VIII. DUALITÄT, TENSORPRODUKTE, ALTERNIERENDE FORMEN

Wir haben gesehen, daß der Raum $L(V,W)$ eine natürliche Vektorstruktur besitzt. Wir konstruieren eine Basis für diesen Raum wie folgt: Sei $(x_j)_{j=1}^n$ bzw. $(y_i)_{i=1}^m$ eine Basis für V bzw. W. e_{ij} bezeichnet die lineare Abbildung die x_j in y_i abblidet und jedes $x_k \quad (k \neq j)$ in den Nullvektor. Dann gilt: (e_{ij}) ist eine Basis für $L(V,W)$. Denn für $f \in L(V,W)$ gilt:

$$f = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} e_{ij}$$

wobei $f(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i$ wie man leicht nachrechnen kann. Daher sehen wir, daß die Matrix der Abbildung f nichts anderes ist, als ihre Koordinaten bezüglich der Basis (e_{ij}).

Der Raum $L(V,\mathbf{R})$ heißt der **Dualraum** von V (geschrieben V^*). Wie wir sehen werden, entspricht der Zusammenhang zwischen V und V^* dem Begriff der kovarianten und kontravarianten Vektoren.

Beispiel: Sei $V = \mathbf{R}^n$. Dann können wir $L(V,\mathbf{R})$ mit der Menge der $1 \times n$ Matrizen identifizieren. Ein Element $y = [\eta_1, \dots, \eta_n] \in M_{1,n}$ erzeugt das Funktional f_y auf $\mathbf{R}^n$ wobei $f_y\colon (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$.

Daher können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz: $(\mathbf{R}^n)^* = \mathbf{R}^n$. Genauer: die Abbildung

$$y \mapsto f_y$$

wobei $f_y\colon (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \; \big(y = (\eta_1, \dots, \eta_n)\big)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbf{R}^n$ auf $(\mathbf{R}^n)^*$.

Bemerkung: Seien V, W Vektorräume, $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist die Abbildung

$$f\colon g \mapsto (x \mapsto g\big(f(x)\big)$$

ein Isomorphismus von W^* auf V^*.

Da jedes endlich dimensionales V einem $\mathbf{R}^n$ isomorph ist, gilt immer $V^* \simeq V$.

Allerdings ist dieser Isomorphismus von dem Isomorphismus $V \cong \mathbf{R}^n$, d.h. von der Wahl der Basis, abhängig und gerade die Art dieser Abhängigkeit ist wichtig. Sei daher $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis für V. Der Isomophismus

$$g\colon (\xi_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$$

liefert einen Isomorphismus g^t von V^* auf $(\mathbf{R}^n)^*$ (siehe Bemerkung oben) und zwar entspricht das Element f_{e_i} (als Element in $(\mathbf{R}^n)^*$) dem Element $f_i := (g^t)^{-1} f_{e_i} \in V^*$, wobei

$$f_i\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j\right) = \xi_i.$$

Daher machen wir folgende

Definition: Sei (x_i) eine Basis für V. Für jedes j gibt es ein eindeutiges Element f_j von V^*, mit

$$f_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases}$$

(f_j) ist eine Basis für V^* – **die zu (x_i) duale Basis.**

Ein Grund für die Wichtigkeit der Dualbasis ist die Tatsache, daß man mit ihrer Hilfe die Koordinatendarstellung von x ablesen kann. Es gilt nämlich:

$$x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i$$

Beispiel: Betrachte die Basis $(1, t, \dots, t^n)$ von $\mathrm{Pol}(n)$. Die Dualbasis besteht aus den Funktionalen $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ wobei

$$\begin{aligned} f_0(p) &= p(0) \\ f_1(p) &= p'(0) \\ &\cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot \\ f_n(p) &= \frac{p^n(0)}{n!} \end{aligned}$$

Die Koordinatendarstellung

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=0}^{n} f_i(p) t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{p^i(0) t^i}{i!} \end{aligned}$$

ist die Taylorsche Entwicklung von p.

Jetzt untersuchen wir das Verhalten der Dualbasis bzgl. einem Koordinatenwechsel. Seien $(x_1, \dots, x_n)$ bzw. $(x_1', \dots, x_n')$ Basen von V mit Dualbasen $(f_1, \dots, f_n)$ bzw. $(f_1', \dots, f_n')$. Sei $T = (t_{ij})$ die Übergangsmatrix von $(x_1, \dots, x_n)$ nach $(x_1', \dots, x_n')$ d.h.

$$x_j' = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i \qquad \text{(A)}$$

Es gilt daher:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\lambda'_j, \quad \lambda'_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{t}_{ij}\lambda_j \quad \big([\tilde{t}_{ij}] = [t_{ij}]^{-1}\big)$$

wobei

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i x'_i$$

Da $\lambda_i = f_i(x)$, $\lambda'_i = f'_i(x)$ können wir diese Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} f'_j(x) \quad \text{bzw.} \quad f'_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{t}_{ij} f_j(x)$$

oder einfach

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} f'_j \qquad \text{bzw.} \quad f'_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{t}_{ij} f_j$$

Vergleichen wir mit Formel (A) oben, sehen wir, daß die Übergangsmatrix von $(f_1, \ldots, f_n)$ nach $(f'_1, \ldots, f'_n)$ die Matrix $[\tilde{t}_{ji}]$ ist.

