilt wiederum (*) d.h.

$$a = -\frac{b(\xi_2 - \eta_2)}{\xi_1 - \eta_1} \quad a_1 = -\frac{b_1(\xi_2^1 - \eta_2^1)}{\xi_1^1 - \eta_1^1}$$

falls etwa $\xi_1 - \eta_1 \neq 0$. Wegen der Parallelität von PQ und P_1Q_1 gilt

$$\frac{\xi_2^1 - \eta_2^1}{\xi_1^1 - \eta_1^1} = \frac{\xi_2 - \eta_2}{\xi_1 - \eta_1}$$

q.e.d.

Man kann daher zwei parallele Geraden in der Gestalt $L = L_{a,b,c}$, $L_1 = L_{a,b,c_1}$ schreiben. Man sieht dann, daß aus $L \cap L_1 \neq \emptyset$ folgt $c = c_1$ d.h. $L = L_1$.

Bemerkung: Es gilt außerdem
1) $L||L$;
2) $L||L_1$ und $L_1||L_2$ impliziert $L||L_2$.

Das berühmte und früher umstrittene **Parallelaxiom** von Euklid ist:

P: Sei L eine Gerade, P ein Punkt, der nicht auf L liegt. Dann gibt es genau eine Gerade L_1 durch P mit $L_1||L$.
(Denn falls L die Gerade $L_{a,b,c}$ ist, so ist L_1 die Gerade L_{a,b,c_1}, wobei c_1 so gewählt wird, daß

$$a\xi_1^P + b\xi_2^P + c_1 = 0).$$

Satz: Seien P, Q verschiedene Punkte in $\mathbf{R}^2$. Dann existiert genau eine Gerade $L(P,Q)$ durch P und Q. Diese Gerade besteht aus allen Punkten R sodaß

$$PR||PQ$$

bzw. allen Punkten der Menge

$$\{\lambda x_P + (1-\lambda)_{x_Q} : \lambda \in \mathbf{R}\} = \{x_P + t(x_Q - x_P) : t \in \mathbf{R}\}.$$

Falls $x \in L(P,Q)$ dann ist λ (und daher $1 - \lambda$) eindeutig bestimmt. $\lambda, 1-\lambda$ heißen die **baryzentrischen Koordinaten** von x bzgl. P und Q.

Beweis: Wir wissen schon, daß

$$\{R : PR||PQ\}$$

eine Gerade ist. Wir brauchen daher nur diese Parallelitätsbedingung geeignet zu interpretieren.
Sei $R \neq P : PR||PQ$ bedeutet: Es existiert $\lambda \neq 0$, sodaß

$$x_R - x_P = \lambda(x_Q - x_P)$$

d.h.

$$x_R = \lambda x_Q + (1 - \lambda)x_P.$$

q.e.d.

Seien P, Q verschiedene Punkte in $\mathbf{R}^2$. Wie wir gesehen haben, besteht die Gerade $L(P, Q)$ aus den Punkten der Gestalt $\lambda x_P + (1 - \lambda)x_Q$ $(\lambda \in \mathbf{R})$. Die Punkte **zwischen** P und Q bekommt man, indem man die Werte von λ auf dem Bereich $[0, 1]$ beschränkt. Wir definieren daher **die Strecke** von P nach Q (geschrieben: $[P, Q]$) als die Menge

$$\{\lambda x_P + (1 - \lambda)x_Q : \lambda \in [0, 1]\} = \{\lambda x_P + \mu x_Q : 0 \leq \lambda,\ 0 \leq \mu,\ \lambda + \mu = 1\}.$$

Wir sagen, daß Q **zwischen** P und R liegt (in Symbolen: $P|Q|R$) falls $x_Q = \lambda x_P + (1-\lambda)x_R$ $\big(\lambda \in]0, 1[\big)$.
(D.h. $Q \in [P, R]$ aber $Q \neq P$, $Q \neq R$.)

Man sieht, faß die folgenden **Ordnungsaxiome** erfüllt sind:

O1. $P|Q|R$ impliziert $R|Q|P$;

O2. Seien P, R verschieden. Dann existieren Q, S mit $P|Q|R$ und $Q|R|S$;

O3. Liegen P, Q, R auf einer Geraden L, so gilt entweder $P|Q|R$ oder $Q|R|P$.

Wegen der wichtigen Rolle, die die Geraden spielen, sind Abbildungen, die Geraden in Geraden überführen von großer Bedeutung.

Definition: Eine Abbildung $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ist **affin**, falls sie die Gestalt

$$(*) \quad f : (\xi_1, \xi_2) \mapsto (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + c_1, a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + c_2)$$

hat, wobei $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1, c_2$ Skalare sind.
Die 2×2 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

heißt die **Matrix der Abbildung.**

Besonders wichtig sind affine Abbildungen, die 0 in 0 abbilden. Wie man leicht sieht, ist das genau dann der Fall, wenn $c_1 = c_2 = 0$, d.h.

$$f : (\xi_1, \xi_2) \mapsto (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, a_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2).$$

Solche Abbildungen heißen **linear.**

Bemerkung: Man sieht leich, daß eine lineare Abbildung f die Bedingungen

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

erfüllt. Sei anderseits f eine Abbildung, die diese Bedingungen erfüllt. Dann gilt für $(a_{11}, a_{12}) = f(1,0)$ $(a_{21}, a_{22}) = f(0,1)$,

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) &= f\big(\xi_1(1,0) + \xi_2(0,1)\big) \\ &= \xi_1 f(1,0) + \xi_2 f(0,1) \\ &= \xi_1(a_{11}, a_{21}) + \xi_2(a_{12}, a_{22}) \\ &= (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) \end{aligned}$$

d.h. f ist eine lineare Abbildung mit Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

wobei die Spalten der Matrix gleich den Bildern der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$ von $\mathbf{R}^2$ sind.

Bemerkung: Die Abbildung (*) ist genau dann injektiv, wenn $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Ab jetzt werden wir immer annehmen, daß dies der Fall ist.

Satz: Sei f eine affine Abbildung. Dann ist das Bild einer Geraden wieder eine Gerade. Falls $(\lambda, 1-\lambda)$ die baryzentrischen Koordinaten von x bzgl. P, Q sind, dann sind $(\lambda, 1-\lambda)$ die baryzentrischen Koordinaten von $f(x)$ bzgl. $f(P)$, $f(Q)$.

Beweis: Es genügt zu bemerken, daß

$$f\big(\lambda x_P + (1-\lambda)x_Q\big) = \lambda f(x_P) + (1-\lambda) f(x_Q)$$

Weitere Strukturen in $\mathbf{R}^2$: In der euklidischen Geometrie spielen die Begriffe Winkel und Länge (Entfernung) eine wichtige Rolle. Wir führen daher folgende Strukturen ein.

1) Das **Skalarprodukt** $(x|y)$ von Vektoren (ξ_1, ξ_2) bzw. (η_1, η_2) in $\mathbf{R}^2$ ist die Zahl $\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2$.

2) Die **Länge** eines Vektors $x = (\xi_1, \xi_2)$, geschrieben $||x||$, ist $\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)} = \sqrt{(x|x)}$. (Bemerkung: $(x|x) \geq 0$. Außerdem gilt: $(x|x) = 0$ impliziert $x = 0$);

3) Der **Abstand** zwischen zwei Vektoren x, y in $\mathbf{R}^2$ ist $||x - y|| = \sqrt{(x-y|x-y)}$.

Einfache Eigenschaften:
1) $(\lambda x|y) = (x|\lambda y) = \lambda(x|y)$

2) $(x|y) = (y|x)$
3) $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$
4) $|(x|y)| \leq ||x||\,||y||$ (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)
5) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung)
6) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$

Beweis:
4) Sei $\lambda \in \mathbf{R}$. Dann gilt:

$$0 \leq (x+\lambda y|x+\lambda y) = (x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y).$$

Die Diskriminante dieser Quadrik ist daher ≤ 0 d.h.

$$(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$$

5)

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 = (x+y|x+y) &= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) = \\ &\leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation des Skalarproduktes: Seien $P = (\xi_1, \xi_2)$, $Q = (\eta_1, \eta_2)$ Punkte in $\mathbf{R}^2$. Der Winkel zwischen OP und OQ wird durch folgende Formel angegeben:

$$\cos\theta = \frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2}{\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)}\sqrt{(\eta_1^2 + \eta_2^2)}}$$

d.h.

$$\cos\theta = \frac{(x|y)}{\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}} \text{ oder } (x|y) = ||x||\,||y||\cos\theta.$$

(Bild 3)

Eine wichtige Bemerkung ist, daß wir das Skalarprokudt in $\mathbf{R}^2$ durch die Norm ausdrücken können. Es gilt nämlich

$$(x+y|x+y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y)$$

d.h.

$$(x|y) = \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2).$$

Definition: Zwei Vektoren x, y sind **senkrecht** zueinander (geschrieben: $x \perp y$) falls $(x|y) = 0$.

