A N H A N G

A.1. Mengen, Abbildungen;

A.2. Gruppen (Transformationsgruppen, Symmetrie, Permutationen);

A.3. Die komplexen Zahlen (Fundamentalsatz der Algebra, lineare und quadratische Faktorisierung, Bruchzerlegungen, komplexe Vektorräume)

A.1. Mengen und Abbildungen

In der Vorlesung haben wir mit “Mengen” und “Abbildungen” gearbeitet, ohne diese Begriffe genau zu erläutern.

Beispiele: Die Lösungsmenge des Systems:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 6 \\
x + 3y - 7z &= 1.
\end{aligned}
$$

Die Menge aller ganzen Zahlen;
Die Menge $\mathbf{R}$ aller reelen Zahlen usw.

Versuchen wir, eine präzise Definition einer Menge zu geben, so kommen wir in Schwierigkeiten (vgl. den Versuch, in der euklidischen Geometrie einen Punkt zu definieren). Da die Feinheiten der Mengentheorie uns in dieser Vorlesung nicht besonders interessieren, werden wir einen eher pragmatischen Standpunkt einnehmen. Unter einer Menge versteht man “eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem “Ganzen” (Originaldefinition von Georg CANTOR). Die Begriffe “Menge” bzw. “Eigenschaft” überdecken sich im großen und ganzen. Jede Eigeschft bestimmt eine Menge (die Menge aller Dinge, die diese Eigenschaft besitzen) – jede Menge bestimmt eine Eigenschaft (Mitgliedschaft dieser Menge).

Eine bequeme Methode, Mengen zu spezifizieren, besteht darin, ihre Elemente zwischen geschwungenen Klammern aufzulisten (falls die Menge sehr viele oder sogar unendlich viele Elemente besitzt, verwendet man Punkte, um fehlende Elemente anzudeuten).

Beispiele:
$\{1, 2, 3\}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen ≤ 3;
$\{1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen;
$\{2, 4, 6, \dots\}$ ist die Menge aller geraden Zahlen.

Eine andere Möglichkeit verwendet die definierende Eigenschaft der Menge, d.h. $\{x \in A \colon P(x)\}$ ist die Menge aller $x \in A$, die die Eigenscahft P erfüllen.

Beispiele:
$\{x \in \mathbf{N} \colon x \quad \text{ist eine gerade Zahl}\}$ ist die Menge $\{2, 4, 6, \dots\}$.
$\{x \in \mathbf{R} \colon x \geq 0\}$ – die Menge aller nicht-negativen reelen Zahlen.

Wir verwenden Großbuchstaben für Mengen, kleine für Elemente.
$\in$ bedeutet “ist Mitglied von”. Die Folgenden Mengen sind so wichtig in der Mathematik, daß man eigene Buchstaben für sie reserviert:
$\mathbf{N}$ – die Menge aller natürlichen Zahlen;
$\mathbf{Z}$ – die Menge aller ganzen Zahlen;
$\mathbf{Q}$ – die Menge aller rationalen Zahlen;
$\mathbf{R}$ – die Menge aller reellen Zahlen.

Falls A, B Mengen sind, dann bedeutet:
"$A \subseteq B$" – A ist Teilmenge von B (d.h. jedes Element von A ist Element von B);
"$A = B$" – A und B sind identisch (d.h. sie besitzen die gleichen Elemente);
$A \cap B$ – ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B sind.
$A \cup B$ – ist die Menge aller Elemente, die entweder in A oder in B (oder in Beiden) sind.
$A \setminus B$ – ist die Menge aller Elemente, die in A aber nicht in B sind.
$\emptyset$ – (die leere Menge) ist die Menge, die keine Elemente besitzt.
$A \times B$ – ist die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$, $b \in B$ ($A \times B$ heißt das **kartesische Produkt** von A und B).

Diese Bezeichnungen lassen sich mit Hilfe der sogenannten VENN'schen Diagramme veranschaulichen.

Beispiele: Die Aussagen $2 \in \mathbf{N}$, $-7 \in \mathbf{Z}$, $\frac{7}{2} \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ sind richtig;
Die Aussagen $-7 \in \mathbf{N}$, $\frac{7}{2} \in \mathbf{Z}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, $3 + \sqrt{-1} \in \mathbf{R}$ sind falsch.

$\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$, $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ (richtig);
$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$, $\{1,2,3,4\} \subseteq \{1,3,4,5\}$ (falsch);

$\mathbf{N} = \{1,2,3,4\dots\}$ (richtig);
$\{x \in \mathbf{R} \colon x \geq 0\} = \{x \in \mathbf{R} \colon \text{es existiert} y \in \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad x = y^2\}$ (richtig);
$\{1,2,3,4\} \cap \{1,2,5\} = \{1,2\}$ (richtig);
$\{1,2,3,4,\} \cup \{1,2,5\} = \{1,2,3,4,5\}$ (richtig).

$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ist die Menge der irrationalen Zahlen, (richtig).
$\emptyset = \{x \in \mathbf{R} \colon x^2 = -1\} = \{1,3,5,\dots\} \cap \{2,4,6,\dots\}$ (richtig).

Die Mengenoperationen erfüllen die folgenden Rechenregeln, wie man sich leich überzeugt:
1) $A \cup A = A, A \cap A = A$;
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
3) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
6) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C), (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
(Die Gesetze von de MORGAN.)