Satz: Sei T die Übergangsmatrix von (x_i) nach (x'_i). Dann ist $(T^{-1})^t$ die Übergangsmatrix von (f_i) nach (f'_i).

Bis jetzt haben wir eine Dualität für Vektorräume entwickelt. Da wir die entscheidende Bedeutung von linearen Abbildungen gesehen haben, ist es naheliegend, Dualität unter diesem Aspekt zu sehen. Konkreter fragen wir, ob es zu einer linearen Abbildung zwischen Vektorräumen eine natürliche Abbildung zwischen den Dualräume gibt. Aber gerade diese Situation haben wir im Spezialfall von Isomorphismen schon untersucht.

Definition: Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist $f^t\colon W^* \to V^*$, wobei

$$f^t\colon g \mapsto \big(x \mapsto g(f(x))\big)$$

eine lineare Abbildung von W^* nach V^* – **die Dualabbildung** zu f. Wie üblich untersuchen wir die Koordinatendarstellung dieser Abbildung.

Seien daher $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_m)$ Basen von V bzw. W, $[a_{ij}]$ die Matrix von f d.h.

$$f\colon \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \mapsto \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j \right) y_i \qquad \text{(B)}$$

Wir wählen die Dualbasen $(f_1, \ldots, f_n)$ bzw. $(g_1, \ldots, g_m)$ in V^* bzw. W^* und suchen die Matrix von f^* bzgl. dieser Basen. Da $\lambda_j = f_j(x)$ usw., können wir Formel (B) folgendermaßen interpretieren:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j = g_i\big(f(x)\big) = f^t\big(g_i(x)\big)$$

d.h.

$$f^t(g_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz: Sei $A = [a_{ij}]$ die Matrix von f bzgl. (x_i), (y_j). Dann ist $A^t = [a_{ji}]$ die Matrix von f^t bzgl. (g_j), (f_i).

Daher wird nun der tiefere Grund für die Wichtigkeit der transponierten Matrix klar.

Bis jetzt haben wir eine Dualität für Vektorräume und Abbildungen entwickelt. Jetzt erweitern wir sie auf den Begriff von Teilräumen.

Definition: Sei M ein Teilraum eines Vektorraumes V. Dann ist

$$M^0 = \{f \in V^* \colon f(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in M\}$$

ein Teilraum von V^* – der **Annullator** von M. Ähnlich gilt: Für N Teilraum von V^* ist

$$N_0 = \{x \in V \colon f(x) = 0 \quad \text{für} \quad f \in N\}$$

ein Teilraum von V.

Satz: Sei M ein Teilraum von V, N ein Teilraum von V^*. Dann gilt:

$$\dim M + \dim M^0 = \dim V = \dim V^* = \dim N + \dim N_0.$$

Beweis: Sei (x_i) eine Basis von V, sodaß $(x_1, \dots, x_r)$ eine Basis von M ist. Sei (f_i) die Dualbasis. Dann gilt

$$M^0 = [f_{r+1}, \dots, f_n]$$

Denn $\{f_{r+1}, \dots, f_n\} \subseteq M^0$ – daraus folgt $[f_{r+1}, \dots, f_n] \subseteq M^0$. Andererseits sei $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in M^0$. Wir behaupten:

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0 \quad \text{d.h.} \quad f \in [f_{r+1}, \dots, f_n].$$

Denn

$$\lambda_i = f(x_i) = 0$$

falls $1 \leq i \leq r$, da $x_i \in M$.

Jetzt sehen wir, daß $\dim M = r$, $\dim M^0 = n - r$, wobei $n = \dim V$.

Korollar: Sei M ein Teilraum von V, N ein Teilraum von V^*. Dann gilt:

$$M = (M^0)_0$$
$$N = (N_0)^0$$

Beweis: Es ist klar, daß $M \subseteq (M^0)_0$. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\dim(M^0)_0 &= \dim V^* - \dim M^0 \\ &= \dim V^* - (\dim V - \dim M) \\ &= \dim M.\end{aligned}$$

Daher gilt: $M = (M^0)_0$.

Die Dualität erlaubt uns, einen schönen Zusammenhang zwischen den einer linearen Abbildung f zugeordneten Teilräumen $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Im} f$ und den entsprechenden Räumen für f^t anzugeben.

Es gilt nämlich:

Satz:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f^t &= (\operatorname{Im} f)^0 \\ (\operatorname{Im} f^t) &= (\operatorname{Ker} f)^0 \\ \operatorname{Ker} f &= (\operatorname{Im} f^t)_0 \\ \operatorname{Im} f &= (\operatorname{Ker} f^t)_0.\end{aligned}$$

Beweis: $\operatorname{Ker} f^t = (\operatorname{Im} f)^0$. $g \in \operatorname{Ker} f^t$ genau dann, wenn $f^t(g) = 0$

$$\begin{aligned}&\text{d.h.} \quad \big(f^t(g)\big)(x) = 0 \quad (x \in V) \\ &\text{d.h.} \quad g\big(f(x)\big) = 0 \quad (x \in V) \\ &\text{d.h.} \quad g \in (\operatorname{Im} f)^0\end{aligned}$$

Korollar: Rang f^t = Rang f
Korang f^t = Korang f

Beweis:

$$\begin{aligned}\text{Korang} f &= \dim(\operatorname{Ker} f) \\ &= \dim(\operatorname{Im} f^t)_0 \\ &= \dim V^* - \dim(\operatorname{Im} f^t) \\ &= \dim V - \text{Rang}\, f^t \\ &= \text{Korang}\, f^t.\end{aligned}$$

Diese Sätze haben eine interessante Anwendung auf lineare Gleichungssysteme:

Satz: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann gilt: Die Gleichung $AX = Y$ hat genau dann eine Lösung, wenn $\sum\limits_{j=1}^{m} \eta_j \xi_j = 0$ für jede Lösung z der homogenen Gleichung $A^t = 0$.

