§ 3 VEKTORÄUME

In Kapitel 2 betrachteten wir wichtige Räume, die durch unsere Raumvorstellung motiviert waren – die zwei- und dreidimensionalen Räume $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$. Jetzt untersuchen wir höher dimensionale Räume. Entsprechend unserer früherer Vorgangsweise können wir den Raum $\mathbf{R}^n$ der n-Tupeln $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ untersuchen. Wir ziehen es allerdings vor, einen abstrakten Zugang zu wählen. Wir werden Vektorräume axiomatisch einführen. Später werden wir entdecken, daß jeder Raum in einem gewissen Sinn gleich einem $\mathbf{R}^n$ ist. Trotzdem wollen wir die axiomatische Methode verwenden – erstens als eine Einführung in eine Methode, die in der modernen Mathematik sehr oft verwendet wird und zweitens, weil dieser "koordinatenfreie" Zugang gewisse praktische Vorteile bringt.

Definition: Ein **Vektorraum** ist eine Menge V mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation, d.h. Abbildungen:

$$+ : V \times V \to V, \; . : \mathbf{R} \times V \to V$$

sodaß
1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Addition ist assoziativ);
2) $x + y = y + x$ (Addition ist kommutativ);
3) es existiert ein Nullelement, d.h. ein Element 0, sodaß $x + 0 = 0 + x = x$;
4) zu jedem $x \in V$ existiert $y \in V$ mit $x + y = y + x = 0$;
5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
8) $1.x = x$
$(x, y, z \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R})$

Bemerkungen:
I. Sei $x, y \in V$ mit $x + y = x$. Dann gilt $y = 0$. Denn sei $z \in V$ so daß $x + z = z + x = 0$. Aus $x + y = x$ folgt: $z + (x + y) = z + x$ d.h. $(z + x) + y = 0$ d.h. $0 + y = 0$ d.h. $\;y = 0$

II. Es gilt: $0.x = 0$. Denn $x = 1.x = (1 + 0)x = 1.x + 0.x = x + 0.x$

III. Das Element $(-1)x$ hat die Eigenschaft, daß $x + (-1)x = 0$. Denn $x + (-1)x = 1.x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0.x = 0$.

Außerdem ist $(-1)x$ das einzige Element mit dieser Eigenschaft. Denn aus $x + y = 0$ folgt

$$\begin{aligned} y = 0 + y &= \big((-1)x + x\big) + y = (-1)x + (x + y) \\ &= (-1)x \end{aligned}$$

Ab jetzt schreiben wir $-x$ bzw. $x - y$ statt $(-1)x$ bzw. $x + (-1)y$.

Beispiele:
I. Wir haben schon gesehen, daß $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$ Vektorräume sind. Ähnlicherweise ist $\mathbf{R}^n$, die Menge aller n-Tupeln $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ein Vektorraum mit folgenden Operationen.

Addition: $(\xi_1, \dots, \xi_n) + (\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$.
Skalare Multiplikation: $\lambda(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n)$.

II. Die Menge aller n-Vektoren (d.h. $n \times 1$ Matrizen) bildet einen Vektorraum.

III. Die Menge $M_{m,n}$ aller $m \times n$ Matrizen bildet einen Vektorraum.

Indem wir Begriffe aus der Analysis verwenden, können wir exotischere Beispiele presentieren.

IV. $C[0,1]$, die Menge aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$, bildet einen Vektorraum, wenn man $f+g, \lambda f$ in der üblichen Weise definiert.

V. Pol (n) – die Menge aller Polynome von Grad $\leq n$, versehen mit den gewöhnlichen Operationen, bildet einen Vektorraum. Ähnliches gilt für Pol, die Menge *aller* Polynome.

Der nächste Begriff ist eine Verallgemeinerung des Begriffs Ebene. Eine Teilmenge V_1 eines Vektorraumes ist ein **Unterraum** (oder einfach **Teilraum**), falls $x, y \in V_1, \lambda \in \mathbf{R}$ impliziert $x + y \in V_1$, $\lambda x \in V_1$. Dann ist V_1 selber ein Vektorraum.