Abbildungen: Eine informale Definition wäre etwa: Eine Abbildung f von einer Menge A in eine Menge B (in Symbolen $f \colon A \to B$) ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ *ein* Element $f(x)$ in B zuordnet. A heißt die **Definitionsmenge** (oder **Definitionsbereich**), B die **Bildmenge** von f.

Beispiel: Die Vorschrift $f(x) = x^2$ definiert eine Abbildung von $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Wir benutzen folgende Schreibweise:

$$\begin{aligned} f \colon \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

oder $f \colon x \mapsto x^2 \quad (x \in \mathbf{R})$.

Um Anthropomorphismen wie "Vorschrift" zu vermeiden, können wir etwa die folgende formale Definition geben: eine Abbildung $f: A \to B$ ist eine Teilmenge M von $A \times B$ mit den Eigenschaften:
a) für jedes $x \in A$ existiert ein $y \in B$ mit $(x, y) \in M$;
b) $(x, y) \in M$ und $(x, z) \in M$ impliziert $y = z$.
(M ist der **Graph** der Abbildung.)

Notation:
Id_A ist die Identitätsabbildung $x \mapsto x$ auf einer Menge A: Falls $f: A \to B$ und $A_1 \subseteq A$, dann ist $f(A_1) = \{f(x): x \in A_1\}$ das **Bild** von A_1 bzgl. f.
Für $B_1 \subseteq B$ ist

$$f^{-1}(B_1) = \big\{x \in A: f(x) \in B_1\big\}$$

das **Urbild** von B_1 bzgl. f.

Eine Abbildung $f: A \to B$ ist
injektiv, falls $x \neq y$ impliziert $f(x) \neq f(y)$;
surjektiv, falls $f(A) = B$ (d.h. jedes Element in B ist das Bild eines Elements aus A);
bijektiv, falls injektiv und surjektiv.
(Entsprechende Nennwörter: Injektion, Surjektion, Bijektion.)

Beispiele: Die Abbildung

$$f: x \mapsto x^2 \quad \text{von} \quad \mathbf{R} \quad \text{in} \quad \mathbf{R}$$

ist weder injektiv noch surjektiv. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{R}) &= \{x: x \geq 0\} \\ f^{-1}(y) &= \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} \quad (y \geq 0) \\ f^{-1}(B) &= \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}: y \in B, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, wobei $g: x \mapsto x^3$, ist surjektiv und injektiv – daher bijektiv.

$h: x \mapsto \sin x \,\text{von}\, \mathbf{R} \,\text{in}\, [-1, 1]$ ist surjektiv.

Zusammensetzung von Abbildung:
Eine Abbildung kann man betrachten als eine mathematische Abstraktion eines "Input-Ouput Systems".

Der Zusammensetzung (Verknüpfung) zweier Abbidlungen entspricht die reihenweise Koppelung von zwei Systemen.

Damit die Zusammensetzung möglich ist, muß das Output von S_1 ein mögliches Input von S_2 sein. In unserer Sprache heißt das, daß die Abbildungen $f: A \to B$, $g: C \to D$ zusammensetzbar sind, falls $B \subseteq C$. Die Abbildungen $g \circ f$ von A in D ist dann die Abbildung

$$x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

Falls eine Abbildung $f\colon A \to B$ bijektiv ist, dann existiert *eine* Abbildung $g\colon B \to A$, sodaß $f \circ g = \mathrm{Id}_A$, $g \circ f = \mathrm{Id}_B$. g heißt die **Inverse** von f. (Geschrieben f^{-1}).

Beispiele: Die Zusammensetzung der Abbildungen

$$\begin{aligned} f&\colon (\xi_1, \xi_1) \to (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) \\ g&\colon (\xi_1, \xi_2) \to (b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2, b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2) \end{aligned}$$

ist die Abbildung

$$\begin{aligned} g * f\colon (\xi_1, \xi_2) \to \bigl(&(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})\xi_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})\xi_2, \\ &(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})\xi_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})\xi_2\bigr). \end{aligned}$$

(Alle Abbildungen von $\mathbf{R}^2$ in sich selbst.)

A.2. Gruppen

Sei A eine Menge. Wir betrachten die Mengen aller Bijektionen von A als ein algebraisches System, mit Zusammensetzung als "Multiplikation". Wie man leicht sieht, erfüllt dieses System folgende Bedingungen.
G1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (Assoziativität);
G2) $f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$ (Existenz eines Einselements);
G3) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$ (Existenz von Inversen).

Wir bezeichnen diese Menge mit $\mathrm{Per}(A)$. Jede Teilmenge $G(\neq \emptyset)$ von $\mathrm{Per}(A)$, sodaß $g \circ f$ und $f^{-1} \in G$, wann $f, g \in G$, heißt eine **Transformationsgruppe** von A.

Beispiele von Transformationsgruppen: Die folgenden Mengen von Bijektionen von $\mathbf{R}^2$ sind Transformationsgruppen:
$\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2)$ – die Isometrien von $\mathbf{R}^2$;
$0(2)$ – die linearen Isometrien von $\mathbf{R}^2$;
$\mathrm{SL}(2)$ – die Menge aller linearen Drehungen in $\mathbf{R}^2$, d.h. $\{D_{0,\theta}\colon \theta \in \mathbf{R}\}$;
$\mathrm{Aff}(2)$ – die bijektiven Affinitäten auf $\mathbf{R}^2$ d.h. die affinen Abbildungen $(\xi_1, \xi_2) \to (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + c_1, a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + c_2)$ wobei $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Ähnlicherweise definieren wir die Transformationsgruppen $\mathrm{Isom}\,(\mathbf{R}^3), 0(3), \mathrm{SL}(3), \mathrm{Aff}(3)$ in $\mathbf{R}^3$.

