DISTRIBUTIONEN

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Distributionen, mit deren Hilfe eine Legalisierung idealisierter Begriffe wie Punktladung, Punktmasse, Einzelkraft, Linienkraft, Impulsfunktionen,... sowie damit in Verbindung stehender Rechenoperationen erreicht wurde, kann man heute zum mathematischen Allgemeingut rechnen. Trotzdem wird heute noch vielfach empirisch mit den oben genannten physikalischen Größen und Distributionen im allgemeinen gearbeitet, und die Kenntnis der exakten mathematischen Theorien ist auf einen relativ kleinen Kreis von Anwendern beschränkt. Es gibt verschiedene Zugänge zur Theorie der Distributionen. Der bekannteste Zugang ist jener von Schwartz, der jedoch auf der Theorie der Funktionalanalysis aufbaut, die wieder nur den reinen Mathematikern vorbehalten ist. Hier wird der weitgehend unbekannte Zugang von Silva gewählt, der im großen und ganzen mit den Begriffen der Analysis 1 und etwas linearer Algebra auskommt. Der Text ist so aufgebaut, daß sich der Leser mit der eindimensionalen Theorie ausführlich vertraut machen kann. Die mehrdimensionale Theorie ist zur Information nur kurz dargeboten. Der Text endet mit einer Formulierung der Theorie der Fourierreihen und der Fourier - Transformation von Distributionen, sowie mit einigen Anwendungen aus Physik und Technik.

Kapitel 1

Axiome der Distributionentheorie

1.1 Notation

Im folgenden sei I ein kompaktes Intervall in $\mathbf{R}$. Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- $C(I)$...Vektorraum der stetigen Funktionen auf I. (Wird oft auch als $C^0(I)$ bezeichnet).
- $C^n(I)$...Vektorraum der $n-mal$ stetig differenzierbaren Funktionen auf I.
- $C^\infty(I)$...Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf I.
- $P_n(I)$...Menge der Polynome auf I mit Rang kleiner oder gleich n.

Bei einigen Definitionen wird die Schreibweise mit den Quantoren $\bigvee$ ('es gibt') und $\bigwedge$ ('für alle') bevorzugt.

- $\bigvee\limits_x A(x)$...Es existiert (zumindest) ein x, so daß $A(x)$ wahr ist.
- $\bigwedge\limits_x A(x)$...$A(x)$ ist für alle x wahr.

Folgende Operatoren werden des öfteren benötigt:

Differentiationsoperator: Der klassische (stetige, lineare) Differentiationsoperator D ordnet jeder Funktion $x \in C^1(I)$ bzw. $x \in C^{n+1}(I)$ ihre Ableitung $x' \in C(I)$ bzw. $x' \in C^n(I)$ zu. Allgemeiner kann D auch als Operator von $C^\infty(I)$ in sich selbst betrachtet werden.

Integrationsoperator: Es sei a ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Intervall I und x eine auf I stetige Funktion. Die Funktion

$$X(t) = \int_a^t x(\tau)d\tau \tag{1.1}$$

ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion von x. Mit dem Integraloperator

$$J_a : x \to \left(t \to \int_a^t x(\tau) d\tau \right), \tag{1.2}$$

der der stetigen Funktion x die in a verschwindende Stammfunktion zuordnet kann man auch $X = J_a x$ schreiben. X ist stetig differenzierbar und es gilt $DX = x$. Der auftretende Integraloperator J_a beschreibt somit eine Abbildung von $C(I)$ nach $C^1(I)$. J_a kann allgemeiner als ein Operator von $C^n(I)$ nach $C^{n+1}(I)$ bzw. von $C^\infty(I)$ in sich selbst betrachtet werden. Der Integraloperator ist eine rechte Inverse von D, es gilt

$$DJ_a x = x \qquad \text{bzw.} \qquad D \circ J_a = Id. \tag{1.3}$$

Andererseits ist $J_a \circ D$ nicht die identische Abbildung, es gilt

$$J_a D x = x - x(a). \tag{1.4}$$

Kommt es nicht auf die spezielle Wahl des dem Integraloperator zugrundeliegenden Punktes a an, so schreibt man oft nur J anstatt J_a.