Satz: Seien $L = L_{a,b,c}$, $L_1 = L_{a_1,b_1.c_1}$ Geraden in $\mathbf{R}^2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) Für jedes Paar P, Q auf L, bzw. P_1Q_1 auf L_1 gilt $(x_{PQ}|x_{P_1Q_1}) = 0$.
2) $aa_1 + bb_1 = 0$

In diesem Fall sagen wir, daß L und L_1 **senkrecht** aufeinander stehen ($L \perp L_1$).

Beweis: Nehmen wir an, daß $aa_1 + bb_1 = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a(\eta_1 - \xi_1) + b(\eta_2 - \xi_2) &= 0 \\ a_1(\eta_1^1 - \xi_1^1) + b_1(\eta_2^1 - \xi_2^1) &= 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \eta_1 - \xi_1 &= -\frac{b}{a}\,(\eta_2 - \xi_2) \\ \eta_1^1 - \xi_1^1 &= \left(-\frac{b_1}{a_1}\right)(\eta_2^1 - \xi_2^1) \qquad \text{(falls} \quad a \neq 0, a_1 \neq 0) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (\eta_1 - \xi_1)(\eta_1^1 - \xi_1^1) &= \frac{bb_1}{aa_1}(\eta_2 - \xi_2)(\eta_2^1 - \xi_2^1) \\ &= -(\eta_2 - \xi_2)(\eta_2^1 - \xi_2^1) \end{aligned}$$

d.h. $PQ \perp P_1Q_1$.

Falls anderseits $(*)$ für verschiedene Punkte P, Q, P_1, Q_1 erfüllt ist, etwa mit $\eta_1 \neq \xi_1$, $\eta_1^1 \neq \xi_1^1$, dann gilt:

$$a = -\frac{b(\eta_2 - \xi_2)}{\eta_1 - \xi_1}, a_1 = -\frac{b_1(\eta_2^1 - \xi_2^1)}{\eta_1^1 - \xi_1^1}$$

d.h.

$$aa_1 = bb_1\left(\frac{(\eta_2 - \xi_2)(\eta_2^1 - \xi_2^1)}{(\eta_1 - \xi_1)(\eta_1^1 - \xi_1^1)}\right) = -bb_1.$$

Wir können jetzt nachrechnen, daß die sogenannten **Orthogonalitätsaxiome** von Euklid erfüllt sind.

Ort 1. $L_1 \perp L_2$ impliziert $L_2 \perp L_1$.

Ort 2. Sei P ein Punkt, L_1 eine Gerade. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Gerade L_2 durch P, mit $L_2 \perp L_1$.

Ort 3. Aus $L_1 \perp L_2$ folgt, daß L_1 und L_2 sich schneiden (d.h. $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$).

Als Anwendung des Skalarprodukts beweisen wir einen klassischen Satz aus den "Elementen" von Euklid.

Satz: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt

Beweis: (Bild 4)

Seien A, B, C die Ecken des Dreiecks, H der Schnittpunkt der Höhen auf die Seiten BC und CA. x_A, x_B, x_C, x_H seien die entsprechenden Vektoren.
Wir wissen, daß

$$(x_H - x_A | x_C - x_B) = 0$$
$$(x_H - x_B | x_A - x_C) = 0$$

Zu zeigen ist, daß $CH \perp AB$ d.h. $(x_H - x_C | x_B - x_A) = 0$.

Nun ist

$$\begin{aligned}(x_H - x_A | x_C - x_B) &= (x_H - x_A | x_C - x_H) + (x_H - x_A | x_H - x_B) = 0 \\ (x_H - x_B | x_A - x_C) &= (x_H - x_B | x_A - x_H) + (x_H - x_B | x_H - x_C) = 0\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}(x_H - x_B | x_A - x_H) &= -(x_H - x_B | x_H - x_C) \\ (x_H - x_A | x_H - x_B) &= -(x_H - x_A | x_C - x_H).\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(x_H - x_B | x_H - x_C) + (x_H - x_A | x_C - x_H) = 0$$

oder

$$(x_B - x_A | x_H - x_C) = 0$$

Falls P, Q Punkte in $\mathbf{R}^2$ sind, dann bezeichnen wir mit $|PQ|$ die **Länge** der Strecke $\vec{PQ}$. d.h.

$$|PQ| = ||x_{PQ}|| = \left\{ \left(\xi_1^Q - \xi_1^P\right)^2 + \left(\xi_2^Q - \xi_2^P\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Mit diesem Begriff können wir die baryzentrichen Koordinaten $(\lambda, 1-\lambda)$ eines Punktes Q auf $[P, R]$ interpretieren. Es gilt nämlich

$$\lambda = \frac{|QR|}{|PR|}$$

$$1 - \lambda = \frac{|PQ|}{|PR|}$$

Denn

$$\begin{aligned}|QR| = ||x_{QR}|| = ||x_R - x_Q|| &= \left\| x_R - \left(\lambda x_P + (1-\lambda) x_R\right) \right\| \\ &= \left\| \lambda (x_R - x_P) \right\| = |\lambda| \, |PR|\end{aligned}$$

Beispiel: Wir benützen diese Begriffe, um folgende euklidische Sätze zu beweisen:

I. Sei ABC ein Dreieck, in dem zwei Schwerlinien gleich lang sind. Dann ist ABC gleichschenkelig.

Beweis: (Bild 5)
Sei etwa $|BP| = |QC|$. Wir zeigen: $|AB| = |AC|$.

Es gilt:

$$x_{AB} = 2x_{AQ}, x_{AC} = 2x_{AP}$$
$$x_{CQ} = x_{AQ} - x_{AC} = x_{AQ} - 2x_{AP}$$
$$x_{BP} = x_{AP} - x_{AB} = x_{AP} - 2x_{AQ}$$

Da $||x_{CQ}|| = ||x_{BP}||$ gilt

$$||x_{AQ} - 2x_{AP}||^2 = ||x_{AP} - 2x_{AQ}||^2$$

d.h. $||x_{AQ}||^2 + 4||x_{AP}||^2 - 4(x_{AQ}|x_{AP}) = ||x_{AP}||^2 + 4||x_{AQ}||^2 - 4(x_{AP}|x_{AQ})$
d.h. $3||x_{AP}||^2 = 3||x_{AQ}||^2$ oder $||x_{AP}|| = ||x_{AQ}||$. q.e.d.

II. Betrachte Bild 6.

Dann gilt:

$$\frac{|A_1B_1|/|B_1D_1|}{|A_1C_1|/|C_1D_1|} = \frac{|AB|/|BD|}{|AC|/|CD|}$$

Beweis: Wir bestimmen die baryzentrischen Koordinaten von B_1 und C_1 auf zwei Arten und vergleichen dann die Ergebnisse. Es gibt $r \in]0,1[$, $t \in]0,1[$ sodaß

$$x_{B_1} = rx_P + (1-r)x_B$$
$$x_B = tx_A + (1-t)x_D$$

Das ergibt:

$$x_{B_1} = rx_P + (1-r)tx_A + (1-r)(1-t)x_D$$

Ähnlich gibt es a, b, c in $]0,1[$ sodaß

$$x_{B_1} = ax_{A_1} + (1-a)x_{D_1}, \quad x_{A_1} = bx_A + (1-b)x_P$$
$$x_{D_1} = cx_D + (1-c)x_P$$

Daraus folgt:

$$x_{B_1} = [a(1-b) + (1-a)(1-c)]x_P + abx_A + (1-a)cx_D$$

Wenn wir die beiden Darstellungen von x_{B_1} vergleichen, sehen wir, daß $(1-r)t = ab$ und $(1-r)(1-t) = (1-a)c$. D.h. $\dfrac{1-t}{t} = \dfrac{(1-a)c}{ab}$ oder $|AB|/|BD| = (|A_1B_1|/|B_1D_1|)|c/b|$.

Analog gilt:

$$|AC|/|CD| = (|A_1C_1|/|C_1D_1|)|c/b|$$

q.e.d.

Die Zahl $\dfrac{|AB|/|BD|}{|AC|/|CD|}$ heißt das **Doppelverhältnis** von A, B, C, D.