Beispiele:
$\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3 : \xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 = 0\}$ ist ein Teilraum von $\mathbf{R}^3$.
$\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1 - \xi_2 = 5\}$ ist kein Teilraum von $\mathbf{R}^3$.
$\{f \in C[0,1] : f(0) = f(1)\}$ ist ein Teilraum von $C[0,1]$.

Wir behandeln jetzt Begriffe, die wir schon im zwei- und dreidimensionalen Raum benutzt haben – lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit. Seien $\{x_1, \dots, x_n\}$ Vektoren in V. Eine **Linearkombination** von $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist ein Vektor der Gestalt $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ mit geeigneten Skalaren $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Wir bezeichnen die Menge aller Linearkombinationen von $\{x_1, \dots, x_n\}$ mit $[x_1, \dots, x_n]$ – **der Raum, der von** $\{x_1, \dots, x_n\}$ **augespannt** wird.

Beispiele: In Pol (5) gilt:
$[1, t, t^2] = \mathrm{Pol}\,(2)$
$[t, t^2, t^3, t^4, t^5]$ ist die Menge aller Polynome vom Grad ≤ 5, die im 0 verschwinden.

Satz: $[x_1, \dots, x_n]$ ist ein Unterraum von V – der kleinste Unterraum, der $\{x_1, \dots, x_n\}$ enthält.

Beweis: Seien $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, y = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n$ Elemente von $[x_1, \dots, x_n]$,

$\lambda \in \mathbf{R}$. Dann haben wir die Darstellungen

$$\begin{aligned} x + y &= (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) + (\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n) \\ &= \lambda_1 x_1 + \mu_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n + \mu_n x_n \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) x_1 + (\lambda_2 + \mu_2) x_2 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n) x_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda x &= \lambda(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \\ &= \lambda(\lambda_1 x_1) + \cdots + \lambda(\lambda_n x_n) \\ &= (\lambda\lambda_1) x_1 \cdots + (\lambda\lambda_n) x_n \end{aligned}$$

die zeigen, daß $x + y \in [x_1, \ldots, x_n]$, $\lambda x \in [x_1, \ldots, x_n]$.
Andererseits, falls V_1 ein Teilraum von V ist, der $\{x_1, \ldots, x_n\}$ enthält, dann liegt jede Linearkombination von $x_1, \ldots, x_n$ in V_1. Daher gilt $[x_1, \ldots, x_n] \subseteq V_1$.

Definition: Eine Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von Vektoren in V heißt **linear unabhängig**, falls nur die triviale Linearkombination $0.x_1 + \cdots + 0.x_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ gleich Null ist d.h.

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x = 0 \quad \text{impliziert} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Falls etwa $x_i = 0$ oder $x_i = x_j (i \neq j)$, dann ist $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linear abhängig.
N.B. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn kein x_i eine Linearkombination der anderen ist.

Beweis: Sei x_i eine Linearkombination von $x_1, \ldots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \ldots, x_n$ – etwa

$$x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Dann gilt:

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + (-1) x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

Andererseits, falls $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ mit etwa $\lambda_i \neq 0$, dann gilt

$$x_i = -1/\lambda_i (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \lambda_n x_n).$$

Definition: Seien $x_1, \ldots, x_n$ Vektoren in V. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist eine **Basis**, falls
(i) $[x_1, \ldots, x_n] = V$
(ii) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist linear unabhängig.
Ein Vektorraum V heißt **endlich dimensional,** falls V eine Basis besitzt.

Bemerkung: $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist eine Basis falls $\{x_1, \ldots, x_n\}$ V aufspannt und jedes $x \in V$ sich genau auf eine Weise als Linearkombination der $\{x_1, \ldots, x_n\}$ darstellen läßt.

Beispiel:
I. (Die kanonische Basis für $\mathbf{R}^n$.) Sei

$$e_i = (0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ter Platz.}}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

Dann ist $\{e_i, \ldots, e_n\}$ eine Basis für $\mathbf{R}^n$.