Einschränkung: Sind I und J kompakte Intervalle mit $J \subset I$, so ist die Einschränkung einer auf I stetigen Funktion auf das Intervall J eine lineare, stetige Abbildung von $C(I)$ nach $C(J)$. Diese Abbildung wird mit $\rho_{I,J}$ bezeichnet und kann auch als Operator von $C^n(I)$ nach $C^n(J)$ bzw. von $C^\infty(I)$ nach $C^\infty(J)$ betrachtet werden.

Verschiebung: Ist x eine stetige Funktion auf I und h eine reelle Zahl, dann ist die Abbildung

$$\tau_h : x \to (t \to x(t-h)) \tag{1.5}$$

ein linearer, stetiger Operator von $C(I)$ nach $C(I+h)$. τ_h kann auch als Operator von $C^n(I)$ nach $C^n(I+h)$ bzw. von $C^\infty(I)$ nach $C^\infty(I+h)$ betrachtet werden.

1.2 Äquivalenzklassen

Bei der Einführung des Distributionenraumes $C^{-\infty}(I)$ in den nächsten Abschnitten werden die Begriffe Äquivalenzklassen und Äquivalenzrelationen eine entscheidende Rolle spielen. Es wird daher hier eine Definition dieser Begriffe angegeben.

Um eine Übersicht über eine große und vielleicht komplizierte Gesamtheit mathematischer Objekte zu erhalten, ist es oft notwendig, gewisse in dem Zusammenhang unwesentliche Eigenschaften dieser Objekte zu ignorieren und sich dann um eine Übersicht (Klassifikation) darüber zu bemühen, wie viele und welche wesentlich verschiedenen Objekte vorkommen. Welche Eigenschaften man dabei als 'wesentlich' und welche als 'unwesentlich' betrachtet, hängt davon ab, welche Art von Übersicht man gewinnen möchte.

Die Vorgangsweise in der folgenden mathematischen Formulierung dieser Gedanken sei kurz zusammengefaßt: Man geht davon aus, daß die zu klassifizierenden Objekte eine Menge M bilden. Diese Menge M wird in der Folge in disjunkte Teilmengen zerlegt, deren Vereinigung wieder M ergibt. Alle Elemente aus M, die man als 'wesentlich gleich' betrachten möchte, werden dann ein und derselben Teilmenge von M zugeordnet. Für weitere Überlegungen betrachtet man dann nicht mehr die einzelnen Elemente von M, sondern die entsprechenden Teilmengen, die jede eine Menge 'wesentlich gleicher' Elemente beinhaltet.

Begriffsbildungen

Es sei M eine Menge. Eine Eigenschaft R von Paaren $(x, y) \in M \times M = M^2$ wird **Relation** in M genannt. Durch die Relation R wird eine Untermenge von M^2 definiert, nämlich die Menge aller Paare (x, y), denen die Eigenschaft R zukommt. Ähnlich wie bei einer Funktion und ihrem Graphen sind eine Relation und die durch sie definierte Menge zwei äquivalente Begriffe, und man kann eine Relation R auch definieren als eine Teilmenge von M^2. Beispiele für Relationen in $\mathbf{R}$ sind (i) die Kleiner - Relation $x < y$ oder (ii) die Gleichheitsrelation $x = y$.

Definition 1.1 *Unter einer* **Äquivalenzrelation** *auf M versteht man eine Relation (also formal eine Teilmenge $R \subseteq M^2$, aber statt $(x, y) \in R$ schreibt man $x \sim y$ und spricht von der 'Äquivalenzrelation $\sim$'), welche für alle $x, y, z \in M$ folgende Bedingungen erfüllt:*

(1) Reflexivität: $x \sim x$

(2) Symmetrie: $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

(3) Transitivität: $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Von den angegebenen Beispielen ist (ii) eine Äquivalenzrelation.

Definition 1.2 *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Für $x \in M$ heißt die Teilmenge*

$$[x] := \{y \mid x \sim y\} \subseteq M \tag{1.6}$$

die **Äquivalenzklasse** *von x bezüglich $\sim$. Die Menge*

$$M/\sim := \{[x] \mid x \in M\} \tag{1.7}$$

der Äquivalenzklassen nennt man den **Quotienten** *von M nach $\sim$.*

Es gilt nun der folgende wichtige

Satz 1.1 *Die Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen bildet ein System von Teilmengen von M, deren je zwei disjunkt sind und deren Vereinigung ganz M ist.*