Besonders wichtig in der euklidischen Geometrie sind **Kongruenzen**, d.h. längentreue Abbildungen. Wir untersuchen jetzt Beispiele von solchen Abbildungen.

I. Verschiebung:
Definition: Sei $u \in \mathbf{R}^2$. Dann ist die Abbildung

$$T_u : x \mapsto x + u$$

eine Bijektion von $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ und wird **die Verschiebung um** u genannt.

(d.h. eine Verschiebung ist eine affine Abbildung mit Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}).$$

Bemerkungen:
I. Eine Teilmenge von $\mathbf{R}^2$ ist genau dann eine Gerade, wenn sie die Verschiebung eines eindimensionalen Teilraums von $\mathbf{R}^2$ (d.h. einer Geraden, die durch $(0,0)$ geht) ist. Genauer: $L_{a,b,c} = T_u(L_{a,b,0})$ wobei $u \in L_{a,b,c}$.

II. Die Verschiebung einer Geraden ist wieder eine Gerade.

III. $L_1 || L_2$ genau dann, wenn L_1 eine Verschiebung von L_2 ist.

IV. Eine Verschiebung ist längentreu d.h.

$$||T_u x - T_u y|| = ||x - y||.$$

Bemerkung: Eine affine Abbildung ist dann eine Abbildung der Gestalt $T_u \circ \tilde{f}$ wobei $\tilde{f}$ linear ist.
(Sei f die affine Abbildung

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + c_1, a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + c_2).$$

Dann ist $f = T_u \circ \tilde{f}$, wobei $\tilde{f}$ die lineare Abbildung $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2)$ und T_u die Verschiebung $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (\eta_1 + c_1, \eta_2 + c_2)$ ist.)

In diesem Zusammenhang ist die folgende Formel für die Zusammensetzung von affinen Abbildungen wichtig: Sei f eine lineare Abbildung mit Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

g eine lineare Abbildung mit Matrix B. Dann ist $g \circ f$ die lineare Abbildung mit Matrix BA.

Seien jetzt

$$f = T_u \circ \tilde{f}$$
$$g = T_v \circ \tilde{g}$$

affine Abbildungen. Dann ist

$$g \circ f = T_v \circ \tilde{g} \circ T_u \circ \tilde{f} = T_{v+\tilde{g}(u)} \circ \tilde{g} \circ \tilde{f}$$

d.h. $g \circ f$ ist die Zusammensetzung der linearen Abbildung mit Matrix BA (A bzw. B ist die Matrix von $\tilde{f}$ bzw. $\tilde{g}$) und der Verschiebung $T_{v+\tilde{g}(u)}$.

Spiegelung an eindimensionalen Teilräumen:
Betrachten wir eine Gerade $L = L_{a,b,c}$. Sei $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$ ein fester Punkt auf L. Ein Punkt $x = (\xi_1, \xi_2)$ liegt genau dann auf der Geraden, wenn $a\xi_1 + b\xi_1 = -c = a\xi_1^0 + b\xi_1^0$,
d.h. $(z|x) = (z|x_0)$ wobei $z = (a, b)$
oder $(x|x) = (\mathbf{n}|x_0)$ wobei $\mathbf{n} = z/||z||$.

Daher können wir die Gerade $L_{a,b,c}$ charakterisieren als die Menge aller Punkte x, sodaß

$$\big(\mathbf{n}|x - x_0\big) = 0.$$

Diese Gleichung heißt die **Hessesche Normalform** der Geraden.

Sei $L_{a,b,0}$ ein eindimensionaler Teilraum von $\mathbf{R}^2$ mit Gleichung:

$$\big(\mathbf{n}|x\big) = 0 \quad \text{wobei} \quad \mathbf{n} = \frac{(a,b)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Sei nun $x \in \mathbf{R}^2$. $(\mathbf{n}|x)\mathbf{n}$ ist ein Vektor mit den Eigenschaften:
1) $x - (\mathbf{n}|x)\mathbf{n} \in L$;
2) $(\mathbf{n}|x)\mathbf{n} \perp L$;
3) $|(x|\mathbf{n})| = ||(\mathbf{n}|x)\mathbf{n}||$ ist der kürzeste Abstand von x nach L.

Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$R_L : x \mapsto x - 2\big(\mathbf{n}|x\big)\mathbf{n}.$$

R_L heißt die **Spiegelung** an L.

R_L hat folgende Eigenschaften:
1) R_L ist linear d.h. $R_L(x + y) = R_L(x) + R_L(y)$, $R_L(\lambda x) = \lambda R_L(x)$;
2) R_L ist **involutiv,** d.h. $R_L \circ R_L = \mathrm{id}$;
3) $R_L(x) = x$, falls, $x \in L$;
4) $R_L(x) = x$ impliziert $x \in L$;
5) R_L ist längentreue, d.h. $||R_L(x)|| = ||x||$ $(x \in \mathbf{R}^2)$.

Die Matrix von R_L rechnet man wie folgt aus: Der Einheitsvektor $\mathbf{n}$ hat die Gestalt $\mathbf{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Daher gilt:

$$\big(\mathbf{n}|x\big) = \xi_1 \cos\theta + \xi_2 \sin\theta$$

$$
\begin{aligned}
x - 2\big(\mathbf{n}|x\big)\mathbf{n} &= (\xi_1, \xi_2) - 2(\xi_1 \cos\theta + \xi_2 \sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta) \\
&= \big((1 - 2\cos^2\theta)\xi_1 - 2\xi_2 \cos\theta \sin\theta - 2\xi_1 \cos\theta \sin\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\xi_2\big)
\end{aligned}
$$

d.h. R_L hat die Matrix

$$
\begin{bmatrix} 1 - 2\cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 1 - 2\sin^2\theta \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}
$$

wobei $\theta = \theta - \frac{\pi}{2}$.

Spiegelung an Geraden:
Sei jetzt $L = L_{a,b,c}$ eine Gerade, etwa $L_{a,b,c} = T_u(L_1)$ wobei L_1 ein eindimensionaler Raum ist. Dann ist die **Spiegelung an** L definiert als

$$
R_L := T_u \circ R_{L_1} \circ T_{-u}.
$$

Es gilt:
1) R_L ist eine affine Abbildung;
2) R_L ist involutiv;
3) $R_L(x) = x$ genau dann, wenn $x \in L$;
4) R_L ist längentreu d.h. $||R_L(x) - R_L(y)|| = ||x - y||$.

Der folgende Satz zeigt die Wechselwirkung zwischen Verschiebungen und Spiegelungen.

Satz: Sei L eine Gerade, $u \in \mathbf{R}^2$. Dann gibt es ein $L_1||L$ und $v||L$, sodaß

$$
T_u \circ R_L = T_v \circ R_{L_1}
$$

Beweis: Wähle $x \in L$. Dann gilt

$$
R_L = T_x \circ R_{L_0} \circ T_{-x},
$$

wobei R_{L_0} eine Matrix der Gestalt

$$
\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}
$$

besitzt.
Wir müssen daher $v \in L_0$, $y \in \mathbf{R}^2$ finden, sodaß

$$
T_{u+x} \circ R_{L_0} \circ T_{-x} = T_{v+y} \circ R_{L_0} \circ T_{-y}
$$

d.h.

$$T_{u+x-R_{L_0}(x)} \circ R_{L_0} = T_{v+y-R_{L_0}(y)} \circ R_{L_0}$$

Wir müssen daher y, v so wählen, daß

$$u + x - R_{L_0}(x) = v + y - R_{L_0}(y) \qquad (*)$$

Um dies zu erreichen, wählen wir $v \in L$, sodaß $u - v$ senkrecht auf L_0 steht ($x - R_{L_0}(x)$ und $y - R_{L_0}(y)$ stehen senkrecht auf L_0) d.h. $v = u - (u|\mathbf{n})\mathbf{n}$, wobei $L_0 = \{x : (\mathbf{n}|x) = 0\}$. Nun setzen wir $y = \lambda\mathbf{n}$, wobei wir λ so wählen, daß (*) gilt, d.h.

$$\big(u|\mathbf{n}\big)\mathbf{n} + \big(x - R_{L_0}(x)\big) = 2\lambda\mathbf{n}.$$

Eine Abbildung der obigen Gestalt $T_v \circ R_{L_1} (v||L_1)$ heißt eine **Schubspiegelung** oder **Gleitspiegelung.**

Drehungen:
Definition: Die Abbildung

$$D_\theta : (\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1 \cos\theta - \xi_2 \sin\theta, \xi_1 \sin\theta + \xi_2 \cos\theta)$$

heißt **eine Drehung um den Winkel θ.**

D_θ ist linear und längentreue, mit Matrix

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Allgemeiner: Die Abbildung $D_{u,\theta} = T_u \circ D_\theta \circ T_{-u}$ ist **eine Drehung um den Punkt $u \in \mathbf{R}^2$.** Auch $D_{u,\theta}$ ist eine längentreue affine Abbildung.