Beweis: Wende den obigen Satz auf $f = f_A \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ an.

Dualität in euklidischen Räumen: Wir haben gesehen, daß $\mathbf{R}^n$ und $(\mathbf{R}^n)^*$ isomorph sind, und zwar unter dem Isomorphismus

$$x \mapsto f_x$$

wobei

$$f_x: (\eta_1, \ldots, \eta_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i.$$

Wenn wir nun $\mathbf{R}^n$ als euklidischen Raum betrachten, dann ist die rechte Seite das Skalarprodukt $(x|y)$. Dieser Sachverhalt gilt allgemein für euklidische Räume.

Satz: Sei $\big(V, (\;|\;)\big)$ ein euklidischer Raum. Dann ist die Abbildung

$$\tau: x \mapsto f_x \quad \text{wobei} \quad f_x: y \mapsto (y|x)$$

ein Isomorphismus von V auf V^*.

Beweis: Es ist klar, daß die Abbildung $x \mapsto f_x$ linear und injektiv ist. Da $\dim V = \dim V^*$, gilt auch, daß sie surjektiv sind.

Es ist sehr wichtig, den Unterschied zwischen folgenden Sätzen zu verstehen:

1) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Dann sind V und V^* isomorph.
2) Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Raum. Dann ist die Abbildung $x \mapsto f_x$ ein Isomorphismus von V auf V^*.

Obwohl sie oberflächlich gleich sind ($V \cong V^*!$), gibt es einen tiefliegenden Unterschied. In 1) haben wir nur die **Existenz** eines Isomorphismus, der allerdings von der Wahl einer Basis abhängt, bewiesen. Der Isomorphismus ist keineswegs eindeutig bestimmt, "natürlich" oder "kanonisch". Der Zweite Isomorphismus ist in einer natürlichen Weise von der zusätzlichen Srtruktur von V (dem inneren Produkt) bestimmt. Auf diesen Unterschied werden wir noch zu sprechen kommen, wenn wir die Einsteinschen Summenkonventionen diskutieren.

Multilineare Abbildungen: Bis jetzt haben wir versucht, neue Begriffe anhand konkreter Beispiele einzuführen. (Beispiel: Gleichungssysteme $\rightarrow$ Matrizen $\rightarrow$ lineare Abbildungen.) Jetzt kommen wir zu den kompliziertesten Begriffen unserer Vorlesung – Tensorprodukten und alternierenden Formen. Aus verschiedenen Gründen möchten wir den umgekehrten Weg wählen. Wir fangen mit dem abstrakten Begriff einer multilinearen Abbildung an. Dann führen wir mit Hilfe der Dualität die Tensorprodukte ein. Am Schluß betrachten wir Koordinatendarstellungen von Tensoren und finden dann die klassische Definition wieder.

Wir beginnen mit multilinearen Abbildungen. Um den Einstieg zu erleichtern, betrachten wir zunächst bilineare Abbildungen bzw. bilineare Formen.

Seien V, W Vektorräume. Eine **Bilinearform** auf $V \times W$ ist eine Abbildung

$$f: V \times W \to \mathbf{R},$$

sodaß f linear in beiden Variablen ist, d.h.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y, z) &= \lambda f(x,z) + \mu f(y,z) \quad (x, y \in V, z \in W, \lambda, \mu \in \mathbf{R}) \\ f(x, \lambda y + \mu z) &= \lambda f(x,y) + \mu f(x,z) \quad (x \in V, y, t \in W, \lambda, \mu \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Dann gilt im allgemeinen

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j f(x_i, y_j)$$

Die Menge aller solchen Abbildungen bezeichnet man mit $B(V,W)$. Diese Menge hat eine natürliche Vektorraumstruktur.

Beispiele:

I. Ein Skalarprodukt auf V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

II. Auf $\mathbf{R}^n$ hat eine typische Bilinearform die Gestalt
$f: \big((\xi_i), (\eta_j)\big) \to \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \xi_i \eta_j$ wobei $[a_{ij}]$ eine $n \times n$ Matrix ist.

Es gilt sogar: Jede Form hat diese Gestalt, wobei

$$a_{ij} = f(e_i, e_j)$$

(Denn

$$\begin{aligned} f\big((\xi_i), (\eta_j)\big) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \eta_j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_i e_i, \eta_j e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j f(e_i, e_j)\ ). \end{aligned}$$

Nach dem zweiten Beispiel ist es naheliegend, Bilinearformen auf allgemenen Vektorräumen durch Matrizen darzustellen. Das ist tatsächlich möglich. Denn sei f eine Bilinearform in $B(V,W)$, (x_i), (y_j) Basen für V bzw. W.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j\right) &= \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_i \mu_j a_{ij} \quad \text{wobei} \quad a_{ij} = f(x_i, y_j) \\ &= [\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \quad A \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wobei $A = [a_{ij}]$ **die Matrix von** f bzgl. (x_i) bzw. (y_j) ist.