Jede in einer Menge M erklärte Äquivalenzrelation $\sim$ definiert somit eine eindeutig bestimmte Einteilung von M in paarweise elementfremde, nicht leere Teilmengen (Äquivalenzklassen) derart, daß alle Elemente ein und derselben Klasse untereinander äquivalent sind und jeweils Elemente aus verschiedenen Teilmengen nicht äquivalent sind. Es gilt auch die Umkehrung, dazu der

Satz 1.2 *Zu jeder Einteilung einer Menge M in zueinander disjunkte, nicht leere Teilmengen läßt sich eine Äquivalenzrelation definieren, bezüglich der die vorgegebene Einteilung von M die Einteilung in Äquivalenzklassen ist.*

Obwohl natürlich häufig M unendlich viele Elemente hat und $\sim$ die Menge in unendlich viele Äquivalenzklassen 'zerlegt', kann man sich ruhig vorstellen, daß es i. a. viel weniger Äquivalenzklassen als Elemente in M gibt.

Die Wahl einer Äquivalenzrelation auf M ist nun die Formalisierung der Wahl des Gesichtspunktes, unter dem man eine Übersicht (Klassifikation) über M gewinnen möchte: $x \sim y$ ist die Formalisierung von 'x und y sind im wesentlichen gleich'. Nur wenn x und y aus zwei verschiedenen Äquivalenzklassen kommen, werden sie also als 'verschieden' betrachtet.

1.3 Formulierung der gewünschten Axiome

Gesucht ist nun eine Erweiterung der üblichen 'punktweisen' Funktions- und Differentiationsbegriffe, sodaß etwa auch Ableitungen von unstetigen Funktionen betrachtet werden können. Es wird vorerst mit der Definition von Distributionen bzw. Distributionenräumen auf einem kompakten Intervall I begonnen. Dazu folgt eine abstrakte Definition eines 'Distributionenraumes' mit den Eigenschaften, die man sich von so einem Raum erwartet bzw. wünscht.

Definition 1.3 *Ein* **Distributionenraum** *auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ ist ein Vektorraum $E \supset C(I)$ zusammen mit einer linearen Abbildung $\widetilde{D} : E \to E$, die in der Folge als* **distributionelle Ableitung** *bezeichnet wird, sodaß die Axiome*

(A1) falls $x \in C^1(I)$ dann gilt $\widetilde{D}x = Dx$

(A2) falls $x \in E$, dann existiert ein $n \in \mathbf{N}$ und ein $X \in C(I)$, sodaß $x = \widetilde{D}^n X$

(A3) falls $x \in E$ und $\widetilde{D}^p x = 0$, dann ist $x \in P_{p-1}(I)$

gelten.

Die Menge der stetigen Funktionen $C(I)$ ist also eine Teilmenge der Menge der Distributionen (oder in anderen Worten: Distributionen sind verallgemeinerte Funktionen). Anders als für eine beliebige Funktion aus $C^1(I)$ ist die distributionelle Ableitung einer Distribution wieder distributionell differenzierbar. Nach Axiom 1 stimmen für Funktionen aus $C^1(I)$ die klassische und die distributionelle Ableitung überein. Axiom 2 besagt, daß jede Distribution durch distributionelle Ableitungen einer stetigen Funktion hervorgeht. Für glatte Funktionen gilt die Aussage: $f^{(n)}(t) = 0 \Rightarrow f(t) \in P_{n-1}(I)$. Diese Aussage wird in der hier vorgestellten Distributionentheorie als Axiom übernommen (Axiom 3). Eine Folgerung dieses Axioms ist die Tatsache, daß wenn eine Differentialgleichung klassische Lösungen besitzt, keine zusätzlichen distributionellen Lösungen auftreten.

An dieser Stelle ist jedoch keineswegs klar, ob es überhaupt ein Modell gibt, das diese Axiome erfüllt, und falls ein Modell existiert, ob es eindeutig bestimmt ist. Es sei vorerst vorweggenommen, daß in der Tat ein solches Modell existiert und daß es bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

1.4 Ein die Axiome erfüllendes Modell

Es sei an die Folge

$$C^\infty \subset ... \subset C^{n+1} \subset C^n \subset ... \subset C$$

von Funktionenräumen erinnert, in der D für jedes $n \in \mathbf{N}$ ein stetiger, linearer Operator von C^{n+1} nach C^n ist. Dieses Schema wird jetzt rechts in der Form

$$C^\infty \subset ... \subset C^n \subset ... \subset C \subset ... \subset C^{-n} \subset C^{-(n+1)} \subset ... \subset C^{-\infty}$$

erweitert. Dabei wird C^{-n} aus jenen Distributionen bestehen, die sich aus der *n.ten* Ableitung stetiger Funktionen ergeben.