Satz:
1) Sei $u \in \mathbf{R}^2$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Dann gibt es ein $v \in \mathbf{R}^2$, sodaß

$$D_{u,\theta} = T_v \circ D_\theta$$

(Eine Drehung um u ist darstellbar als die Zusammensetzung einer Drehung um 0 und einer Verschiebung.)

2) Seien θ, u gegeben mit $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Dann gibt es ein v, sodaß

$$T_u \circ D_\theta = D_{v,\theta}$$

(Die Zusammensetzung einer Drehung und einer Verschiebung ist eine Drehung.)

3) Seien u, v, θ, ψ gegeben, wobei $\theta + \psi$ kein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Dann gibt es ein $w \in \mathbf{R}^2$, sodaß

$$D_{u,\theta} \circ D_{v,\psi} = D_{w,\theta+\psi}$$

(Die Zusammensetzung zweier Drehungen ist eine Drehung.)

Beweis:
1) $D_{u,\theta} = T_u \circ D_\theta \circ T_{-u} = T_u \circ T_{u_0} \circ D_\theta = T_{u+u_0} \circ D_\theta$ wobei $u_0 = D_\theta(-u)$

2) v muß die Bedingung

$$T_u \circ D_\theta = T_v \circ D_\theta \circ T_{-v} = T_{v - D_\theta(v)} \circ D_\theta$$

erfüllen.

Wir zeigen daher, daß es für jedes $u = (\eta_1, \eta_2)$ ein $v = (\xi_1, \xi_2)$ gibt, sodaß

$$u = v - D_\theta(v) \quad \text{oder} \quad D_\theta(v) - v + u = 0$$

d.h.

$$\begin{aligned} (\cos\theta - 1)\xi_1 - (\sin\theta)\xi_2 + \eta_1 &= 0 \\ (\sin\theta)\xi_1 + (\cos\theta - 1)\xi_2 + \eta_1 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System hat immer eine Lösung; denn $(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta > 0$ für $\theta \neq 2k\pi$.

3) folgt aus 2).

Isometrien:
Wir haben jetzt drei Arten von längentreuen Abbildungen betrachtet — Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen. Die Bedeutung längentreuer Abbildungen ist offensichtlich (vgl. den Begriff der Kongruenz bei Euklid). Wir werden jetzt solche Abbildungen untersuchen und zeigen, daß sie aus Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen zusammengesetzt sind.

Definition: Eine Abbildung $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ heißt eine **Isometrie,** falls $||fx - fy|| = ||x - y||$ für $x, y \in \mathbf{R}^2$.

Für Anwendungen in der Geometrie ist folgender Satz, den wir ohne Beweis zitieren, besonders bedeutungsvoll.

Satz: Sei M eine Teilmenge von $\mathbf{R}^2, f : M \to \mathbf{R}^2$ eine Isometrie. Dann existiert eine Isometrie $\tilde{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, die f erweitert (d.h. für $x \in M$ gilt $\tilde{f}x = fx$).

Wir zeigen jetzt, daß jede Isometrie f von $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ eine affine Abbildung ist. Insbesondere bildet f Geraden auf Geraden ab.

Satz: Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eine Isometrie mit $f(0) = 0$. Dann ist f linear, d.h.

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^2, \lambda, \mu \in \mathbf{R})$$

Beweis: Es gilt $||x|| = ||f(x)||$.
Aus der Gleichung

$$||x + y - z||^2 = ||x - z||^2 + ||y - z||^2 - ||x - y||^2 + ||x||^2 + ||y||^2 - ||z||^2$$

folgt $||x+y-z||^2 = ||f(x)+f(y)-f(z)||^2$
oder, für $z = x+y, 0 = ||f(x)+f(y)-f(x+y)||^2$
d.h. $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

Es gilt auch $||\lambda x - y||^2 = (1-\lambda)(||y||^2 - \lambda||x||^2) + \lambda(||x-y||)^2$.
Daher gilt: $||\lambda fx - fy|| = ||\lambda x - y||$ oder, für $y = \lambda x, fy = \lambda fx$.

Korollar: Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eine Isometrie. Dann ist f eine affine Abbildung.

Beweis: $f = T_u \circ \tilde{f}$ wobei $u = f(0)$ und $\tilde{f}$ eine Isometrie ist mit $\tilde{f}(0) = 0$. Daher ist $\tilde{f}$ linear und $f = T_u \circ \tilde{f}$ affin. q.e.d.

Nach diesem Satz ist es interessant, festzustellen, welche lineare Abbildungen f isometrisch sind, d.h. für welche Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

die entsprechende Abbildung isometrisch ist.
Zunächst bemerken wir, daß eine lineare Abbildung genau dann eine Isometrie ist, wenn $(fx|fy) = (x|y)$ für $x, y \in \mathbf{R}^2$. Denn aus dieser Bedingung folgt

$$||fx||^2 = (fx|fx) = (x|x) = ||x||^2 \quad \text{d.h.} \quad ||fx|| = ||x||.$$

Dann gilt: $||fx - fy|| = ||f(x-y)|| = ||x-y||$.

Sei jetzt f eine lineare Isometrie. Dann gilt

$$\begin{aligned} (fx|fy) &= \frac{1}{2}\left(||fx+fy||^2 - ||fx||^2 - ||fy||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right) \\ &= (x|y). \end{aligned}$$

Satz: Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eine lineare Isometrie. Dann ist f entweder eine Drehung oder eine Spiegelung an einem eindimensionalen Teilraum.

Beweis: Sei

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

die Matrix von f, d.h. $fe_1 = (a_{11}, a_{21}), fe_2 = (a_{12}, a_{22})$. Aus den Beziehungen $||fe_1|| = 1 = ||fe_2||$, $0 = (fe_1|fe_2)$ sieht man, daß

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 = a_{12}^2 + a_{22}^2 \quad \text{und} \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

oder

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aus der $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 = a_{21}^2 + a_{22}^2, a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$ folgt.

Aus den 6 Gleichungen für $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sieht man, daß A die Gestalt

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \pm b & \pm a \end{bmatrix}$$

hat, wobei $-1 \leq a \leq 1, -1 \leq b \leq 1$, $a^2 + b^2 = 1$.

Es gibt daher 2 Möglichkeiten:

1)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

Fall 1) Dann gibt es θ, sodaß $a = \cos\theta, b = \sin\vartheta$ und f ist die Drehung mit Matrix

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Fall 2) A hat die Gestalt

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

und f ist daher eine Spiegelung an einem eindimensionalen Raum.

Satz: Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eine Isometrie. Dann ist f entweder

a) eine Drehung;

b) eine Verschiebung;

c) eine Spiegelung;

oder

d) eine Schubspiegelung.

Beweis: f hat die Gestalt $T_u \circ \tilde{f}$, wobei $\tilde{f}$ eine lineare Isometrie ist.

Fall 1) $\tilde{f}$ ist eine Drehung. Dann hat f die Gestalt a).

2) $\tilde{f}$ ist die Identität. f hat die Gestalt b).

3) $\tilde{f}$ ist eine Spiegelung. Dann hat f die Gestalt $T_v \circ R_L$. Für $v = 0$ ist f eine Spiegelung, sonst eine Schubspiegelung.

Satz: Sei f eine Isometrie, für die es genau einen Punkt u gibt, mit $f(u) = u$. Dann ist f eine Drehung um u.

Beweis: Falls
1) $u = 0$. Dann ist f linear, also eine Drehung oder eine Spiegelung. Aber eine Spiegelung fixiert eine ganze Gerade—also ist f eine Drehung.
2) $u \neq 0$. Die Isometrie $\tilde{f} = T_u \circ f \circ T_{-u}$ erfüllt die Bedingungen von 1). Also ist $\tilde{f}$ eine lineare Drehung D_θ. Dann gilt

$$\begin{aligned} f &= T_u \circ \tilde{f} \circ T_u \\ &= D_{u,\theta} \end{aligned}$$

Kurven zweiter Ordnung (Kegelschnitte)

Wir haben gesehen, daß Geraden in $\mathbf{R}^2$ die Nullstellen von affinen Funktionalen (d.h. Abbildungen der Gestalt $(\xi_1, \xi_2) \mapsto a\xi_1 + b\xi_2 + c$ sind. Jetzt untersuchen wir Kurven in $\mathbf{R}^2$, die als Nullstellen von quadratischen Funktionen darstellbar sind.