II. (Die kanonische Basis für Pol (n).) Die Menge $\{1, t, \ldots, t^n\}$ ist eine Basis für Pol (n).

III. Der Raum $C[0,1]$ hat keine Basis und ist daher nicht endlich dimensional.
Beweis: Angenommen $\{f_1, \ldots, f_n\}$ sei eine Basis. Wähle $m > n$. Sei

$$t^j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

die Darstellung von t^j bzgl. $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Betrachten wir die Gleichung $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j t^j = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$. Das ist ein homogenes System von n Gleichungen in m Unbekannten und hat also eine nicht triviale Lösung. Das liefert aber einen Wiederspruch, da $\{1, \ldots, t^m\}$ in $C[0,1]$ linear unabhängig ist.

Warnung: Wir haben verlangt, daß Basen endlich sein müssen. Dies ist nicht bei jedem Verfasser der Fall und der Satz: "Jeder Vektorraum besitzt eine Basis" steht oft in Lehrbüchern. Da wir uns in der linearen Algebra nur mit endlich dimensionalen Räumen beschäftigen, ist der Unterschied für uns bedeutungslos.

Satz: Seien $\{x_1, \ldots, x_m\}$, $\{y_1, \ldots, y_n\}$ endliche Teilmengen von V, mit $\{x_1, \ldots, x_m\}$ linear unabhängig und $[x_1, \ldots, x_m] = [y_1, \ldots, y_n]$. Dann gilt $m \leq n$ und es gibt eine geeignete Umnumerierung $\{z_1, \ldots, z_n\}$ von $\{y_1, \ldots, y_n\}$, sodaß

$$[z_1, \ldots, z_n] = [x_1, \ldots, x_m, z_{m+1}, \ldots, z_n]$$

Beweis: Inkduktionsbeweis (bzgl. m.)
$m = 0$: trivial
$m - 1 \to m : \{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ ist linear unabhängig.
Nach Induktionsannahme gibt es eine Umnumerierung $\{z'_1, \ldots, z'_n\}$, sodaß $[z'_1, \ldots, z'_n] = [x_1, \ldots, x_{m-1}, z'_m, \ldots, z'_n]$. Da

$$\begin{aligned} x_m \in [y_1, \ldots, y_n] &= [z'_1, \ldots, z'_n] \\ &= [x_1, \ldots, x_{m-1}, z'_m, \ldots, z'_n], \end{aligned}$$

existiert eine Darstellung:

$$x_m = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{m-1} x_{m-1} + \lambda_m z'_m + \ldots \lambda_n z'_n.$$

Durch Umnumerierung können wir erreichen, daß $\lambda_m \neq 0$. Die neue Folge sei $\{z''_1, \ldots, z''_n\}$.
Da $x_m \in [x_1, \ldots, x_{m-1}, z''_m, \ldots, z''_n]$ können wir schließen, daß
$z''_m \in [x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, z''_{m+1}, \ldots, z''_n]$.
Daraus folgt:

$$[x_1, \ldots, x_{m-1}, z''_m, z''_{m+1}, \ldots, z''_n] \subseteq [x_1, \ldots, x_m, z''_{m+1}, \ldots, z''_n].$$

Korollar: Seien $\{x_1, \ldots, x_m\}$, $\{y_1, \ldots, y_n\}$ Basen für V. Dann gilt $m = n$. (Denn nach dem Satz gilt $m \leq n$ und $n \leq m$.)

Dieses Ergebnis erlaubt uns folgende Definition einzuführen.

Definition: Ein Vektorraum V heißt n-**dimensional** – geschrieben: $\dim V = n$ - falls V eine Basis mit n Elementen hat.

Korollar: Seien $\{x_1, \ldots, x_r\}$ linear unabhängige Vektoren in den n-dimensionalen Raum V. Dann gibt es Elemente $x_{r+1}, \ldots, x_n$ in V, sodaß $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis ist.

Korollar: Sei V ein Vektorraum, der **endlich erzeugt** ist (d.h. es gibt eine endliche Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\}$, die V aufspannt). Dann besitzt V eine Basis.