Vorbereitende Bemerkungen:

Um den ersten Raum C^{-1} zu konstruieren wird von der Menge $C(I)\times C(I)$ der geordneten Paare (x_0, x_1) mit $x_0, x_1 \in C(I)$ ausgegangen. Dabei soll eine Funktion (hier x_0) als Repräsentation ihrer selbst betrachtet werden, wenn sie an der ersten Position des Paares steht. Andererseits soll die Funktion an der zweiten Stelle (hier x_1) eine Distribution - und zwar die Ableitung der Funktion x_1 (was immer das an dieser Stelle sein mag) - repräsentieren. So eine Darstellung wird jedoch nicht eindeutig sein. Auf dem Intervall $I = [0, 1]$ repräsentieren etwa die Paare $(t, 0), (0, t^2/2)$ und $(t/2, t^2/4)$ die gleiche Distribution. Dies ergibt sich aus der Forderung $D = \widetilde{D}$ für stetig differenzierbare Funktionen und der saloppen Formulierung der Bedeutung der Funktionen x_0 und x_1 in dem zu definierenden Distributionenmodell. Um diese Schwierigkeit zu beseitigen könnte man zwei geordnete Paare (x_0, x_1) und (y_0,y_1) mit der Eigenschaft

$$(y_0 - x_0) + D(y_1 - x_1) = 0 \tag{1.8}$$

als äquivalent betrachten und mit dieser Äquivalenzrelation die Menge aller geordneten Paare stetiger Funktionen in Klassen einteilen. Eine Klasse wäre dann mit einer Distribution zu identifizieren. Der Operator D ist jedoch auf $C(I)$ nicht überall definiert. Aus diesem Grund ist es besser Gl. 1.8 zu integrieren. Man erhält dann die Bedingung

$$(x_0, x_1) \sim (y_0,y_1) \Leftrightarrow J(y_0 - x_0) + (y_1 - x_1) = const \tag{1.9}$$

mit dem Integrationsoperator J. Das führt zur Definition

$$C^{-1}(I) := C(I) \times C(I)/\sim, \tag{1.10}$$

die unabhängig von der speziellen Wahl des Punktes a im Integrationsoperator ist.

Diese Definition kann leicht erweitert werden um den Raum $C^{-2}(I)$ zu erhalten. Man definiert in Anlehnung an Gl. 1.9 die Äquivalenzrelation

$$(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0,y_1, y_2) \Leftrightarrow J^2(y_0 - x_0) + J(y_1 - x_1) + (y_3 - x_3) \in P_1(I) \tag{1.11}$$

und den Raum $C^{-2}(I)$ durch (vgl. Gl. 1.10)

$$C^{-2}(I) := C(I) \times C(I) \times C(I)/\sim . \tag{1.12}$$

Definition des allgemeinen Falls

Im allgemeinen Fall dienen als Ausgangspunkt $(n+1)$ - Tupel stetiger Funktionen. Es sei H_n die Menge aller $(n+1)$ - Tupel, also

$$H_n := \{(x_0, ..., x_n) \mid x_0, ..., x_n \in C(I)\} = (C(I))^{n+1}. \tag{1.13}$$

In dieser Menge wird nun eine Äquivalenzrelation $\sim$ derart erklärt, daß

$$(x_0, ..., x_n) \sim (y_0, ..., y_n) \tag{1.14}$$

genau dann gelten soll, wenn

$$J^n(x_0 - y_0) + J^{n-1}(x_1 - y_1) + ... + (x_n - y_n) \in P_{n-1}(I). \tag{1.15}$$