Eine **quadratische Funktion** in $\mathbf{R}^2$ ist eine Funktion der Gestalt

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2) &\mapsto a_{11}\xi_1^2 + a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{21}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + c \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + c \end{aligned}$$

Beispiele solcher Kurven sind Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln. Mit Hilfe der analytischen Geometrie werden wir eine vollständige Klassifizierung davon bringen.

Wir beginnen mit dem quadratischen Teil der Funktion. Eine Abbildung Q der Gestalt

$$x = (\xi_1, \xi_2) \mapsto \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j = a_{11}\xi_1^2 + a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{21}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$$

auf $\mathbf{R}^2$ heißt **eine quadratische Form.** Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

heißt die Matrix der quadratischen Form.
A induziert eine lineare Abbildung

$$f : (\xi_1, \xi_2) \mapsto (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2)$$

auf $\mathbf{R}^2$ und es gilt:

$$Q(x) = (fx|x) \qquad\qquad \big(x = (\xi_1, \xi_2)\big).$$

Wir können auch annehmen, daß A **symmetrisch** ist, d.h. $a_{12} = a_{21}$. Denn die Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ist symmetrisch und induziert die gleichen quadratische Form. In diesem Fall gilt $(fx|y) = (x|fy)$.
Wir werden zeigen, daß man zu jeder quadratischen Form eine Basis finden kann, sodaß die Form eine einfache Gestalt hat. Dazu folgende

Definition: Eine Basis $\{e_1, e_2\}$ für $\mathbf{R}^2$ heißt **orthonormal,** falls $||e_1|| = ||e_2|| = 1, (e_1|e_2) = 0$.

Bemerkung: Sei $e_1 = (a_{11}, a_{12}), e_2 = (a_{21}, a_{22})$, d.h. e_1 bzw. e_2 ist das Bild von $(1, 0)$, bzw. $(0, 1)$ unter der linearen Abbildung f mit Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\{e_1, e_2\}$ genau dann eine orthonormale Basis, wenn f isometrisch ist. D.h. orthonormale Basen sind genau diejenigen, die man aus $\big\{(1,0),(0,1)\big\}$ durch Anwendung einer Isometrie gewinnt.

Die Klassifikation der Kegelschnitte wird durch folgenden Satz ermöglicht:

Satz: Sei $Q : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j$ $(a_{12} = a_{21})$ eine quadratische Form auf $\mathbf{R}^2$. Dann gibt es eine orthonormale Basis (x_1, x_2) für $\mathbf{R}^2$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, sodaß

$$Q(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2) = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2.$$

Beweis: Sei $Q(x) = (f(x)|x)$ eine Darstellung für Q wie oben. Wir können unser Problem folgendermaßen reduzieren. Wir suchen Vektoren x_1, x_2 in $\mathbf{R}^2, \lambda_1, \lambda_2$ in $\mathbf{R}$, sodaß $fx_1 = \lambda_1 x_1$, $fx_2 = \lambda_2 x_2$, $x_1 \perp x_2$, $||x_1|| = 1, ||x_2|| = 1$.
Denn damit ist

$$\begin{aligned} Q(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2) &= \big(f(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 | \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2\big) \\ &= \big(\eta_1 \lambda_1 x_1 + \eta_2 \lambda_2 x_2 | \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2\big) \\ &= \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 \end{aligned}$$

Wir versuchen daher die Gleichung

$$fx = \lambda x$$

zu lösen, d.h.

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\eta_1 + a_{12}\eta_2 &= 0 \\ a_{21}\eta_1 + (a_{22} - \lambda)\eta_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

$\big(x = (\eta_1, \eta_2)\big)$.
Wir wissen, daß diese Gleichung genau dann eine nicht-triviale Lösung besitzt, wenn

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = 0.$$

Man kann ausrechnen, daß die Diskriminante dieser Gleichung $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21}^2 \geq 0$. Sei daher λ_1 eine Lösung und wähle $x_1 = (\eta_1, \eta_2)$ sodaß $||x_1|| = 1$ und (*) erfüllt ist. Sei jetzt $x_2 \in \mathbf{R}^2$ mit $||x_2|| = 1, x_2 \perp x_1$. Wir behaupten:$f(x_2) \perp x_1$. Denn $(fx_1|x_1) = (x_2|fx_1) = (x_2|\lambda x_1) = 0$. Daher gibt es ein λ_2, sodaß $fx_2 = \lambda_2 x_2$. (Denn $x_2 \perp x_1$ und $fx_2 \perp x_1$ impliziert $x_2||fx_2$). Damit ist der Beweis fertig.

Jetzt kehren wir zu unserem Kegelschnitt

$$Q(\xi_1, \xi_2) := a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + c = 0$$

zurück.

Wir wählen eine Orthonormalbasis x_1, x_2, sodaß der quadratische Teil von $Q\, \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2$ in $\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2$ abbildet. Dann gilt:

$$Q\,(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \tilde{b}_1\eta_1 + \tilde{b}_2\eta_2 + \tilde{c} = 0$$

für neue Zahlen $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{c}$.

Fall 1) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Durch Verschiebung der Achsen und Multiplikation mit einem geeigneten Faktor bekommen wir folgende Möglichkeiten
a) $\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 = 1$ mit $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$—Eine Ellipse.
b) $\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 = 0$ mit $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$—Ein Punkt
usw.

Fall 2)
$\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0$. Wiederum reduzieren wir auf die Fälle:
$\lambda_1\eta_1^2 + \eta_2 = 0$ (Falls der lineare Teil in η_2 nicht verschwindet) – eine Parabel;
$\lambda_1\eta_1^2 - 1 = 0, \lambda_1 > 0$ (falls der lineare Teil in η_2 verschwindet) – zwei parallele Geraden;
$\lambda_1\eta_1^2 - 1 = 0, \lambda_1 < 0$ – die leere Menge $\emptyset$;
$\lambda_1\eta_1^2 = 0$ – eine Gerade.

Bemerkung: Diese Sätze lassen sich folgendermaßen interpretieren. Sei

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + c$$

eine quadratische Funktion auf $\mathbf{R}^2$, M der entsprechende Kegelschnitt. Dann gibt es eine Isometrie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, sodaß $f(M)$ ein Kegelschnitt aus der obigen Tabelle ist.

Dreidimensionaler Raum: Wir untersuchen jetzt den Raum $\mathbf{R}^3$, der eine besonders wichtige Rolle als Modell für den Raum, in dem wir leben, spielt. Zunächst können wir eine Addition und eine Skalarmultiplikation folgendermaßen definieren:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + (\eta_1, \eta_2, \eta_3) := (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3)$$

$$\lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\lambda\xi_2, \lambda\xi_2, \lambda\xi_3)$$

Für $x, y, z \in \mathbf{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ gilt:
1) $x + y = y + x$
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
3) $x + 0 = 0 + x = x$
4) $x + (-1)x = 0$
5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
7) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
8) $1.x = x$
9) es gibt Vektoren e_1, e_2, e_3 in $\mathbf{R}^3$, mit folgenden Eigenschaften:

a) e_1, e_2, e_3 sind linear unabhängig;

b) jeder Vektor $x \in \mathbf{R}^3$ hat eine Darstellung$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ als Linearkombination von e_1, e_2, e_3. Es folgt dann aus a), daß diese Darstellung eindeutig ist. Denn aus $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3$ folgt: $(\lambda_1 - \mu_1)e_1 + (\lambda_2 - \mu_2)e_2 + (\lambda_3 - \mu_3)e_3 = 0$ d.h. $\lambda_1 - \mu_1 = 0 = \lambda_2 - \mu_2 = \lambda_3 - \mu_3$.

Z.B. erfüllen $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ diese Bedingungen. (e_1, e_2, e_3) heißt **die kanonische Basis** für $\mathbf{R}^3$.

Satz:
1) Seien x_1, x_2, x_3 linear unabhängige Vektoren in $\mathbf{R}^3$. Dann ist $\{x_1, x_2, x_3\}$ eine Basis d.h. jedes $x \in \mathbf{R}^3$ hat eine eindeutig bestimmte Darstellung $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$.

2) Seien x_1, x_2, x_3, x_4 Vektoren in $\mathbf{R}^3$. Dann sind x_1, x_2, x_3, x_4 linear abhängig.