Symmetriegruppen: Sei A eine Teilmenge von $\mathbf{R}^2$. Die **Symmetriegruppe von** A ist die Menge aller Isometrien $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ sodaß $T(A) = A$.

Beispiele: Die Symmetriegruppe von
I. dem Quadrat ist $\{Id, D_{\frac{\pi}{2}}, D_\pi, D_{\frac{3\pi}{2}}, R_L, R_L \circ D_{\frac{\pi}{2}}, R_L \circ D_\pi, R_L \circ D_{\frac{3\pi}{2}}\}$ wobei L die x-Achse ist;

II. dem Kreis $\bigl\{(\xi_1, \xi_2)\colon \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1\bigr\}$ ist $0(2)$.

Eine bequeme Art, Transformationsgruppen zu charakterisieren, ist die Angabe eines Systems Erzeugender d.h. einer Menge A von Transformation, sodaß jedes Element der Gruppe darstellbar als ein Produkt von Elementen aus S ist. Z.B. haben die Gruppen oben folgende erzeugende Systeme:

I. $\{D_{\frac{\pi}{2}}, R_L\}$
II. Die Menge aller Spiegelungen.

Symmetriegruppen von beschränkten Figuren:
A. In $\mathbf{R}^2$.
Der Kreis $\left\{(\xi_1, \xi_2) \colon \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1\right\}$ hat die Gruppe aller linearen Isometrien als Symmetriegruppe. Ein gleichschenkeliges Dreieck hat **bilaterale Symmetrie,** d.h. die Symmetriegruppe ist $\{\mathrm{Id}, R_{L_{(1,0,0)}}\}$.

Die Symmetriegruppe des Rechtecks ist die **Vierergruppe** $\{Id, R_{L_{(1,0,0)}}, R_{L_{(0,1,0)}}, D_\pi\}$ (Symbol D_2).

Das Quadrat hat die Gruppe mit Erzeugenden $\{D_{\frac{\pi}{4}}, R_{L_{(1,0,0)}}\}$ als Symmetriegruppe (Symbol D_4).

Allgemeiner: Die Symmetriegruppe eines regulären n-gones mit keiner Spiegelsymmetrie ist die Gruppe C_n mit Erzeugendem $D_{\frac{2\pi}{n}}$.

Die Symmetriegruppe des regulären n-gones ist die Gruppe D_n mit Erzeugendem $\{D_{\frac{2\pi}{n}}, R_{L_{(1,0,0)}}\}$.

Weitere wichtige Transformationsgruppen in $\mathbf{R}^2$ sind:

I. **Die Dilatationsgruppe:** besteht aus Abbildungen der Gestalt

$$(\xi_1, \xi_2) \to (\lambda\xi_1 + c_1, \lambda\xi_2 + c_2) \qquad (\lambda \neq 0)$$

(Dilatationen sind diejenigen Abbildungen der Ebene, die jede Gerade in eine parallele Gerade abbilden).

II. **Die Ähnlichkeitsgruppe:** besteht aus Abbildungen der Gestalt $T_u \circ (\lambda f)$ wobei $\lambda \neq 0$ und f eine lineare Isometrie ist.

(Jede lineare Ähnlichkeit ist entweder eine spirale Ähnlichkeit (d.h. Drehung + Dilatation) oder eine dilatative Spiegelung (d.h. Spiegeleung + Dilatation). Jede Ähnlichkeit ist eine lineare Ähnlichkeit + Verschiebung).

III. **Die (eindimensionale) Galileische Gruppe:** besteht aus Abbildungen der Gestalt:

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1 + c_1, v\xi_1 + \xi_2 + c_2)$$

(eindimensional, weil in Anwendungen in der Kinematik die Raumkomponente ξ_2 eindimensional ist — ξ_1 ist die Zeitkomponente).

IV. **Die (eindimensionale) Lorenzgruppe:** besteht aus allen Abbildungen der Gestalt:

$$(\xi_1, \xi_1) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\xi_1 - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\xi_2 + c_1, -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\xi_2 + c_2\right)$$

(wobei v zwischen -1 und 1 liegt).

Wir führen jetzt den allgemeinen Begriff einer Gruppe ein. Eine **Gruppe** ist eine Menge G zusammen mit einer Multiplikation d.h. eine Abbildung $(x, y) \mapsto xy$ von $G \times G$ in G sodaß
1) $x(yz) = (xy)z \qquad (x, y, z \in G)$;
2) es existiert $e \in G$ mit $ex = xe = x \qquad (x \in G)$;
3) für $x \in G$ existiert $y \in G$, sodaß $xy = yx = e$.

Das Element $e \in G$ mit Eigenschaft 2) ist eindeutig bestimmt und heißt die **Einheit** von G. Ähnlicherweise ist das Element y von 3) eindeutig durch x bestimmt und heißt die **Inverse** von x (geschrieben x^{-1}).

Eine **Teilgruppe** von einer Gruppe G ist eine nichtleere Teilmenge G_1 von G, sodaß
4) G_1 ist geschlossen bzgl. Multiplikation d.h. $x, y \in G_1$ impliziert $xy \in G_1$;
5) $x \in G_1$ impliziert $x^{-1} \in G_1$.
G_1 ist dann selber eine Gruppe.