Dabei ist $J{:}x \to \left(t \to \int_a^t x(\tau)d\tau\right)$ wiederum der Operator, der der stetigen Funktion x die in a verschwindende Stammfunktion zuordnet. Der Raum $C^{-n}(I)$ wird dann definiert durch

$$C^{-n}(I) := H_n \big/ \sim . \tag{1.16}$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Integrationsoperators. Für eine Klasse x aus $C^{-n}(I)$ schreibt man üblicherweise $[(x_0, ..., x_n)]$, wobei $(x_0, ..., x_n)$ ein typischer Repräsentant dergleichen ist. Es gilt nun $(x_0, ..., x_n) \sim (y_0, ..., y_n)$ genau dann, wenn $(x_0, ..., x_n, 0) \sim (y_0, ..., y_n, 0)$. (Die erste Bedingung ist gleichwertig mit $J^n(x_0 - y_0) + J^{n-1}(x_1 - y_1) + ... + (x_n - y_n) \in P_{n-1}(I)$, die zweite mit $J^{n+1}(x_0 - y_0) + J^n(x_1 - y_1) + ... + J(x_n - y_n) \in P_n(I)$. Es ist klar, daß diese Bedingungen äquivalent sind). Die Abbildung

$$(x_0, ..., x_n) \to (x_0, ..., x_n, 0) \tag{1.17}$$

von $C^{-n}(I)$ nach $C^{-(n+1)}(I)$ ist daher injektiv und linear. Man sagt, daß $C^{-n}(I)$ in $C^{-(n+1)}(I)$ eingebettet ist. $C^{-n}(I)$ kann somit als Untervektorraum von $C^{-(n+1)}(I)$ betrachtet werden und es gilt die angekündigte Kette

$$C \subset C^{-1} \subset ... \subset C^{-n} \subset C^{-(n+1)} \subset ... \quad .$$

Es wird nun $C^{-\infty}(I)$ als Vereinigung all dieser Räume definiert, also

$$C^{-\infty}(I) := \bigcup_{n=0}^{\infty} C^{-n}(I). \tag{1.18}$$

$C^{-\infty}(I)$ wird als der **Raum der Distributionen auf** I bezeichnet. $C^{-n}(I)$ ist der **Raum der Distributionen der Ordnung n**. Jeder Klasse aus $C^{-n}(I)$ entspricht dabei eine Distribution und umgekehrt. (Eigentlich sind diese Bezeichnungen an dieser Stelle noch zu früh eingeführt, da noch gar nicht feststeht, ob dieser Raum tatsächlich die geforderten Axiome erfüllt, die Beweise folgen allerdings in Kürze). Auf dem Raum $C^{-\infty}(I)$ wird nun die distributionelle Ableitung eingeführt. Dazu die

Definition 1.4 *Es sei $(x_0, ..., x_n)$ ein (beliebiger) Repräsentant der Klasse $x = [(x_0, ..., x_n)]$ $\in C^{-n}(I)$. Man erklärt die* **distributionelle Ableitung** *$\widetilde{D}x$ von x dann durch die Abbildung $\widetilde{D} : C^{-n}(I) \to C^{-(n+1)}(I)$ mit*

$$\widetilde{D}x := [(0, x_0, ..., x_n)]. \tag{1.19}$$

Da diese Definition für beliebiges n gilt kann diese Abbildung auch als Operator von $C^{-\infty}(I)$ nach $C^{-\infty}(I)$ betrachtet werden.

Das Bild des Operators muß natürlich unabhängig von der Wahl des Repräsentanten sein. Man zeigt leicht, daß aus $(x_0, ..., x_n) \sim (y_0, ..., y_n)$ die Äquivalenz $(0, x_0, ..., x_n) \sim (0, y_0, ..., y_n)$ folgt, womit das Gewünschte erfüllt ist.

Die **Summe zweier Distributionen** (bzw. Klassen) und das **Produkt einer Distribution** (bzw. Klasse) **mit einem Skalar** wird komponentenweise durch beliebige Repräsentanten erklärt. Es kann wieder gezeigt werden, daß das Resultat einer solchen Operation unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten ist.

Die Behauptung ist nun, daß der so konstruierte Raum $C^{-\infty}(I)$ zusammen mit der Abbildung $\widetilde{D}$ der gesuchte Distributionenraum ist. Dazu muß die Gültigkeit der Axiome (A1) bis (A3) für dieses Modell gezeigt werden.

<u>Axiom 1:</u> Es muß gezeigt werden, daß für stetig differenzierbare Funktionen die distributionelle mit der klassischen Ableitung vertauscht werden kann, daß also die Äquivalenz

$$(Dx, 0) \sim (0, x) \tag{1.20}$$

gilt. Die Gültigkeit folgt aus $J(Dx - 0) + (0 - x) = const \in P_0(I)$.