Beweis:
1) Es genügt zu zeigen, daß e_1, e_2, e_3 eine solche Darstellung besitzen. Es gibt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sodaß

$$x_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

mit etwa $\lambda_1 \neq 0$. Dann gilt:

$$e_1 = \frac{1}{\lambda_1}x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}e_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}e_3$$

Daraus folgt: x_1, e_2, e_3 spannen $\mathbf{R}^3$ auf. Es gibt daher μ_1, μ_2, μ_3, sodaß

$$x_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3$$

mit etwa $\mu_2 \neq 0$.
Daher gilt:

$$e_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2}x_1 + \frac{1}{\mu_2}x_2 - \frac{\mu_3}{\mu_2}e_3$$

d.h. x_1, x_2, e_3 spannen $\mathbf{R}^3$ auf.
Sei daher $x_3 = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 e_3$.
Es gilt: $\nu_3 \neq 0$ d.h.

$$e_3 = -\frac{\nu_1}{\nu_3}x_1 - \frac{\nu_2}{\nu_3}x_2 + \frac{1}{\nu_3}x_3$$

q.e.d.

2) Die Gleichung $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$ ist einem homogenen System von drei linearen Gleichungen in 4 Unbekannten äquivalent und hat daher eine nicht-triviale Lösung.

Wir definieren ein Skalarprodukt in $\mathbf{R}^3$ wie folgt:

$$(x|y) := \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$$

$\big(x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\big)$.

Die **Länge** $||x||$ eines Vektors ist $\sqrt{}(x|x) = \sqrt{}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_2^2)$. Genau wie im Fall von $\mathbf{R}^2$ zeigt man, daß folgende einfache Eigenschaften gelten:

1) $(x|y) = (y|x)$
2) $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$
3) $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$
4) $|(x|y)| \leq ||x||\,||y||$ (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)
5) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung)

Aus 4) folgt, daß der Ausdruck $\dfrac{(x|y)}{||x||\,||y||}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$ zwischen -1 und 1 liegt. Es existiert also ein $\theta \in [0, \pi]$, sodaß

$$\cos\theta = \frac{(x|y)}{||x||\,||y||}$$

θ heißt **der Winkel zwischen** x **und** y (geschrieben $< (x, y)$). x und y sind **senkrecht** $(x \perp y)$, falls $(x|y) = 0$.

Orthonormale Basen: Die kanonische Basis $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ hat die wichtige Eigenschaft, daß die Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Wir nennen daher eine Basis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbf{R}^3$ **orthogonal**, falls $(e_2|e_3) = (e_3|e_1) = (e_1|e_2) = 0$.
Falls auch $||e_1|| = ||e_2|| = ||e_3|| = 1$ gilt, sagen wir, daß (e_1, e_2, e_3) eine **orthonormale Basis** ist.

Bemerkung: Drei Vektoren x_1, x_2, x_3 (alle $\neq 0$) in $\mathbf{R}^3$, die paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind automatisch linear unabhängig und bilden daher eine Basis. Denn aus

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

folgt: $\lambda_1(x_1|x_1) + \lambda_2(x_2|x_1) + \lambda_3(x_3|x_1) = 0$
d.h. $\lambda_1 = 0$.
Analog gilt: $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Falls (e_1, e_2, e_3) eine orthonormale Basis ist, lassen sich die Koordinaten von $x \in \mathbf{R}^3$ bzgl. (e_1, e_2, e_3) folgendermaßen bestimmen:

Für $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ gilt $(x|e_1) = \lambda_1(e_1|e_1) + \lambda_2(e_2|e_1) + \lambda_3(e_3|e_1) = \lambda_1$.
Es gilt daher: $x = (x|e_1)e_1 + (x|e_2)e_2 + (x|e_3)e_3$.

Es gibt eine natürliche Methode, eine gegebene Basis x_1, x_2, x_3 zu **orthonormalisieren.** Wir fangen mit einer Basis $\{x_1, x_2, x_3\}$ für $\mathbf{R}^3$ an und suchen Skalare λ, μ, ν, sodaß

$$(y_1|y_2) = (y_2|y_3) = (y_1|y_3) = 0$$

wobei

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 + \lambda x_1 \\ y_3 &= x_3 + \mu y_2 + \nu y_1 \end{aligned}$$

Es muß gelten:

$$0 = (y_1|y_2) = (x_1|x_2) + \lambda(x_1|x_1) \quad \text{d.h.} \quad \lambda = -\frac{(x_1|x_2)}{(x_1|x_1)}.$$

Ähnlich gilt:

$$\begin{aligned} 0 = (y_3|y_1) = (x_3|y_1) + \nu(y_1|y_1) \quad &\text{d.h.} \quad \nu = -\frac{(x_3|y_1)}{(x_1|x_1)} \\ 0 = (x_3|y_2) + \mu(y_2|y_2) \quad &\text{d.h.} \quad \mu = -\frac{(x_3|y_2)}{(y_2|y_2)}. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich jetzt leicht, daß

$$e_1 = \frac{y_1}{||y_1||}, e_2 = \frac{y_2}{||y_2||}, e_3 = \frac{y_3}{||y_3||}$$

eine orthonormale Basis ist.

Gerade und Ebene im Raum: Seien a, b, c in $\mathbf{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Die Menge:

$$M = M_{a,b,c} = \big\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3 : a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0\big\}$$

ist ein **zweidimensionaler Teilraum von $\mathbf{R}^3$**. Man rechnet leicht nach:
1) $x, y \in M$ impliziert $x + y \in M$
2) $x \in M, \lambda \in \mathbf{R}$ impliziert $\lambda x \in M$.

Sei jetzt $\mathbf{n}_1$ der Einheitsvektor $\dfrac{(a, b, c)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$.
Dann ist $M_{a,b,c} = \{x \in \mathbf{R}^3 : (x|\mathbf{n}_1) = 0\}$ d.h. M besteht aus der Menge aller Vektoren, die senkrecht auf $\mathbf{n}_1$ stehen.

Seien jetzt $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ Vektoren in M, sodaß $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ eine Basis für $\mathbf{R}^3$ ist.
$x \in \mathbf{R}^3$ hat die Darstellung $\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \mathbf{n}_3$. Falls $x \in M$, dann ist $0 = (x|\mathbf{n}_1) = \lambda_1(\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_1)$ d.h. x hat die Gestalt $\mu\mathbf{n}_2 + \nu\mathbf{n}_3$ $(\mu, \nu \in \mathbf{R})$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz: Sei M ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathbf{R}^3$. Dann gibt es linear unabhängige Vektoren $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, sodaß

$$M = \{\lambda \mathbf{n}_2 + \mu \mathbf{n}_3 : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

Anderseits ist eine Menge dieser Gestalt ein zweidimensionaler Teilraum.

Ein **eindimensionaler Teilraum** von $\mathbf{R}$ ist eine Menge der Gestalt $\{\lambda x : \lambda \in \mathbf{R}\}$ wobei $x \neq 0$.

Satz: Betrachte zwei zwei-dimensionale Teilräume

$$M_1 = \big\{x : (\mathbf{n}_1|x)\big\} = 0, \quad M_2 = \big\{x : (\mathbf{n}_2|x) = 0\big\}.$$

Dann gilt:
Entweder 1) $\mathbf{n}_1 || \mathbf{n}_2$ (d.h. es existiert λ mit $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$). Dann ist $M_1 = M_2$;

oder 2) $\mathbf{n}_1 \not\parallel \mathbf{n}_2$. Dann ist $M_1 \cap M_2$ ein eindimensionaler Teilraum. Jeder eindimensionale Teilraum hat eine solche Darstellung.

Beweis: 1) ist klar. 2) Seien $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ linearunabhängige Elemente von $\mathbf{R}^3$. Wir werden jetzt zeigen, daß es einen Vektor $x \neq 0$ mit $x \perp \mathbf{n}_1$, $x \perp \mathbf{n}_2$ gibt und daß jeder Vektor mit dieser Eigenschaft ein Vielfaches von x ist: Wähle $\mathbf{n}_3$, sodaß $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ eine Basis von $\mathbf{R}^3$ ist. Wir können dann Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit $\lambda_1 \neq 0$ finden, sodaß

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_2) + \lambda_2(\mathbf{n}_2|\mathbf{n}_2) + \lambda_3(\mathbf{n}_3|\mathbf{n}_2) = 0 \\ \lambda_1(\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_3) + \lambda_2(\mathbf{n}_2|\mathbf{n}_3) + \lambda_3(\mathbf{n}_3|\mathbf{n}_3) = 0 \end{aligned}$$

Sei $x = \lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \mathbf{n}_3$. $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, x)$ ist eine Basis von $\mathbf{R}$. Sei jetzt $y \in \mathbf{R}^2$ mit $y \perp \mathbf{n}_1$, $y \perp \mathbf{n}_2$. y hat eine Darstellung $\lambda x + \mu \mathbf{n}_1 + \nu \mathbf{n}_2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 = (y|\mathbf{n}_2) &= \lambda(x|\mathbf{n}_2) + \mu(\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_2) + \nu(\mathbf{n}_2|\mathbf{n}_2) \\ &= \mu(\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_2) + \nu(\mathbf{n}_2|\mathbf{n}_2) \qquad . \\ 0 = (y|\mathbf{n}_1) &= \mu(\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_2) + \nu(\mathbf{n}_2|\mathbf{n}_1) \end{aligned}$$

Wegen $(\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_1)(\mathbf{n}_2|\mathbf{n}_2) \neq (\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_1)^2$ (– warum?)
folgt: $\mu = \nu = 0$.