Wir können diese Tatsachen folgendermaßen formalisieren:

Satz: Seien V_1, V_2 Vektorräume mit Basen $(x_1, \dots, x_m)$ bzw. $(y_1, \dots, y_n)$. Dann ist

$$\{f_i \otimes g_j : 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n\}$$

eine Basis für $B(V_1, V_2)$ wobei (f_i) bzw. (g_j) die Dualbasen sind und $f_i \otimes g_j$ die Form

$$(x, y) \mapsto f_i(x) g_j(y)$$

ist.

Warnung: Man hüte sich vor der Schlußfolgerung:

Linare Abbildungen $\cong$ Matrizen
Bilinearformen $\cong$ Matrizen

Daher gilt: Lineare Abbildungen $\cong$ Bilinearformen.

Die Schwierigkeit liegt darin, daß die Matrizendarstellungen sich anders verhalten im Bezug auf Koordinatenwechsel. Denn seien $(x'_1, \dots, x'_m)$ bzw. $(y'_1, \dots, y'_n)$ neue Basen von V bzw. W mit Übergangsmatrizen $S = [s_{ij}]$, $T = [t_{kl}]$ d.h.

$$x'_j = \sum_{i=1}^m s_{ij} x_i \qquad y'_l = \sum_{k=1}^n t_{kl} y_k.$$

Seien $A = [a_{ik}]$ bzw. $A' = [a'_{jl}]$ die Matrizendarstellung von f. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a'_{jl} &= f(x'_j, y'_l) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^m s_{ij} x_i, \quad \sum_{k=1}^n t_{kl} y_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n s_{ij} a_{ik} t_{kl} \end{aligned}$$

und das ist das (j, l)-te Element von $S^t A T$.

D.h.

$$A' = S^t A\, T$$

(Vergleiche die Formel $A' = S^{-1} A T$ für lineare Abbildungen.)

Besonders interessant sind Bilinearformen auf $V \times V$, dem Produkt von V mit sich selbst. Wir sagen, daß

$$f \in B(V, V) = L^2(V)$$

a) **symmetrisch** ist, falls $f(x,y) = f(y,x) \quad (x,y \in V)$;
b) **alternierend** ist, falls $f(x,y) = -f(y,x) \quad (x,y \in V)$.

Falls f die Koordinatendarstellung $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i \otimes f_j$ bezüglich der Basis $(x_1, \dots, x_n)$ hat, (d.h. $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\mu_j$ oder $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i \otimes f_j$) dann sieht man, daß f genau dann symmetrisch (bzw. alternierend) ist, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ (bzw. $a_{ij} = -a_{ji}$) d.h. wenn die Matrix $A = [a_{ij}]$ symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch) ist. Denn $a_{ij} = f(x_i, x_j) = \pm a_{ij}$, je nachdem f symmetrisch oder alternierend ist.

Besonders wichtig sind symmetrische Bilinearformen (wie wir früher gesehen haben, definieren sie Kegelschnitte im $\mathbf{R}^n$). Aus der Theorie von Kapitel VII wissen wir, daß wir eine orthogonale Basis wählen können, sodaß die Bilinearform die Diagonalgestalt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i$ hat. Jetzt untersuchen wir die Frage, ob wir eine noch einfachere Normalform bekommen, wenn wir willkr̈liche Koordinatentransformationen zulassen:

Die Normalform einer quadratischen Form:
Sei f eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbf{R}^n$ – etwa

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \eta_j$$

wobei $A = [a_{ij}]$ symmetrisch ist. Wir suchen eine Normalform für f d.h. eine Basiswahl $(x_1, \dots, x_n)$, sodaß die Koeffizienten von f bzgl. dieser Basis möglichst einfach sind. Aus der Theorie von Kapitel VII wissen wir, daß es eine Basis $(y_1, \dots, y_n)$ gibt, sodaß

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i, \quad \sum_{j=1}^{n} \eta_j y_j\right) = \lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \xi_n \eta_n$$

wobei etwa $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_p > 0, \quad \lambda_{p+1} < 0, \dots, \lambda_{p+q} < 0, \quad \lambda_{p+q+1} = \dots = \lambda_n = 0.$

Ersetzen wir $y_1, \dots, y_{p+q}$ durch $y_1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, y_p/\sqrt{-\lambda_{p+q}}$, so bekommen wir eine Basis (x_i), sodaß

$$f\big(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n, \eta_1 x_1 + \dots, \eta_n x_n\big) = \xi_1\eta_1 + \dots + \xi_p\eta_p - \xi_{p+1}\eta_{p+1} - \dots - \xi_{p+q}\eta_{p+q}.$$

D.h. daß die Matrix von f die Gestalt

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hat.

In der Sprachen von Matrizen läßt sich dieses Ergebnis folgendermaßen formulieren:

Satz: Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix (über $\mathbf{R}$). Dann existieren eine invertierbare $n \times n$ Matrix A und ganze Zahlen p, q mit $p + q = \text{Rang}(A)$, sodaß

$$S^t A S = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die koordinatenfreie Formulierung dieses Satzes ist:

Satz: Sei $f \in L^2(V)$ eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine Basis $(x_1, \ldots, x_n)$ für V, sodaß die Matrix von f die Gestalt

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hat.