In der Praxis werden Teilgruppen oft folgendermaßen bestimmt: $\{x_1, \dots, x_n\}$ sei eine Teilmenge von einer Gruppe G. Die Menge aller Elemente, die darstellbar als Produkte von Elementen aus $\{x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}, e\}$ (wobei jedes Element öfters vorkommen kann) sind, ist eine Teilgruppe von G. Sie heißt die von $\{x_1, \dots, x_n\}$ **erzeugte Teilgruppe** und wird mit $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ bezeichnet. $\{x_1, \dots, x_n\}$ heißen **Erzeugende** der Teilgruppe.

Besonders wichtig sind die sogenannten **zyklischen Teilgruppen** – das sind die Teilgruppen, die von *einem* Element erzeugt sind, d.h. sie haben die Gestalt $\{x^n : n \in \mathbf{Z}\}$.

Beispiele: In SL(2) ist C_n die zyklische Teilgruppe, die von $D_{0,2\pi/n}$ erzeugt wird.
In Aff(2) ist C_∞ die Teilgruppe, die von $T_{(1,0)}$ erzeugt wird.

Wie man aus diesen Beispielen sieht, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder gibt es ein $r \in \mathbf{N}$, sodaß $x^r = e$. Dann erzeugt x eine Gruppe, die zu C_n isomorph ist (wobei n die kleinste positive Zahl ist, sodaß $x^n = e$). Sonst erzeugt x eine unendliche Teilgruppe, die zu C_∞ isomorph ist.

Im allgemeinen ist die Gruppenmultiplikation nicht kommutativ d.h. es kann Elemente x, y geben, mit $xy \neq yx$. (Beispiel: zwei Spiegelungen R_{L_1}, R_{L_2} in 0(2), falls L_1, L_2 verschiedene Geraden sind, die nicht senkrecht sind.)

Eine Grupe G heißt **kommutativ** (oder **abel'sch**), falls alle Elemente kommutieren d.h. $xy = yx \, (x, y \in G)$ (die Multiplikationstabelle ist symmetrisch bzgl. der Diagonale). Beispiele von kommutativen Gruppen sind: $\mathbf{R}$ mit Addition, C_n, D_{2n}, SL(2).

Wegen der Nichtkomutativität ist die Aussage $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ im allgemeinen falsch. Allerdings gilt der folgende Satz:

Satz: Seien x, y Elemente einer Gruppe G. Dann gilt:

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

Beweis: Es gilt:

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = (xe)x^{-1} = xx^{-1} = e$$

Ähnlicherweise gilt $(y^{-1}x^{-1})xy = e$.

Beispiel: Für zwei Spiegelungen R_{L_1}, R_{L_2} in $0(2)$ gilt

$$(R_{L_1} \circ R_{L_2})^{-1} = (R_{L_2})^{-1} \circ (R_{L_1})^{-1} = R_{L_2} \circ R_{L_1}.$$

Permutationen:

Eine sehr wichtige Klasse von Gruppen sind die Permutationsgruppen von endlichen Mengen. Wir bezeichnen die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit S_n. S_n hat bekanntlich $n!$ Elemente.

($n!$ wächst sehr schnell mit n: $1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, 399168000, 4.79 \times 10^8, 6.33 \times 10^9, 8.72 \times 10^{10}$, $1.31 \times 10^{12}, 2.09 \times 10^{13}, 3.56 \times 10^{14}, 6.40 \times 10^{15}$, $1.22 \times 10^{17}, 2.43 \times 10^{18}, 5.11 \times 10^{19}, 1.12 \times 10^{21}$, $2.59 \times 10^{22}, 6.2 \times 10^{23}, 1.55 \times 10^{25}, 4.03 \times 10^{26}$, $1.09 \times 10^{28}, 3.05 \times 10^{29}, 8.84 \times 10^{30}, 2.65 \times 10^{32}$, $8.22 \times 10^{33}, 2.63 \times 10^{35}, 8.68 \times 10^{36}, 2.95 \times 10^{38}$, $1.03 \times 10^{40}, 3.72 \times 10^{41}, 1.38 \times 10^{43}, 5.23 \times 10^{44}$, $2.04 \times 10^{46}, 8.16 \times 10^{47} (\sim 40!)$)).

Es ist bequem, eine Permutation π folgendermaßen zu bezeichen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots\ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots\ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist die Permutation $1 \to 4, 2 \to 3 \quad 3 \to 2, 4 \to 1$.

Beispiele von wichtigen Permutationen:

I. **Transpositionen:** Permutationen, die zwei Zahlen austauschen. Sie haben die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots\ldots & i & \ldots\ldots & j & \ldots\ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots\ldots & j & \ldots\ldots & i & \ldots\ldots & n \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen diese Permutation mit $(i\,j)$. Z.B. in S_7 bezeichnet $(2\,3)$ die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7. \end{pmatrix}$$

II. **Zyklen:** Der Zyklus $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$ in S_n ist die Permutation, die i_1 in i_2, i_2 in $i_3, \ldots, i_{k-1}$ in i_k und i_k in i_1 überführt.