Dieses Ergebnis kann man folgendermaßen interpretieren: Ein eindimensionaler Teilraum von $\mathbf{R}^3$ hat die Gestalt:

$$\big\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = 0 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3\big\}$$

wobei (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) linear unabhängig sind.

Wir betrachten jetzt Geraden und Ebenen. Zunächst führen wir den Begriff einer Verschiebung in $\mathbf{R}$ ein. Eine Abbildung der Gestalt

$$T_u : x \mapsto x + u$$

wird eine **Verschiebung** um u genannt.

Eine **Gerade** ist ein Menge der Gestalt $T_u(L)$, wobei L ein eindimensionaler Teilraum ist. Eine **Ebene** hat die Gestalt $T_u(M)$, wobei M eine zweidimensionaler Teilraum ist. In Koordinaten:

$$\begin{aligned} T_u(L) &= \big\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) : a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4 = 0 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 + b_4\big\} \\ T_u(M) &= \big\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) : a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4 = 0\big\} \end{aligned}$$

Vektorprodukt: Wir haben gesehen, daß es zu je zwei linear unabhängigen Vektoren x, y einen Vektor gibt, der senkrecht auf x und y steht. Jetzt zeigen wir, wie man diesen Vektor einheitlich wählen kann. Seien $x, y \in \mathbf{R}^3$. Das **Vektorprodukt:** $x \times y$ von x, y ist der Vektor

$$(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2, \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3, \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$$

Man rechnet nach, daß $x \perp x \times y$, $y \perp x \times y$ und

$$||x \times y|| = ||x||\,||y|| \sin\theta \quad (\theta =< (x,y))$$

(d.h. die Länge von $x \times y$ ist gleich der Fläche des von x, y aufgespannten Parallelogramms). Diese Eigenschaften bestimmen $x \times y$ eindeutig, bis auf die Richtung, die mit Hilfe der Rechtsschraubenregel festgelegt wird.

Einfache Eigenschaften:
1) $x \times y = -y \times x$;
2) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$;
3) $(\lambda x) \times y = x \times (\lambda y) = \lambda(x \times y)$;
4) $x \times (y \times z) = (x|z)y - (x|y)z$;
5) $x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0$.

Beweis: 1), 2), 3) sind trivial.

4) Die erste Koordinate von $x \times (y \times z)$ ist

$$\xi_2(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1) - \xi_3(\eta_3\zeta_1 - \eta_1\zeta_3)$$

Die erste Koordinate von $(x|z)y - (x|y)z$ ist

$$(\xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 + \xi_3\zeta_3)\eta_1 - (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3)\zeta_1$$

Das Ergebnis für die weiteren Koordinaten folgt aus Symmetrie.

5) $x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = (x|z)y - (x|y)z + (y|x)z - (y|z)x + (z|y)x + (z|y)x - (z|x)y = 0$.

Das Spatprodukt:
Wir definieren:

$$\begin{aligned} [x,y,z] :&= (x|y \times z) \\ &= \xi_1(\eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2) + \xi_2(\eta_3\zeta_1 - \eta_1\zeta_3) + \xi_3(\eta_1\xi_2 - \eta_2\zeta_1) \end{aligned}$$

d.h. $[x, y, z] = \pm ||x|| \, ||y|| \, ||z|| \sin\psi \sin\theta$ und gibt das Volumen des von x, y, z aufgespannten Parallelepipeds – mit Vorzeichen.

Es gilt:
1) $[x, y, z] = [y, z, x] = [z, x, y] = -[x, z, y] = -[y, x, z] = -[z, y, x]$;
2) $[x_1 + x_2, y, z] = [x_1, y, z] + [x_2, y, z]$;
3) $[\lambda x, y, z] = \lambda[x, y, z]$;
4) $[x + \lambda y + \mu z, y, z] = [x, y, z]$.

Sei jetzt (x_1, x_2, x_3) eine Basis,

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \\ z &= \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} [x, y, z] &= \big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 | (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) \times (\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3)\big) \\ &= [\lambda_1(\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2) - \lambda_2(\mu_1\nu_3 - \mu_3\nu_1) + \lambda_3(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1)][x_1, x_2, x_3]. \end{aligned}$$

Wir nennen den Ausdruck

$$\lambda_1(\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2) - \lambda_2(\mu_1\nu_3 - \mu_3\nu_1) + \lambda_3(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1)$$

die **Determinante** der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{bmatrix}$$

(in Symbolen: $\det A$).

Bezeichnen wir die Zeilen von A mit A_1, A_2, A_3, so können wir folgende einfachen Eigenschaften der Determinante sofort herleiten:
1)

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 + A_2 + A_3 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

2)

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

3)

$$\det \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{bmatrix}$$

4) $\det A \neq 0$ genau dann, wenn $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), (\mu_1, \mu_2 \mu_3), (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ (bzw. $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1), (\lambda_2 \mu_2 \nu_2)$, $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$) linear unabhängig sind.

5) Sei

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dann ist $\det A \neq 0$ genau dann, wenn das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 &= 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 &= 0 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung hat.

Dann ist das System

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 &= \eta_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 &= \eta_2 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 &= \eta_3 \end{aligned}$$

immer lösbar und zwar ist die Lösung

$$\xi_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} \eta_1 & a_{12} & a_{13} \\ \eta_2 & a_{22} & a_{23} \\ \eta_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}$$

usw.

Wir betrachten jetzt den Begriff der **kovarianten** bzw. **kotravarianten Koordinaten** eines Vektors. Aus Gründen, die erst später ersichtlich werden, (wenn wir die Einsteinsche Summenkonvektion diskutieren), schreiben wir die Indizes von Vektoren und Skalaren manchmal oben, manchmal unten. Sei (e_1, e_2, e_3) eine Basis von $\mathbf{R}^3$. Jeder Vektor x hat eine Darstellung

$$\lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2 + \lambda^3 e_3$$

$\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ heißen **kovariante Koordinaten** von x bzgl. e_1, e_2, e_3. Wir definieren neue Elemente

$$e^1 := \frac{e_2 \times e_3}{[e_1, e_2, e_3]}, e^2 := \frac{e_3 \times e_1}{[e_1, e_2, e_3]}, e^3 := \frac{e_1 \times e_2}{[e_1, e_2, e_3]}$$

Es gilt: $(e_1|e^1) = (e_2|e^2) = (e_3|e^3) = 1$, $(e_i|e^j) = 0$ für $i \neq j$.

Daher gilt: $x = \sum\limits_{i=1}^{3} (x|e^i) e_i$ d.h. die kovarianten Koordinaten von x sind $(x|e^1)$, $(x|e^2)$, $(x|e^3)$.

Wir behaupten jetzt, daß $x = \sum_{i=1}^{3} (x|e_i)e^i$. Denn sei $y = x - \sum_{i=1}^{3} (x|e_i)e^i$. Dann ist

$$(y|e_1) = (x|e_1) - (x|e_1) = 0$$

Analog gilt: $(y|e_2) = (y|e_3) = 0$. Da e_1, e_2, e_3 den Raum $\mathbf{R}^3$ aufspannen, folgt $y = 0$ oder $x = \sum_{i=1}^{3} (x|e_i)e^i$.