Der folgende Satz bildet die Grundlage zum Beweis der Gültigkeit der Axiome (A2) und (A3):

Satz 1.3 *Eine Distribution $x = [(x_0, ..., x_n)]$ aus $C^{-n}(I)$ bleibt unverändert, wenn man eine Komponente integriert und gleichzeitig nach rechts verschiebt, es gilt also*

$$x = [(0, Jx_0 + x_1, x_2, ..., x_n)]. \tag{1.21}$$

Allgemeiner gilt

$$x = [(0, 0, ..., 0, J^n x_0 + J^{n-1}x_1 + ... + Jx_1 + x_0)]. \tag{1.22}$$

Eine Distribution bleibt unverändert, wenn man eine glatte Komponente differenziert und gleichzeitig nach links verschiebt.

<u>Beweis:</u> Wegen $J^n x_0 + (-J^{n-1}Jx_0) = J^n x_0 - J^n x_0 = 0 \in P_{n-1}$ gilt $(x_0, ..., x_n) \sim (0, Jx_0 + x_1, x_2, ..., x_n)$ und damit Gleichung 1.21. Setzt man diese Vorgangsweise fort, so erhält man auch Gl.(1.22).

<u>Axiom 2:</u> Es sei $x = [(x_0, ..., x_n)]$. Wählt man

$$X = J^n x_0 + J^{n-1}x_1 + ... + Jx_1 + x_0 \in C(I), \tag{1.23}$$

so gilt

$$\widetilde{D}^n X = [(0, 0, ..., 0, J^n x_0 + J^{n-1}x_1 + ... + Jx_1 + x_0)].$$

Mit Gl.(1.22) hat man also $x = \widetilde{D}^n X$. Somit kann man zu jeder Distribution x eine stetige Funktion X angeben, sodaß x durch $n - maliges$ distributionelles Differenzieren aus X entsteht.
Axiom 3: Es sei wieder $x = [(x_0, ..., x_n)]$ und es gelte zusätzlich $\widetilde{D}^p x = 0$. Die Aussage

$$\widetilde{D}^p x = [(0, ..., 0, x_0, ..., x_n)] = 0$$

(wobei x_0 an der *p.ten* Komponente auftritt) ist äquivalent mit

$$(0, ..., 0, x_0, ..., x_n) \sim (0, ..., 0)$$

was wiederum gleichwertig mit

$$J^{n+p}0 + ... + J^{n+1}0 + J^n x_0 + ... + x_n \in P_{n+p-1}$$

ist. Bei der Funktion $X = J^n x_0 + J^{n-1}x_1 + ... + Jx_1 + x_0$ handelt es sich jetzt also um ein Polynom. Mit den Überlegungen von oben gilt wieder $x = \widetilde{D}^n X$. Da X ein Polynom, also eine stetige Funktion ist, kann man wegen Axiom 1 die distributionelle mit der klassischen Ableitung vertauschen und es folgt $x = D^n X$. Aus $X \in P_{n+p-1}(I)$ folgt damit $x \in P_{p-1}(I)$, womit Axiom 3 gezeigt ist.

Mit diesem Modell ist somit der Beweis der Existenz eines Distributionenraumes nach Definition 1.3 gebracht.

1.5 Die Eindeutigkeit des Modells

Es wurde angekündigt, daß der Distributionenraum mit den Axiomen 1) bis 3) bis auf einen Isomorphismus eindeutig ist. Dazu vorerst die

Definition 1.5 *Es seien E und F lineare, normierte Vektorräume. Eine lineare, stetige und bijektive Abbildung $T : E \to F$, deren Inverse $T^{-1} : F \to E$ ebenfalls stetig ist, wird als* **Isomorphismus** *bezeichnet.*

Bei dem Distributionenraum $C^{-\infty}(I)$ handelt es sich um keinen normierten Raum. Trotzdem kann der Begriff einer *stetigen Abbildung* von $C^{-\infty}(I)$ in sich selbst oder in einen anderen Raum ähnlicher Struktur in natürlicher Form erweitert werden. Wie diese Erweiterung zu verstehen ist, wird in Kapitel 8.1 formuliert. Ansonsten kann obige Definition eines Isomorphismus direkt für Abbildungen zwischen Räumen mit Strukturen wie $C^{-\infty}(I)$ übernommen werden.