Z.B. in S_7 bezeichnet $(2\,3\,6)$ die Permutation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Zwei Zyklen $(i_1, \ldots, i_k)$, $(j_1, \ldots, j_r)$ sind **disjunkt**, falls sie keine gemeinsamen Elemente haben. Z.B. sind $(2\,3\,6)$, $(4\,5\,7)$ disjunkt in S_7, $(2\,3\,6)$, $(2\,4\,5)$ nicht.

Wir werden jetzt beweisen, daß jede Permutation als Produkt von disjunkten Zyklen darstellbar ist. Betrachten wir zunächst die Permutation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 10 & 9 & 4 & 6 & 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir fangen mit dem Element 1 an und wenden wiederholt die Permutation an. Das liefert den Zyklus $(1\,5\,4\,9)$. Diese Prozedur wird wiederholt, indem wir mit einer Zahl (z.B. 2), die nicht in $(1\,5\,4\,9)$ vorkommt, anfangen. Wir bekommen den Zyklus $(2\,7\,8)$. Ähnlicherweise bekommen wir die Zyklen $(3\,10)$, (6). Das liefert die Faktorisierung

$$(1\,5\,4\,9) \quad (2\,7\,8) \quad (3\,10) \quad (6)$$

(Bemerkung: disjunkte Zyklen kommutieren.)

Satz: Jede Permutation in S_n ist darstellbar als ein Produkt von disjunkten Zyklen.

Korollar: Jede Permutation ist darstellbar als Produkt von Transpositionen.

Beweis: Nach dem letzten Satz genügt es, zu zeigen, daß jeder Zyklus diese Eigenschaft hat. Aber

$$(i_1 \ldots i_k) = (i_1\, i_k)(i_1\, i_{k-1}) \ldots (i_1\, i_2).$$

In der Sprache der Gruppentheorie heißt dieses Ergebnis, daß die Transpositionen die ganze Gruppe S_n erzeugen.

N.B. Die obige Darstellung einer Permutation als Produkt von Transformationen ist nicht eindeutig!

Beispiel: Bestimme eine Darstellung der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 10 & 9 & 4 & 6 & 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Transpositionen.
Die Permutation $= (1\,5\,4\,9)(2\,7\,8)(3\,10)(6) = (1\,9)(1\,4)(1\,5)(2\,8)(2\,7)(3\,10)$.

Man kann die Permutationen folgendermaßen darstellen: Wir bezeichen die Zeilen der Einheitsmatrix mit $E_1, \dots, E_n$. D.h. E_i ist die $1 \times n$ Matrix $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ (1 am i-ten Platz). Sei jetzt π eine Permutation – E_π ist dann die Matrix

$$\begin{bmatrix} E_{\pi^{-1}(1)} \\ \vdots \\ E_{\pi^{-1}(n)} \end{bmatrix}$$

d.h. die Zeilen von I_n werden von π permutiert. E_π heißt eine **Permutationsmatrix.** (N.B. eine Matrix A ist genau dann eine Permutationsmatrix, wenn die Elemente von A entweder 1 oder 0 sind und es in jeder Zeile bzw. Spalte genau ein 1 gibt.) Linksmultiplikation mit E_π führt eine Matrix A in die Matrix A_π, die man bekommt, wenn man die Zeilen von A nach π permutiert d.h.

$$E_\pi A = \begin{bmatrix} A_{\pi^{-1}(1)} \\ \vdots \\ A_{\pi^{-1}(n)} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt, daß $E_\pi \cdot E_{\pi_1} = E_{\pi \circ \pi_1}$ für zwei Permutationen π, π_1.

Definition: Der **Charakter** einer Permutation π ist die Determinante $\det E_\pi$ der entsprechenden Permutationsmatrix. Es gilt:
a) $\varepsilon_\pi = +1$ oder -1. (π heißt **gerade**, falls $\varepsilon_\pi = 1$, **ungerade** falls $\varepsilon_\pi = -1$);
b) $\varepsilon_{\pi \circ \pi_1} = \varepsilon_\pi \varepsilon_{\pi_1}$;
c) ε_π ist gerade, falls man π als Produkt einer geraden Zahl von Transpositionen darstellen kann;
d) falls $\pi = (i_1, \dots, i_r)$ ein Zyklus ist, dann gilt $\varepsilon_\pi = (-1)^{r-1}$ (denn

$$(i_1, \dots, i_r) = (i_1\, i_r)(i_1 \dots i_{r-1}).$$

Daher gilt $\varepsilon_\pi = -\varepsilon_{\pi_1}$ wobei $\pi_1 = (i_1 \dots i_{r-1})$).

Beispiel: Berechne ε_π wobei

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 10 & 9 & 4 & 6 & 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\pi = (1\,5\,4\,9)(2\,7\,8)(3\,10)$
Daher gilt: $\varepsilon_\pi = (-1)^3(-1)^2(-1) = 1$
oder: $\pi = (1\,9)(1\,4)(1\,5)(1\,8)(2\,7)(3\,10)$.
Das sind 6 Zyklen – also gilt $\varepsilon_\pi = 1$.

Wir bringen jetzt eine Diskussion der Symmetriegruppen der Platonischen Körper. Aus allgemeinen Überlegungen können wir uns auf dem Tetraeder, dem Oktaeder und dem Ikosaeder beschränken.