Daraus folgt, daß auch e^1, e^2, e^3 eine Basis bilden. Die entsprechenden Koordinaten $(x|e_1), (x|e_2), (x|e_3)$ sind die **kontravarianten Koordinaten** von x.
Die folgenden Größen sind wichtig:

$$g_{ij} := (e_i|e_j), \quad g^{ij} := (e^i|e^j).$$

Aus der Definition folgt:

$$e_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ij} e^j, \quad e^i = \sum_{j=1}^{3} g^{ij} e_j$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} (e_i|e^k) &= \left(\sum_{j=1}^{3} g_{ij} e^j | \sum_{l=1}^{3} g^{kl} e_l \right) \\ &= \sum_{j=1}^{3} g_{ij} g^{jk} \end{aligned}$$

Ähnlich gilt:

$$\sum_{j=1}^{3} g^{ij} g_{jk} = (e^i|e_k).$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\tilde{A} = A^{-1} \quad \text{wobei} \quad A := [g_{ij}], \tilde{A} := [g^{ij}].$$

Aus den Darstellungen

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{3} \lambda^i e_i = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i e^i, \\ y &= \sum_{i=1}^{3} \mu^i e_i = \sum_{i=1}^{3} \mu_i e^i, \end{aligned}$$

folgt:

1) $\lambda_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ij} \lambda^j$;

2) $\lambda^j = \sum\limits_{i=1}^{3} g^{ij}\lambda_i;$

3) $(x|y) = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda^i \mu_i = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i \mu^i = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} g_{ij}\lambda^i\mu^j = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} g^{ij}\lambda_i\mu_j;$

4) $||x||^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i\lambda^i = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} g_{ij}\lambda^i\lambda^j = \sum\limits_{j=1}^{3} g^{ij}\lambda_i\lambda_j.$

Aus den Formeln für die Lösung eines 3×3 Gleichungssystems folgt:

$$\begin{aligned}
g^{11} &= (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)/G \\
g^{12} &= (g_{23}g_{13} - g_{12}g_{33})/G = g^{21} \\
g^{13} &= (g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13})/G = g^{31} \\
g^{23} &= (g_{11}g_{13} - g_{11}g_{23})/G = g^{32}
\end{aligned}$$

usw.
wobei

$$G = \det \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

Affine Abbildungen: Den Begriff von linearen bzw. affinen Abbildungen in $\mathbf{R}^3$ kann man genauso einführen wie in $\mathbf{R}^2$.
$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ist **linear,** falls

$$f(x+y) = f(x) + f(y), f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

$(x, y \in \mathbf{R}^3, \lambda \in \mathbf{R})$.

Es gibt dann eine 3×3 Matrix $A = [a_{ij}]$, sodaß

$$f : (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3, a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3, a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3).$$

A heißt die **Matrix** der Abbildung. Eine **affine Abbildung** ist eine Abbildung der Gestalt $T_u \circ f$ mit f linear. Sie hat eine Darstellug

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + u_1, a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + u_2, a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + u_3)$$

Isometrien in $\mathbf{R}^3$: Wir betrachten jetzt Isometrien in $\mathbf{R}^3$ d.h. Abbildungen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, so daß $||fx - fy|| = ||x - y||$ $(x, y \in \mathbf{R}^2)$. Wenn f linear ist, dann ist f genau dann eine Isometrie, wenn $(fx|fy) = (x|y)$ $(x, y \in \mathbf{R}^3)$ (Beweis wie in $\mathbf{R}^2$).
Der nächste Satz läßt sich genauso wie im Fall $\mathbf{R}^2$ beweisen.

Satz: Sei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ eine Isometrie mit $f(0) = 0$. Dann ist f eine lineare Bijektion. Daher gilt: Jede Isometrie ist eine bijektive affine Abbildung.

Die folgende Bemerkung zeigt die enge Beziehung zwischen den Begriffen Isometrie und orthonormaler Basis.

Sei f eine lineare Isometrie, (e_1, e_2, e_3) eine orthonormale Basis für $\mathbf{R}^3$. Dann ist (fe_1, fe_2, fe_3) eine orthonormale Basis. Anderseits gilt: Ist f eine lineare Abbildung, die *eine* orthonormale Basis in eine orthonormale Basis abbildet, dann ist f eine Isometrie (und bildet daher *jede* orthonormale Basis in eine orthonormale Basis ab). Außerdem gilt: Seien (e_1, e_2, e_3) bzw. (f_1, f_2, f_3) orthonormale Basen in $\mathbf{R}^3$, dann gibt es *eine* lineare Isometrie f, sodaß $fe_1 = f_1, fe_2 = f_2, fe_3 = f_3$.

Wir untersuchen jetzt Isometrien auf $\mathbf{R}^3$. Der folgende Satz erlaubt eine Reduktion auf $\mathbf{R}^2$.

Satz: Sei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ eine lineare Isometrie. Dann gibt es ein Einheitsvektor $x \in \mathbf{R}^3$ mit $fx = \pm x$.
Falls y, z so gewählt sind, daß (x, y, z) eine orthonormale Basis für $\mathbf{R}^3$ ist, dann ist der zweidimensionale Teilraum

$$\begin{aligned} M :&= \left\{ w \in \mathbf{R}^3 : (w|x) = 0 \right\} \\ &= \{ \lambda y + \mu z : \lambda, \mu \in \mathbf{R} \} \end{aligned}$$

invariant bzgl. f d.h. $f(M) \subseteq M$.

Beweis: Zunächst suchen wir ein $x \neq 0$ in $\mathbf{R}^3$, $\lambda \in \mathbf{R}$, sodaß $fx = \lambda x$. Sei $A = [a_{ij}]$ die Matrix von f. $fx = \lambda x$ genau dann, wenn $(f - \lambda \text{ Id})x = 0$ d.h. $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ist ein nicht-triviale Lösung des homogenen Systems

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + a_{23}\xi_3 = 0 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + (a_{33} - \lambda)\xi_3 = 0 \end{aligned}$$

Wir wissen aber, daß ein solches x genau dann existiert, wenn

$$\det \begin{bmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \lambda) \end{bmatrix} = 0$$

Das ist eine Gleichung dritten Grades und hat daher eine reelle Lösung λ. Es gibt dann ein $y \neq 0$ mit $fy = \lambda y$. Setze: $x := y/||y||$. Dann ist $||x|| = 1$ und x ist auch Lösung von $fx = \lambda x$. Aus der Tatsache, daß $|\lambda| \, ||x|| = ||\lambda x|| = ||fx|| = ||x||$ sehen wir, daß $\lambda = \pm 1$. Sei jetzt $w \in M$ d.h. $(w|x) = 0$. Dann gilt

$$(fw|x) = \pm(fw|fx) = \pm(w|x) = 0$$

d.h. $fw \in M$.

Sei jetzt $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ eine lineare Isometrie. Wir wählen eine orthonormale Basis (x_1, x_2, x_3), sodaß $fx_1 = \pm x_1$. Da $M := \{\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 : \xi_2, \xi_3 \in \mathbf{R}\}$ invariant ist, gibt es Skalare $a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}$, sodaß

$$f(x_2) = a_{22}x_2 + a_{32}x_3$$
$$f(x_3) = a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

Man sieht leicht, daß dann

$$f(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = \pm\xi_1 x_1 + (a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3)x_2 + (a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3)x_3.$$

Sei jetzt A die Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Es gibt vier Möglichkeiten:

1) $fx_1 = x_1$ und A ist die Matrix einer Drehung: Dann ist f **eine Drehung an der Achse** x_1.

2) $fx_1 = x_1$ und A ist die Matrix einer Spiegelung an einer Geraden. Dann ist f **eine Spiegelung an einer Ebene.** Man sieht leicht, daß man x_2, x_3 so wählen kann, daß f die Gestalt

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \xi_3 x_3 \mapsto \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3$$

hat.
f ist dann die Spiegelung an der Ebene $\{x : (x|x_3)\} = 0$.

3) $fx_1 = -x_1$ und A ist die Matrix einer Drehung. f ist dann eine Drehung an der Achse x_1 gefolgt von einer Spiegelung an der Ebene $\{x : (x|x_1) = 0\}$.

4) $fx_1 = -x_1$ und A ist die Matrix einer Spiegelung: Dann kann man x_2 und x_3 so wählen, daß

$$f : \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \mapsto -\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3$$

oder, wenn wir x_2 und x_1 austauschen:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \mapsto \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3$$

f ist dann eine Drehung (um 180 Grad) um die Achse x_1.

Zusammenfassend:

Satz: Sei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ eine lineare Isometrie. Dann ist f entweder
a) eine Drehung um einen eindimensionalen Teilraum;
oder
b) eine Spiegelung an einem zweidimensionalen Teilraum;
oder
c) eine Drehung um eine Achse x_1 gefolgt von einer Spiegelung an der Normalebene $\{x : (x|x_1)\} = 0$ der Achse (**Drehspiegelung**).

Mit Hilfe dieses Ergebnisses kann man eine volkommene Analyse der Isometrien von $\mathbf{R}^3$ geben.