Eine wichtige Bemerkung ist die Tatsache, daß die Zahlen p, q unabhängig von der Basiswahl sind. Dies ist das sogenannte **Trägheitsgesetz von SYLVESTER.** Denn zunächst gilt, daß $p + q$ gleich dem Rang der Matrix von f und daher unabhängig ist. Seien jetzt (x_i) bzw. (x_i') Basen für V, sodaß die Matrizen von f die Gestalten

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} I_{p'} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{q'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

haben. Wir setzen jetzt:

$$\begin{aligned} M_p &= [x_1, \ldots, x_p], \quad & M_p' &= [x_1', \ldots, x_{p'}'] \\ N_q &= [x_{p+1}, \ldots, x_n], \quad & N_{q'} &= [x_{p'+1}', \ldots, x_n'] \end{aligned}$$

Es gilt: $f(x,x) > 0$ für $x \in M_p \setminus \{0\}$ (bzw. $x \in M_{p'} \setminus \{0\}$)
$f(x,x) \leq 0$ für $x \in N_q$ bzw. $x \in N_q'$.

Wir nehmen jetzt an, daß etwa $p' > p$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \dim(M_{p'} \cap N_q) &= \dim M_{p'} + \dim N_q - \dim(M_{p'} + N_q) \\ &\geq p' + (n - p) - n = p' - p \\ &> 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $M_{p'} \cap N_q \neq \{0\}$ – Wiederspruch.

Jetzt betrachten wir Tensorprodukte. Wie schon erwähnt, bringen wir zunächst einen koordinaten freien Zugang:

Tensorprodukte: Seien V_1, V_2 Vektorräume. Das **Tensorprodukt** von V_1 und V_2 ist der Vektorraum $B(V_1^*, V_2^*)$. Wir bezeichnen diesen Raum mit $V_1 \otimes V_2$ und listen hier einige wichtige Eigenschaften auf:

I. Es gibt eine natürliche bilineare Abbildung

$$\varphi: V_1 \times V_2 \mapsto V_1 \otimes V_2$$

wobei $\varphi: (x, y) \to x \otimes y$ mit $x \otimes y$ die Form $(f, g) \to f(x)g(y)$.

Es gilt dann:
a) Jedes Element von $V_1 \otimes V_2$ hat eine Darstellung

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$$

wobei die x_i aus V_1 und die y_i aus V_2 sind.

b) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \otimes (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \lambda_1\mu_2 x_1 \otimes y_1 + \lambda_1\mu_2 x_1 \otimes y_2 + \lambda_2\mu_1 x_2 \otimes y_1 + \lambda_2\mu_2 x_2 \otimes y_2$.

II. Falls (x_i) bzw. (y_j) eine Basis für V_1 (bzw. V_2) ist, dann ist

$$\{x_i \otimes y_j : 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n\}$$

eine Basis für $V_1 \otimes V_2$. Insbesondere gilt:

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \dim V_2.$$

Bezüglich dieser Basis hat $z \in V_1 \otimes V_2$ die Darstellung $\sum\limits_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} x_i \otimes y_j$, wobei $a_{ij} = z(f_i, g_j)$.

Tensoren höherer Ordnung: Ähnlich können wir das Tensorprodukt von n Vektorräumen $V_1, \dots, V_n$ definieren, d.h. als den Raum

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n := B(V_1^*, \dots, V_n^*).$$

Jeder Tensor in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ hat eine Darstellung

$$\sum_{i=1}^{r} x_i^1 \otimes x_i^2 \otimes \cdots \otimes x_i^n$$

als Summe von **einfachen Tensoren** $x_i^1 \otimes, \dots, \otimes x_i^n$ wobei die x_r^r in V_r und $x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^n$ die multilineare Form

$$(f_1, \dots, f_n) \mapsto f_1(x_i^1) \dots f_n(x_i^n)$$

ist.
Falls $(x^i_1, \ldots, x^i_{r_i})$ eine Basis für V_i ist, dann ist $\{(x^1_{j_1} \otimes \cdots \otimes x^n_{j_n} : 1 \leq j_i \leq r_i\}$ eine Basis für $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ und jeder Tensor hat eine eindeutige Darstellung:

$$\sum_{j_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{r_n} a^{1\,2 \ldots n}_{j_1 j_2 \cdots j_n} \; x^1_{j_1} \otimes \cdots \otimes x^n_{j_n}$$

bezüglich dieser Basis.

In der Praxis ist der Fall, wo jedes V_i gleich einem gegebenen Raum V bzw. dem Dualraum V^* ist, am wichtigsten. Wir verwenden daher die Bezeichnung $\otimes^p_q(V)$, um das Tensorprodukt

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q}$$

zu bezeichnen.

Die Elemente aus diesem Raume haben Darstellungen

$$\sum_{i=1}^{r} x^1_i \otimes \cdots \otimes x^p_i \otimes f^1_i \otimes \cdots \otimes f^q_i$$

wobei die x aus V bzw. die f aus V^* sind. Sie heißen **gemischte Tensoren vom Grad** (p, q) – genauer, kontravariant vom Grad p, kovariant vom Grad q. Der Raum hat Dimension $(\dim V)^{p+q}$ und hat eine Basis mit Elementen

$$\begin{aligned}(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p} \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_p} : 1 \leq i_r \leq n,\\ 1 \leq j_s \leq n)\end{aligned}$$

wobei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis für V mit Dualbasis $(f_1, \ldots, f_n)$ ist.