I. **Die Drehungsgruppe des Tetraeders:**
Wir betrachten den Tetraeder mit Ecken

$$A = (1, 1, 1), B = (-1, -1, 1), C = (1, -1, 1), D = (-1, 1 - 1)$$

Es gibt zwei Arten von Drehungen, die den Tetraeder in sich selbst überführen.
1. Eine Drehung um 120 Grad bzw. 240 Grad an einer Achse zwischen einer Ecke und dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Flächen. Es gibt vier solche Achsen – also insgesamt 8 Drehungen;
2. Eine Drehung um 180 Grad an einer Achse durch die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Seiten. Es gibt drei solche Achsen – also insgesamt 3 Drehungen.
Die Gruppe T_{12} der Drehungen hat daher $8 + 3 + 1$ (die Identität) $= 12$ Elemente.
T_{12} besitzt 3 zyklische Teilgruppen von der Ordnung 2, 4 zyklische Teilgruppen der Ordnung 3.
Es gibt eine interessante Beziehung zwischen der Drehungsgruppe des Tetraeders und Permutationsgruppen. Jede Drehung induziert eine Permutation der Ecken. Bezeichnen wir die Ecken A, B, C, D mit $1, 2, 3, 4$ so sehen wir, daß die Drehungen von Typ 1 die folgenden Permutationen induzieren:

$$(2\,3\,4), (2\,4\,3), (1\,3\,4), (3\,1\,4), (1\,2\,4), (2\,1\,4), (1\,2\,3), (2\,1\,3).$$

Die Drehungen vom Typ 2 entsprechen den Permutationen:

$$(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3).$$

Das sind alle geraden Permutationen in S_4. Daher gilt:

Satz: Die Gruppe T_{12} der Tetraederdrehungen ist isomorph zu der Gruppe A_4 der geraden Permutationen in S_4.

Die allgemeine Isometrie, die den Tetraeder in sich selbst überführt, bekommt man durch Zusammensetzung einer Drehung aus T_{12} und einer Spiegelung an einer der Symmetrieebenen des Tetraeders. Daher hat T_{24}, die **Tetraedergruppe**, 24 Elemente. Da eine solche Spiegelung eine ungerade Permutation induziert, sind T_{24} und S_4 isomorph.

II. **Die Oktaedergruppe:**
Zunächst betrachten wir die Gruppe O_{24} der Drehungen des Oktaeders. Sie hat 24 Elemente der folgenden Typen:
1. Drehungen um 90 Grad, 180 Grad und 270 Grad an den Achsen durch zwei gegenüberliegenden Ecken. Das sind insgesamt $3 \times 3 = 9$ Drehungen.
2. Drehungen um 120 Grad bzw. 240 Grad an Achsen durch die Mittelpunkte von gegenüberliegenden Flächen. Das liefert 8 Drehungen.
3. 6 Drehungen um 180 Grad an Achsen durch die Mittelplunkte von gegenüberliegenden Seiten.
Insgesamt haben wir $9 + 8 + 6 + 1 = 24$ Drehungen. O_{16} hat daher 3 zyklische Teilgruppen ($\cong C_4$), 4 zyklische Teilgruppen ($\cong C_3$) und 6 zyklische Teilgruppen ($\cong C_2$).

Die volle Symmetriegruppe O_{48} bekommt man durch Zufügen einer Speigelung und seine Zusammensetzungen mit den Elementen von O_{24}. Sie hat daher 48 Elemente.

III. **Die Ikosaedergruppe:**
Die Drehungsgruppe des Ikosaeders hat 60 Elemente:
1. 6×4 Drehungen um 72, 144, 216, 288 Grad an den (6) Achsen durch gegenüberliegenden Seiten.
2. Die Drehungen um 180 Grad durch die 15 Achsen zwischen den Mittelpunkten von gegenüberliegenden Seiten.
3. 10×2 Drehungen um 120 bzw. 240 Grad an den Achsen durch die Mittelpunkte von gegenüberliegenden Seitenflächen.
Insgesamt haben wir $15 + 24 + 20 + 1 = 60$ Drehungen. Daraus folgt wie oben, daß die Ikosaedergruppe 120 Elemente hat.

A.3. Komplexe Zahlen

Auf komplexe Zahlen ist CARDANO bei der Lösung der kubischen Gleichung gestoßen. Am Anfang herrschte Verwirrung über die Natur der komplexen Zahlen. Man verwendete ein Symbol i mit der Eingenschaft $i^2 = -1$ und rechnete formal mit Ausdrücken der Gestalt $x + iy$ (vgl. ein Zitat von LEIBNITZ: "Die imaginären Zahlen sind eine freie und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein). Erst im 19. Jahrhundert erreichte man durch folgende geometrische Interpretation, die von GAUSZ stammt, eine klare Fassung des Wesens der komplexen Zahlen: man identifiziert die reellen Zahlen mit den Punkten der x-Achse einer Koordinatenebene. Die Zahl i wird mit dem Punkt $(0, 1)$ und dementsprechend die Zahl $z = x + iy$ mit dem Punkt (x, y) indetifiziert. Die arithmetische Operationen der Addition und Multiplikation interpretiert man folgendermaßen. (Bild 10)

Dies führt zum folgenden Zugang zu den komplexen Zahlen. Eine **komplexe Zahl** ist ein Element (x, y) in $\mathbf{R}^2$. Auf die Menge $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen führt man zwei algebraische Operationen ein:
Addidition: $(x, y) + (x_1, .y_1) = (x + x_1, y + y_1)$;
Multiplikation: $(x, y)(x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1y)$.