Sei V ein Vektorraum, V_1 ein Teilraum. Ein Teilraum V_2 heißt **Komplementärraum** zu V_1 falls
1) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
2) $V_1 + V_2 = V$ d.h. jedes $z \in V$ eine Darstellung $z = x + y$ $(x \in V_1, y \in V_2)$ hat.

Dann ist diese Darstellung eindeutig (nach 1)).

Satz: Sei V_1 ein r-dimensionaler Teilraum von den n-dimensionalen Raum V. Dann besitzt V_1 einen Komplementärraum V_2. V_2 ist nicht eindeutig bestimmt, aber es gilt immer: $\dim V_2 = n - r$ (d.h. $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$).

Beweis: Sei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ eine Basis von V_1, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Erweiterung zu einer Basis für V. Dann erfüllt $V_2 = [x_{r+1}, \ldots, x_n]$ die Bedingungen des Satzes.

Seien V_1, V_2 Teilräume von V. Dann ist $V_1 + V_2 = \{x + y : x \in V_1, y \in V_2\}$ ein Teilraum von V, **der von $V_1 \cup V_2$ aufgespannte Teilraum.**
Falls $V_1 + V_2 = V$ ist, gilt folgende wichtige Formel

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$$

(Bemerkung: $V_1 \cap V_2$ ist klarerweise auch ein Teilraum.)

Beweis: Sei $m_1 = \dim V_1, m_2 = \dim V_2, r = \dim V_1 \cap V_2$. Wir wählen eine Basis $\{x_1, \dots, x_r\}$ von $V_1 \cap V_2$ und erweitern zu Basen

$$\begin{array}{ll} \{x_1, \dots, x_r, \, x'_{r+1}, \dots, x'_{m_1}\} & \text{von} \quad V_1 \\ \{x_1, \dots, x_r, \, x''_{r+1}, \dots, x''_{m_2}\} & \text{von} \quad V_2 \end{array}$$

Behauptung: $\{x_1, \dots, x_r, x'_{r+1}, \dots, x'_{m_1}, x''_{r+1}, \dots, x''_{m_2}\}$ ist eine Basis für V.

1) Jedes $x \in V$ hat eine Darstellung $y + z \, (y \in V_1, z \in V_2)$. y (bzw. z) haben Basisdarstellungen

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x'_{r+1} + \cdots + \lambda_{m_1} x'_{m_1}$$

bzw.

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_r x_r + \mu_{r+1} x''_{r+1} + \cdots + \mu_{m_2} x''_{m_2}$$

Daher gilt:

$$x = (\lambda_1 + \mu_1) x_1 + \cdots + (\lambda_r + \mu_r) x_r + \lambda_{r+1} x'_{r+1} + \cdots + \lambda_{m_1} x'_{m_1} + \mu_{r+1} x''_{r+1} + \cdots + \mu_{m_2} x''_{m_2}$$

d.h. $\{x_1, \dots, x_r, x'_{r+1}, \dots, x'_{m_1}, x''_{r+1}, \dots x''_{m_2}\}$ spannt V auf.

2) $\{x_1, \dots, x_r, x'_{r+1}, \dots, x'_{m_1}, x''_{r+1}, \dots, x''_{m_2}\}$ ist linear unabhängig.

Denn aus

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x'_{r+1} + \cdots + \lambda_{m_1} x'_{m_1} + \mu_{r+1} x''_{r+1} + \cdots + \mu_{m_2} x''_{m_2} = 0$$

folgt

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x'_{r+1} + \cdots + \lambda_{m_1} x'_{m_1} = -(\mu_{r+1} x''_{r+1} + \cdots + \mu_{m_2} x''_{m_2}).$$

Daher sind beide Ausdrücke Elemente aus $V_1 \cap V_2$. Damit gibt es $\mu_1, \dots, \mu_r$, sodaß

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x'_{r+1} + \cdots + \lambda_{m_1} x'_{m_1} &= -(\mu_{r+1} x''_{r+1} + \cdots + \mu_{m_2} x''_{m_2}) \\ &= \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_r x_r. \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_r x_r + \mu_{r+1} x''_{r+1} + \cdots + \mu_{m_2} x''_{m_2} = 0$$

also $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{m_2} = 0$.