Ein wichtiges Beispiel eines Tensors ist der metrische Tensor auf einem euklidischen Raum V, mit Basis $(x_1, \ldots, x_m)$ und Dualbasis $(f^1, \ldots, f^m)$. Setze: $x^i := \tau^{-1}(f^i)$, $g_{ij} = (x_i | x_j)$. Dann ist $\sum g_{ij} x^i \otimes x^j$ der **metrische Tensor** auf V.

Wir bringen jetzt eine Liste von operationen auf Tensoren, die oft verwendet werden:

Multiplikation von Tensoren: Wir können einen Tensor vom Grad (p, q) mit einem Tensor von Grad (p_1, q_1) multiplizieren, um einen Tensor vom Grad $(p + p_1, q + q_1)$ zu bekommen. Genauer, es gibt eine bilineare Abbildung m von $\otimes^p_q(V) \times \otimes^{p_1}_{q_1}(V)$ in $\otimes^{p+p_1}_{q+q_1}(V)$ wobei

$$\begin{aligned} m\colon (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_{q'}, x'_1 \otimes \cdots \otimes x'_{p_1} \otimes f'_1 \otimes \cdots \otimes f'_{q_1}) \mapsto \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes x'_1 \otimes \cdots \otimes x'_{p_1} \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f'_1 \otimes \cdots \otimes f'_{q_1}. \end{aligned}$$

Verjüngung: Wir können den kovarianten Grad und den kontravarianten Grad eines Tensors gleichzeitig reduzieren, in dem wir eine kovariante Komponente auf eine kontravariante anwenden. Genauer: Es gibt eine lineare Abbildung v von $\otimes_q^p(V)$ in $\otimes_{q-1}^{p-1}(V)$, wobei

$$v\colon x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_q \mapsto f_1(x_p) x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p-1} \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_q$$

"Raising or lowering an index": Falls V ein euklidischer Raum ist, haben wir gesehen, daß es einen natürlichen Isomorphismus

$$x \mapsto f_x$$

von V auf V^* gibt. Wir bezeichen diesen Isomorphismus mit τ. Wenden wir diese Abbildung auf eine kontravariante Komponente eines Tensors in $\otimes_q^p(V)$ an, so bekommen wir einen Tensor in $\otimes_{q+1}^{p-1}(V)$.

Das heißt, es gibt eine lineare Abbildung von $\otimes_q^p(V)$ in $\otimes_{q+1}^{p-1}(V)$, die wir auch mit τ bezeichnen, sodaß

$$\tau\colon x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_q \mapsto x_1 \otimes x_{p-1} \otimes \tau x_p \otimes \cdots \otimes f_q.$$

Jetzt untersuchen wir Koordinatendarstellungen für diese Operationen. Der Raum $\otimes_q^p V$ hat folgende Basis:

$$x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p} \otimes f_{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes f_{i_{p+q}}$$

und ein Tensor $z \in \otimes_q^p(v)$ hat eine Koordinatendarstellung $\sum \lambda_{i_1, i_2 \ldots i_{p+q}} x_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{p+q}}$ wobei

$$\lambda_{i_1, i_2 \ldots i_{p+q}} = z(f \ldots, f_{i_p}, x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_{p+q}})$$
$$\big(\otimes_q^p V = B(V^*, \ldots, V^*, V \ldots, V)!\big).$$

Die Tensoroperationen haben folgende Wirkung auf die Koordinaten:

Multiplikation: Sei etwa

$$z_1 = \lambda_{11} x_1 \otimes f_1 + \lambda_{12} x_1 \otimes f_2 + \lambda_{21} x_2 \otimes f_1 + \lambda_{22} x_2 \otimes f_2 \in \otimes_1^1 V = V \otimes V^*$$
$$z_2 = \mu_{11} f_1 \otimes f_1 + \mu_{12} f_1 \otimes f_2 + \mu_{21} f_2 \otimes f_1 + \mu_{22} f_2 \otimes f_2 \in \otimes_2^0 V = V^* \otimes V^*$$

wobei V zweidimensional ist.

Dann gilt: $z_1 \otimes z_2 = \lambda_{11}\mu_{11} x_1 \otimes f_1 \otimes f_1 \otimes f_1 + \lambda_{12}\mu_{11} x_1 \otimes f_2 \otimes f_1 \otimes f_1 + \ldots$

Verjüngung: Sei

$$z = \lambda_{111} x_1 \otimes f_1 \otimes f_1 + \lambda_{211} x_2 \otimes f_1 \otimes f_1 + \lambda_{121} x_1 \otimes f_2 \otimes f_1 + \lambda_{112} x_1 \otimes f_1 \otimes f_2 + \lambda_{221} x_2 \otimes f_2 \otimes f$$
$$\otimes f_2 \otimes f_2 + \lambda_{212} x_2 \otimes f_1 \otimes f_2 + \lambda_{222} x_2 \otimes f_2 \otimes f_2.$$

Dann ist die Verjüngung von z der Tensor

$$(\lambda_{111}+\lambda_{221})f_1+(\lambda_{112}+\lambda_{222})f_2$$

in $\otimes_1^0(V)=V^*$.