Wir machen folgende Vereinbarungen:
1) Mit i bezeichnen wir die komplexe Zahl $(0, 1)$.
Wir identifizieren eine reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$. Es gilt daher $i^2 = -1$ und jede komplexe Zahl z hat eine eindeutige Darstellung $x + iy\,(x, y \in \mathbf{R})$. x heißt der **Realteil** von z (geschrieben Re z), y der **imaginäre Teil** (geschrieben Im z).

2) Falls $z = x + iy$ eine komplexe Zahl ist, dann ist $\overline{z} = x - iy$ die **komplex- konjugierte** von z.
Es gilt: $\operatorname{Re} z = \dfrac{(z + \overline{z})}{2}, \operatorname{Im} z = -i\dfrac{(z - \overline{z})}{2}$
$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
wobei $|z|$ (der **Absolutbetrag** von z) als $\sqrt{x^2 + y^2}$ definiert wird.

3) Jede komplexe Zahl $z(\neq 0)$ hat eine eindeutige Darstellung $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(\rho > 0, \theta \in$

$[0, 2\pi[)$ wobei $\rho = |z|$. Der Winkel θ heißt **Argument** von z.

Satz: Die komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ bilden einen Körper, d.h.
1) $\mathbf{C}$, mit Addition, ist eine kommutative Gruppe;
2) $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, mit Multiplikation, sit eine kommutative Gruppe;
3) Multiplikation ist distributiv über Addition d.h.

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}).$$

Beweis: Durch Nachrechnen. Wir erwähnen nur, daß die Inverse von $z = x + iy \quad (\neq 0)$ die komplexe Zahl

$$\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

ist.

Eine Eigenschaft von komplexen Zahlen, die für uns besonders wichtig sein wird, ist die Tatsache, daß nicht-konstante komplexe Polynome immer Nullstellen haben. Genauer:

Satz (Fundamentalsatz der Algebra):
Sei

$$p(\lambda) = a_0 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

ein komplexes Polynom mit $n \geq 1$. Dann gibt es komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sodaß

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$$

Da es keinen einfachen und elementaren Beweis für diesen Satz gibt, wollen wir auf einen Beweis verzichten (siehe Vorlesung "Funktionentheorie").

Aus diesem Ergebnis können wir sofort den folgenden Satz für reelle Polynome gewinnen:

Satz: Sei $p(t) = a_0 + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Dann hat p eine Darstellung der Gestalt:

$$p(t) = (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_r)(t^2 + b_1 t + c_1) \ldots (t^2 + b_s t + c_s)$$

wobei $2s + r = n$.

Beweis: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die (komplexe) Nullstellen des Polynoms:

$$p(\lambda) = a_0 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

Da $p(\overline{\lambda}) = \overline{p(\lambda)}$ (die Koeffizienten sind reell), gilt: λ eine Nullstelle $\Leftrightarrow$ $\overline{\lambda}$ eine Nullstellen. Daher können wir die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in der folgenden Gestalt schreiben:
Zunächst die reellen Nullstellen $t_1, \ldots, t_r$; dann die komplexen Nullstellen in komplex-konjugierten Paaren $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_s + i\beta_s, \alpha_s - i\beta_s$. Daher gilt:

$$p(t) = (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_r)(t - \alpha_1 - i\beta_1)(t - \alpha_1 + i\beta_1) \ldots (t - \alpha_s - i\beta_s)(t - \alpha_s + i\beta_s)$$

$$= (t-t_1)\dots(t-t_r)\big(t^2-2\alpha_1 t+(\alpha_1^2+\beta_1^2)\big)\dots\big(t^2-2\alpha_s t+(a_s^2\beta_s^2)\big)$$

wie zu beweisen war (wähle $b_i = -2\alpha_i, c_i = \alpha_i^2+\beta_i^2$).

Bruchzerlegungen: Eine wichtige Anwendung von diesen Ergebnissen ist die Existenz von einfachen Darstellungen für rationale Funktionen (d.h. Quotienten von Polynomen), die sowohl in der Theorie als auch in den Anwendungen wichtig sind. Wir betrachten eine rationale Funktion p/q wobei p, q komplexe Polynome mit Grad $p <$ Grad q sind.
Wir nehmen zunächst an, daß q einfache Nullstellen hat d.h.

$$q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschieden sind.

Behauptung: Es gibt eindeutig bestimmte komplexe Zahlan $a_1, \dots, a_n$, sodaß

$$\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \frac{a_1}{\lambda-\lambda_1} + \dots + \frac{a_n}{\lambda-\lambda_n} \tag{A}$$

$\big(\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}\big)$.

Beweis: (A) ist gleichbedeutend mit der Gleichung:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = a_1(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n) + a_2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)\dots(\lambda-\lambda_n) \\ \dots a_n(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_{n-1}). \end{aligned}$$

Daraus sieht man, daß die a_i folgendermaßen bestimmt werden müssen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{p(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)\dots(\lambda_1-\lambda_n)} \\ a_2 &= \frac{p(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\dots(\lambda_2\lambda_n)} \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{p(\lambda_n)}{(\lambda_n-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_{n-1})} \end{aligned}$$