Jetzt folgt:

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x'_{r+1} + \cdots + \lambda_{m_1} x'_{m_1} = 0$$

daher $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{m_1} = 0$.
Jetzt brauchen wir nur die Zahl der Basiselemente

$$\{x_1, \dots, x_r, x'_{r+1}, \dots, x'_{m_1}, x''_{r+1}, \dots, x''_{m_2}\}$$

zu zählen.

Es ist klar, daß der Unterschied zwischen $\mathbf{R}^n$ und dem Raum der n-Spaltenvektoren rein formal ist. Daher die folgende Definition:

Definition: Seien V_1, V_2 Vektorräume. Ein Isomorphismus von V_1 nach V_2 ist eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$, sodaß f **linear** ist, d.h. $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $x, y \in V_1$). V_1 und V_2 heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus $f : V_1 \to V_2$ gibt.

Bemerkung:
I. Id_V ist ein Isomorphismus (V ist zu V isomorph!).
II. Sei $f : V_1 \to V_2$ ein Isomorphismus. Dann ist f^{-1} linear und damit ein Isomorphismus (V_1 isomorph zu V_2 impliziert V_2 isomorph zu V_1!).
III. Seien $f_1 : V \to V_1$, $f_2 : V_1 \to V_2$ Isomorphismen. Dann ist $f_2 \circ f_1 : V \to V_2$ ein Isomorphismus.
IV. Ein Isomorphismus respektiert Basen: Genauer: Sei $f : V \to V_1$ ein Isomorphismus, $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis für V. Dann ist $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ eine Basis für V_1. Insbesondere gilt: $\dim V = \dim V_1$.

Bespiele: Die Abbildung

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

ist ein Isomorphismus zwischen $\mathbf{R}^n$ und dem Raum aller $n \times 1$ Matrizen. Ähnlicherweise ist die Abbildung

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \to \xi_1 + \xi_2 t + \cdots + \xi_n t^{n-1}$$

ein Isomorphismus von $\mathbf{R}^n$ auf Pol $(n-1)$.

Wir haben oben gesehen, daß isomorphe Vektorräume die gleiche Dimension haben. Wie die obigen Beispiele schon andeuten, gilt auch die Umkehrung.

Satz: Seien V_1, V_2 Vektorräume mit $\dim V_1 = \dim V_2$. Dann gilt: V_1 und V_2 sind isomorph.

Beweis: Seien $\{x_1, \dots, x_n\}$ bzw. $\{y_1, \dots, y_n\}$ Basen für V_1 bzw. V_2. Betrachte die Abbildung

$$f : \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mapsto \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n.$$

f ist wohl definiert, da jedes $x \in V_1$ eine **eindeutige** Darstellung der Gestalt $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$ hat;

f ist injektiv, da $\{y_1, \ldots, y_n\}$ linear unabhängig ist;
f ist surjektiv, da $\{y_1, \ldots, y_n\}$ V aufspannt;
f ist linear – eine einfache Rechnung.

Korollar: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Dann ist V isomorph zu $\mathbf{R}^n$.

Wir möchten dieses Korollar näher untersuchen. Die natürliche Möglichkeit, einen solchen Isomorphismus zu konstruieren, ist folgende: man wählt eine Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von V und betrachtet die Abbildung

$$f : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

von $\mathbf{R}^n$ auf V. Andererseits hat jeder Isomorphismus diese Gestalt, wie der Beweis oben zeigt. Diesen Sachverhalt kann man folgendrmaßen ausdrücken: ein Isomorphismus von $\mathbf{R}^n$ auf V "ist" die Wahl einer Basis in V. Allerdings muß man vorsichtig sein. Wir haben Basen als Mengen definiert. Das heißt, daß wir nicht zwischen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und einer geeigneten Umnumerierung $\{y_1, \ldots, y_n\}$ unterscheiden.

Beispiel: Betrachte die Basis $\{1, t\}$ von Pol (1) und seine Umnumerierung $\{t, 1\}$. Sie definieren die Isomorphismen

$$\begin{aligned} & (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 t \\ \text{bzw.} \qquad & (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_2 + \lambda_1 t \end{aligned}$$

von $\mathbf{R}^2$ auf Pol (1).