Sei jetzt V ein euklidischer Raum mit Skalarprodukt $(\;|\;)$. Wir betrachten wieder eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$ mit Dualbasis $(f^1,\dots,f^n)$. Sei jetzt

$$x^i=\tau^{-1}(f^i)$$

Es gilt dann: $(x^i|x_j)=0 \quad (i\neq j), \quad (x^i|x_i)=1.$

Jedes $x\in V$ hat eine
kovariante Darstellung: $x=\sum\lambda_i x^i$ wobei $\lambda_i=(x|x_i)$
und eine
kontravariante Darstellung: $x=\sum\lambda^i x_i$ wobei $\lambda^i=(x|x^i)$.

Da wir den Raum V mit V^* identifiziert haben, können wir $\otimes_q^p V=V\otimes\cdots\otimes V\otimes V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ mit $V\otimes\cdots\otimes V$ identifizieren: Eine Basis dafür ist

$$\{x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_p}\otimes x^{i_{p+1}}\otimes\cdots\otimes x^{i_{p+q}}\}$$

(manchmal schreibt man $\varepsilon_{i_1\dots i_p}^{i_{p+1}\dots i_{p+q}}$ für $x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_p}\otimes x^{i_{p+1}}\otimes\cdots\otimes x^{i_{p+q}}$).

Jedes $z\in\otimes_q^p V$ hat eine Darstellung

$$\sum\lambda^{i_1\dots i_p}_{i_{p+1}\dots i_{p+q}}x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_p}\otimes x^{i_{p+1}}\otimes\cdots\otimes x^{i_{p+q}}.$$

Der Operator $\tau\colon V\to V^*$ hat folgende Koordinatendarstellung:

$$\sum_{i=1}^n\lambda^i x_i\mapsto\sum_{j=1}^n\lambda_j x^j$$

wobei

$$\lambda_j=\sum_{i=1}^n g_{ij}\lambda^i \qquad \big(g_{ij}=(x_i|x_j)\big)$$

Denn

$$\begin{aligned}\tau\left(\sum_{i=1}^n\lambda^i x_i\right)(x_k)&=\left(x_k|\sum_{i=1}^n\lambda^i x_i\right)=\sum_{i=1}^n\lambda^i g_{ik}=\\&=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n g_{ij}\lambda^i\right)f^j(x_k).\end{aligned}$$

Die Operation "raising an index" hat dann folgende Koordinatendarstellung (etwa von $\otimes_1^2(V) \to \otimes_2^1(V)$)

$$\sum \lambda_{i_3}^{i_1 i_2} x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes x^{i_3} \to \sum \lambda_{i_2 i_3}^{i_1} x_{i_1} \otimes x^{i_2} \otimes x^{i_3}$$

wobei

$$\lambda^{i_1} i_2 i_3 = \sum_{j_2=1}^{n} g_{i_2 j_2} \lambda_{i_3}^{i_1 j_2}$$

Eine besonders wichtige Rolle (etwa in der Physik) spielen die sogenannten **alternierenden Formen.** Das sind diejenigen Formen $f \in L^r(V) = B(V, \dots, V)$ $(= V^* \otimes \cdots \otimes V^*)$ mit der Eigenschaft, daß

$$\begin{array}{l} f(x_1 \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_r) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_r) \\ \big((x_1, \dots, x_r) \in V, \quad i < j\big) \end{array}.$$

(D.h. bei Vertauschen von 2 Argumenten änders sich das Vorzeichen.)

Z.B. Haben wir gesehen, daß die Determinante, als Funktion der Spaltenvektoren einer Matrix, alternierend sind.
Die Menge aller alternierenden Formen bildet einen Teilraum von $L^r(V)$, den wir mit $\wedge^r(V)$ bezeichnen. Es gibt eine natürliche Projektion von $L^r(V)$ auf $\wedge^r(V)$, nämlich

$$f \mapsto \mathrm{Alt}\,(f)$$

wobei

$$\mathrm{Alt}\,(f)\colon (x_1, \dots, x_r) \to \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in S_r} \varepsilon_\pi f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(r)}).$$

Multiplikation von Formen:
Falls $f \in L^r(V)$, $g \in L^s(V)$ alternierend sind, dann ist das Produkt $f \otimes g$ i.A. nicht alternierend. Daher definieren wir **das äußere Produkt** $f \wedge g$ als $\mathrm{Alt}\,(f \otimes g)$.

(D.h.:

$$f \wedge g(x_1, \dots, x_{r+s}) = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\pi \in S_{r+s}} \varepsilon_\pi f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(r)}) g(x_{\pi(r+1)}, \dots, x_{\pi(r+s)}).$$

Beispiel: Seien f, g 1-Formen (d.h. $f, g \in V^*$).

Dann gilt:

$$f \otimes g\colon (x, y) \mapsto f(x) g(y)$$

ist nicht alternierend. Das äußere Produkt

$$\begin{aligned} f \wedge g \colon (x, y) &\mapsto \frac{1}{2}\Big\{\big(f(x)g(y) - f(y)g(x)\big)\Big\} \\ &= \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wir bringen jetzt einige Eigenschaften, die wir später brauchen werden.
I. $\mathrm{Alt}\big(\mathrm{Alt}(f) \otimes g\big) = \mathrm{Alt}(f \otimes g) = \mathrm{Alt}\big(f \otimes \mathrm{Alt}(g)\big)$;