Das allgemeine Ergebnis (d.h. wenn q mehrfache Nullstellen besitzt) ist etwas komplizierter zu formulieren. Wir nehmen an, daß

$$q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\dots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

wobei die λ_i verschieden sind. Wir behaupten:
Es gibt komplexe Zahlen $a_1^1, a_2^1, \dots, a_{n_1}^1, a_1^2, \dots, a_{n_2}^2, \dots, a_1^r, \dots, a_{n_r}^r$, sodaß

$$\begin{aligned} \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \frac{a_1^1}{\lambda-\lambda_1} + \frac{a_2^1}{(\lambda-\lambda_1)^2} + \dots + \frac{a_{n_1}^1}{(\lambda-\lambda_1)^{n_1}} + \frac{a_1^2}{\lambda-\lambda_2} + \dots + \frac{a_{n_2}^2}{(\lambda-\lambda_2)^{n_2}} \\ + \dots + \frac{a^{r_1}}{\lambda-\lambda_r} + \dots + \frac{a^{r_{n_r}}}{(\lambda-\lambda_r)^{n_r}} \end{aligned}$$

Beweis: $\dfrac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \dfrac{p(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{n_1} q_1(\lambda)}$ wobei $q_1(\lambda) = (\lambda-\lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda-\lambda_r)^{n_r}$.

Wir behaupten: Es gibt ein Polynom $p_1(\lambda)$ mit Grad $p <$ (Grad q) und $a \in \mathbf{C}$, sodaß

$$\frac{p(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{n_1} q_1(\lambda)} = \frac{a}{(\lambda-\lambda_1)^{n_1}} + \frac{p_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{n_1^{-1}} a_1(\lambda)}$$

d.h.

$$\frac{p(\lambda) - aq_1(\lambda)}{q(\lambda)} = \frac{p_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{n_1^{-1}} q(\lambda)}$$

Dazu wählen wir $a \in \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft, daß $p(\lambda) - aq_1(\lambda)$ einen Faktor $(\lambda - \lambda_1)$ enthält, d.h. $a = p(\lambda_1)/q_1(\lambda_1)$.
Wir können jetzt einen Induktionsbeweis durchführen.

Komplexe Vektorräume:
In der Entwicklung der Theorie von Vektorräumen bzw. linearen Abbildungen, haben wir nie die besondere Gestalt der reellen Zahlen verwendet, sondern nur die arithmetischen Eigenschaften, die in der Definition von einem Körper vorkommen. Daher kann man die Theorie auf Vektorräume über einen willkürlichen Körper verallgemeinern und solche Verallgemeinerungen spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle. Für unsere Zwecke genügt es, die Theorie auf Vektorräume über $\mathbf{C}$ zu erweitern. Alle Definitionen, Beweise (und daher Sätze) aus den Kapiteln III und IV lassen sich *mutatis mutandis* auf diesen Fall übertragen. Um den Einstieg in die Theorie der komplexen Vektorräume zu erleichtern, geben wir einige Definitionen explizit an.

Definition: Ein **komplexer Vektorraum** (oder **Vektorraum** über **C**) ist eine Menge V, zusammen mit zwei Operationen
Addition:

$$\begin{aligned} V \times V &\to V \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \times V &\to V \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

sodaß die folgenden Axiome erfüllt sind.

1) $x + (y + z) = (x + y) + z \quad (x, y, z \in V)$;
2) $x + y = y + x \quad (x, y \in V)$;
3) es existiert $0 \in V$, sodaß $x + 0 = x \quad (x \in V)$;
4) $x + (-x) = (-x) + x = 0$ wobei $-x := (-1)x$;
5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{C}, x \in V)$;
6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad (\lambda \in \mathbf{C}, x, y \in V)$;
7) $1x = x \quad (x \in V)$.

Beispiele: Die folgende Menge, mit den natürlichen Operationen (d.h. wie im reellen Fall), bilden komplexe Vektorräume:
$\mathbf{C}^n$ – die Menge aller n-Tupeln von komplexen Zahlen;
$\mathrm{Pol}_{\mathbf{C}}(n)$ – die Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$, mit komplexen Koeffizienten;
$M^{\mathbf{C}}_{m,n}$ – die Menge aller komplexen $m \times n$ Matrizen (d.h. Matrizen mit komplexen Zahlen als Elemente).

Definition: Eine Teilmenge $x_1, \dots, x_n$ vom V ist **linear abhängig**, falls es nicht triviale Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (in $\mathbf{C}$) gibt, sodaß

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0.$$

Sonst ist sie **linear unabhängig**.

Eine **Basis** für V ist eine Menge $(x_1, \dots, x_n)$, die
a) linear unabhängig ist
b) V aufspannt (d.h. jedes $x \in V$ ist Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n (\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C})$ der x_i).
In diesem Fall heißt V **n-dimensional** (geschrieben $\dim V = n$).

Eine Abbildung $f \colon V \to V_1$ ist **linear**, falls
a) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in V)$;
b) $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad (\lambda \in \mathbf{C}, x \in V)$.

Falls $(x_1, \dots, x_n)$ bzw. $(y_1, \dots, y_m)$ Basen für B bzw. für V_1 sind, dann existiert eine $m \times n$ Matrix $[a_{ij}]$ in $M^{\mathbf{C}}_{m,n}$ sodaß

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j\right) y_i$$

$A = [a_{ij}]$ ist **die Matrix von f bzgl.** (x_i) bzw. (y_j).

Bemerkung: Jeder komplexer Vektorraum ist ein reeller Vektorraum – man vergißt einfach, daß man mit komplexen Zahlen multiplizieren kann. Allerdings hat etwa $\mathbf{C}^n$ die Dimension n (als komplexer Raum) aber Dimension $2n$ als reeller Raul!