Daher ist es zweckmäßig, den Begriff einer **geordneten** Basis eines Vektorraumes V einführen, d.h. ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ aus V^n, sodaß die entsprechende Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis ist.
Jetzt können wir mit gutem Gewissen sagen: Ein Isomorphismus von $\mathbf{R}^n$ auf V "ist" die Wahl einer geordneten Basis.

Für Anwendungen ist es wichtig, Formeln für den Übergang von einem Koordinatensystem (d.h. der Wahl einer Basis) zu einem anderen anzugeben.

Die **Übergangsmatrix:** Seien $(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $(x'_1, \ldots, x'_n)$ Basen für einen Vektorraum V. Dann hat ein Element $x \in V$ Darstellungen

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad x = \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j x'_j$$

bzgl. der zwei Basen. Wir stellen jetzt eine Beziehung zwischen den Koordinaten $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ bzw. $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ her.

Jedes x'_j hat eine Darstellung

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i$$

bzg. $(x_1, \ldots, x_n)$. Wir nennen die Matrix $T = [t_{ij}]$ die **Übergangsmatrix** von $(x_1, \ldots, x_n)$ nach $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Wir sehen, daß

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j x'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \lambda'_j \right) x_i \end{aligned}$$

Satz: Sei $T = [t_{ij}]$ die Übergangsmatrix von $(x_1, \ldots, x_n)$ nach $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Dann besteht folgende Beziehung zwischen den Darstellungen $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ bzw. $\lambda'_1 x'_1 + \cdots + \lambda'_n x'_n$ von einem Element $x \in V$:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \lambda'_j$$

(In der Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{bmatrix}).$$

Satz: Sei T die Übergangsmatrix von $(x_1, \ldots, x_n)$ nach $(x'_1, \ldots, x'_n)$.
T' die Übergangsmatrix von $(x'_1, \ldots, x'_n)$ nach $(x''_1, \ldots, x''_n)$.
Dann ist TT' die Übergangsmatrix von $(x_1, \ldots, x_n)$ nach $(x''_1, \ldots, x''_n)$.

Beweis: Nach der Definition gilt:

$$\begin{aligned} x'_j &= \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i \\ x''_k &= \sum_{j=1}^{n} t'_{jk} x'_k. \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$x_k^{''} = \sum_{j=1}^{n} t'_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} t'_{jk} \right) x_i$$

d.h.

$$t_{ik}^{''} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} t'_{jk}$$

oder

$$T^{''} = TT'$$

wobei $T^{''}$ die Übergangsmatrix von (x_i) nach $(x_k^{''})$ ist.

Korollar: Sei T die Übergangsmatrix von (x_i) nach (x'_j). Dann ist T invertierbar und T^{-1} ist die Übergangsmatrix von (x'_j) nach (x_i).

Beweis: Sei S die Übergangsmatrix von (x'_j) nach (x_i). Dann ist TS die Übergangsmatrix von (x_i) nach (x_i), d.h. die Einheitsmatrix I_n. Ähnlicherweise gilt $ST = I_n$.

Wir können jetzt die Formel

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \lambda'_j$$

durch die Formel

$$\lambda'_j = \sum_{l=1}^{n} \tilde{t}_{jl} \lambda_l$$

ergänzen, wobei $[\tilde{t}_{jl}]$ die Inverse von T ist.

Die Identifikation von $\mathbf{R}^3$ mit dem Anschaungsraum enthält ein künstliches Element, das von der Wahl eines Nullpunktes abhängig ist. Außerdem ist der Unterschied zwischen Teilmengen wie etwa

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$
$$B = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}.$$

(A ist ein Teilraum von $\mathbf{R}^3$, B nicht) nicht ganz befriedigend. Daher ist es zweckmäßig, folgenden Begriff einzuführen: Eine Menge M heißt **affiner Raum,** falls jedem geordneten Paar (P, Q) in $M \times M$ ein Vektor x_{PQ} aus einem vorgegebenen Vektorraum V zugeordnet ist, sodaß
1) für jedes $P \in M$ ist $Q \mapsto x_{PQ}$ eine Bijektion von M auf V,
2) für P, Q, R in M gilt $x_{PQ} + x_{QR} = x_{PR}$.