Beweis:

$$\mathrm{Alt}(f \otimes g)(x_1, \ldots, x_{r+s}) = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\pi \in S_{r+s}} \varepsilon_\pi f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(s)}) g(x_{\pi(r+1)}, \ldots, x_{\pi(r+s)})$$

$$\big(\mathrm{Alt}(f) \otimes g\big)(x_1, \ldots, x_{r+s}) = \frac{1}{r!} \sum_{\rho \in S_r} \varepsilon_\rho f(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(r)}) g(x_{r+1}, \ldots, x_{r+s})$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}\big(\mathrm{Alt}(f) \otimes g\big)(x_1, \ldots, x_{r+s}) &= \frac{1}{(r+s)!} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \sum_{\rho \in S_r} \\ \varepsilon_\sigma \varepsilon_\rho f(x_{\sigma\circ\rho(1)}, \ldots, &x_{\sigma\circ\rho(r)}) g(x_{\sigma(r+1)}, \ldots, x_{\sigma(r+s)}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\rho \in S_r} \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\rho f(x_{\sigma\circ\rho(1)}, \ldots, x_{\sigma\circ\rho(r)}) \\ &\qquad g(x_{\sigma(r+1)}, \ldots, x_{\sigma(r+s)}) \\ &= \mathrm{Alt}(f \otimes g)(x_1, \ldots, x_{r+s}) \end{aligned}$$

da der Ausdruck unter der Klammer immer $\mathrm{Alt}(f \otimes g)$ liefert.

II. $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$ (das äußere Produkt ist assoziativ).

Beweis:

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h &= \mathrm{Alt}\big(\mathrm{Alt}(f \otimes g) \otimes h\big) \\ &= \mathrm{Alt}\big((f \otimes g) \otimes h\big) \\ &= \mathrm{Alt}\big(f \otimes (g \otimes h)\big) \\ &= \mathrm{Alt}\big(f \otimes \mathrm{Alt}(g \otimes h)\big) \\ &= f \wedge (g \wedge h). \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} f \wedge (g + h) &= f \wedge g + f \wedge h \\ (f + f_1) \wedge h &= f \wedge h + f_1 \wedge h \end{aligned}$$

($\wedge$ ist distributiv über $+$).

IV. $f \wedge g = (-1)^{rs} g \wedge f$.

Beweis:

$$(f \wedge g)(x_1, \dots, x_{r+s}) = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\pi \in S_{r+s}} \varepsilon_\pi f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(r)}) \\ g(x_{\pi(r+1)}, \dots, x_{\pi(r+s)})$$

$$(g \wedge f)(x_1, \dots, x_{r+s}) = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\pi \in S_{r+s}} \varepsilon_\pi g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(s)}) \\ f(x_{\pi(s+1)}, \dots, x_{\pi(s+r)})$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\pi \in S_{r+s}} \varepsilon_\pi f(x_{\pi(s+1)}, \dots, x_{\pi(s+r)}) \\ g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(s)})$$

Wir brauchen daher nur den Charakter der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & r+1 & \dots & r_s \\ s+1 & & \dots & s+r & 1 & \dots & s \end{pmatrix}$$

auszurechnen.
Das ergibt $(-1)^{rs}$.

Wie immer, berechnen wir eine Basis für $\wedge^r(v)$.

Satz: Sei $(f_1, \dots, f_n)$ eine Basis für V^*. Dann ist

$$\{f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n\}$$

eine Basis für $\wedge^r(V)$ $(r \leq n)$.

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \dim \wedge^r(V) &= \binom{n}{r} \quad (r \leq n) \\ \dim \wedge^n(V) &= 1 \\ \wedge^r(V) &= \{0\} \quad (r > n). \end{aligned}$$

Beweis:
1) $\{f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n\}$ spannt $\wedge^r(V)$ auf: Jedes Element f in $\wedge^r(V)$ ist eine Linearkombination von Formen der Gestalt $f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r}$, wobei $i_k \in \{1, \dots, n\}$ für jedes k. Nach Eigenschaft VI. ($g \wedge f = (-1)^{rs} f \wedge g$) können wir die f_{i_k} so vertauschen, daß $i_1 < i_2 < \dots < i_r$.

(Falls etwa $i_k = i_l$ dann gilt: $f_{i_k} \wedge f_{i_l} = -f_{i_l} \wedge f_{i_k} = 0$ d.h. $f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_r} = 0$.) 2) $\{f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_r} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ ist linear unabhängig. Denn

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} \lambda_{i_1} \ldots i_r f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_r}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}) = \lambda_{j_1,\ldots,j_r}$$

wobei (f_i) und (x_i) Dualbasen sind.

Beispiel: Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine glatte Funktion. df, die **Ableitung** von f, ist eine Funktion von $\mathbf{R}^2$ in $L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) = V^*$ wobei $V = \mathbf{R}^2$.

Wir schreiben dx bzw. dy für die Ableitung der Funktion

$$(x, y) \mapsto x \quad \text{bzw.} \quad (x, y) \mapsto y$$

d.h. (dx, dy) ist einfach eine (historisch-bedingte) neue Bezeichnung für die Dualbasis von V^*.

Eine **Differentialform** auf $\mathbf{R}^2$ vom Grad $p\,(p = 1, 2)$ ist eine Abbildung von $\mathbf{R}^2$ in V^* bzw. $\wedge^2(V^*)$. Sie haben daher die Gestalt:

$p = 1 \quad a_1(x, y)dx + a_2(x, y)dy.$
$p = 2 \quad a_1(x, y)dx \wedge dy$ (manchmal geschrieben $a(x, y)dx\, dy$).