Man stelle sich x_{PQ} als Vektor "von P nach Q" vor (früher oft mit $\vec{PQ}$ bezeichnet).
Man sieht leicht, daß
3) $x_{PP} = 0$
4) $x_{PQ} = -x_{QP}$
5) $x_{PQ} = x_{RS}$ impliziert $x_{PR} = x_{QS}$.

Es gibt einen sehr engen Zusammenhang zwischen Vektorräumen und affinen Räumen. Es ist nämlich jeder Vektorraum V ein affiner Raum, wenn man

$$x_{PQ} = P - Q$$

setzt, wobei wir jetzt die Elemente von V mit Buchstaben $P, Q, \dots$ bezeichnen, um Ausdrücke wie x_{xy} zu vermeiden.
Andererseits sei M ein affiner Raum. Wählen wir einen Punkt P_0 als Nullpunkt aus. Die Abbildung

$$Q \mapsto x_{P_0 Q}$$

ist eine Bijektion von M auf V. Wir verwenden diese Bijektion, um auf M eine Vektorstruktur zu definieren. D.h. $Q + Q_1$ ist der Punkt Q_2, sodaß

$$x_{P_0 Q_2} = x_{P_0 Q} + x_{P_0 Q_1}$$

und λQ ist der Punkt Q_3, sodaß

$$x_{P_0 Q_3} = \lambda x_{P_0 Q}$$

Eine Teilmenge M_1 von M heißt **affiner Teilraum,** falls $\{x_{PQ} : P, Q \in M_1\}$ einen Teilraum von V bildet. Die Dimension von diesem Teilraum wird als **Dimension** von M_1 bezeichnet.

Beispiele: In $\mathbf{R}^3$ sind die
nulldimensionalen Teilräume Punkte;
eindimensionale Teilräume Geraden;
zweidimensionalen Teilräume Ebenen.

Bemerkungen:
I. Eine Teilmenge M_1 eines Vektorraumes V ist genau dann ein affiner Teilraum, wenn sie die Gestalt $T_u(V_1) := \{x + u : x \in V_1\}$, wobei V_1 ein Teilvektorraum ist. Für u können wir jedes Element aus M_1 verwenden.

II. Seien $\{x_0, \dots, x_n\}$ Elemente eines Vektorraumes V. Dann ist

$$M_1 = \{\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}, \lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1\}$$

ein affiner Teilraum. Er ist sogar der kleinste affine Teilraum, der $\{x_0, \dots, x_n\}$ enthält und heißt **der von** $\{x_0, \dots, x_n\}$ **erzeugte Teilraum.** M_1 kann man als den Raum $T_{x_0}([x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0])$ charakterisieren. Aus dieser Darstellung folgt sofort:

Satz: Seien $\{x_0, \ldots, x_n\}$ Elemente aus V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) $\dim M_1 = n$, wobei M_1 der von $\{x_0, \ldots, x_n\}$ erzeugte affine Teilraum ist;
2) die Vektoren $\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$ sind linear unabhängig.

In diesem Fall sagen wir, daß $\{x_0, \ldots, x_n\}$ **affin unabhängig** sind. Dann sind die λ's in der Darstellung

$$\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_n x_n$$

eines Elements $x \in M_1$ eindeutig bestimmt. Sie heißen die **baryzentrischen Koordinaten** von x bzgl. $\{x_0, \ldots, x_n\}$.

Beispiel: Zwei Vektoren $\{x_0, x_1\}$ sind affin unaghängig, wenn sie verschieden sind. $\{x_0, x_1, x_2\}$ sind affin unabhängig, wenn sie nicht kollinear sind.

Die Vorzeichen der baryzentrischen Koordinaten von x bestimmen seine Lage in Bezug auf dem Polyeder mit Ecken in den Punkten $\{x_0, \ldots, x_n\}$.