Satz 1.4 Eindeutigkeit: *Es sei $E = C^{-\infty}(I)$, also der im letzten Kapitel eingeführte Distributionenraum. Man nehme nun an, daß ein zweiter Distributionenraum E' mit einem Differentiationsoperator $\widetilde{D}'$ existiert, der ebenfalls die Axiome (1) bis (3) erfüllt. Dann existiert ein Isomorphismus $U : E \to E'$ mit den Eigenschaften:*

1. *für jedes $x \in C(I)$ gilt $Ux = x$*

2. *für alle $x \in E$ gilt $U(\widetilde{D}x) = \widetilde{D}'(Ux)$.*

<u>Beweis</u>**:** Es wird nun der Isomorphismus U mit den erwähnten Eigenschaften konstruiert. Es sei $x \in E$. Dann existiert eine Darstellung $x = \widetilde{D}^n X$ mit einer stetigen Funktion X auf I. Man definiere nun

$$Ux := \begin{cases} x & \text{für } x \in C(I) \\ \left(\widetilde{D}'\right)^n X & \text{sonst} \end{cases} . \tag{1.24}$$

Die Abbildung U erfüllt aufgrund ihrer Definition die Eigenschaften 1) und 2) des Satzes. Es muß daher nur noch gezeigt werden, daß es sich um eine Bijektion handelt.

- Da der Raum E' Axiom (A2) erfüllt, also jedes Element aus E' durch distributionelle Ableitung einer stetigen Funktion erzeugt werden kann, gilt $E' = U(E)$, somit ist U surjektiv.

- Es sei $x_1, x_2 \in E$ mit $x_1 = \widetilde{D}^n X_1$ und $x_2 = \widetilde{D}^n X_2$. Dann gilt die Implikationenfolge

$$\begin{aligned} Ux_1 &= Ux_2 \\ &\Rightarrow U(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow U\left(\widetilde{D}^n(X_1 - X_2)\right) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\widetilde{D}'\right)^n (U(X_1 - X_2)) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\widetilde{D}'\right)^n (X_1 - X_2) = 0 \\ &\Rightarrow X_1 - X_2 \in P_{n-1}(I) \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = \widetilde{D}^n(X_1 - X_2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

  Die Aussage $Ux_1 = Ux_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ ist äquivalent mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow Ux_1 \neq Ux_2$ und damit ist U injektiv.

Somit handelt es sich bei E und E' im wesentlichen um die gleichen Räume.

Kapitel 2

Beispiele von Distributionen

In der Definition des Distributionenraumes wurde verlangt, daß alle auf I stetigen (und somit alle glatten Funktionen) Distributionen seien. In der Tat enthält der Distributionenraum fast alle Funktionen von praktischer Bedeutung. Insbesondere kann man wie sofort gezeigt wird alle Lebesgue - integrierbaren Funktionen als Distributionen betrachten.

2.1 Integrierbare Funktionen

Die Eigenschaften des Integraloperators J im Falle stetiger Funktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung der Riemannschen Theorie wurden bereits diskutiert. Es gelten nun ähnliche Aussagen in der Lebesgueschen Integrationstheorie: Es sei x eine Lebesgue - integrierbare Funktion, genauer gesagt eine Äquivalenzklasse einer solchen, man schreibt dafür $x \in L^1(I)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung der Lebesgueschen Theorie (Walter 2 - Seite 342) besitzt x eine absolutstetige Stammfunktion X sodaß gilt $DX = x$ fast überall (Der Begriff der absoluten Stetigkeit ist stärker als jener der gleichmäßigen Stetigkeit). Die Funktion $\int_a^t x(\tau)d\tau$ ist eine Stammfunktion und jede andere Stammfunktion unterscheidet sich nur um eine additive Konstante von dieser speziellen.

Mit diesen Aussagen im Nacken geht man nun folgendermaßen vor um Lebesgue - integrierbare Funktionen als Distributionen betrachten zu können:

Definition 2.1 *Es sei $x \in L(I)$ und $X = Jx$. Man definiert nun die Distribution T_x als die distributionelle Ableitung von X, also*

$$T_x := \widetilde{D}X = \widetilde{D}Jx. \tag{2.1}$$

Es gilt $T_x \in C^{-1}(I)$. Mit Mitteln der Lebesgueschen Theorie kann man zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} L^1(I) & \to & C^{-1}(I) \\ x & \to & T_x \end{array}$$

stetig, linear und injektiv ist. Wenn kein besonderer Grund zur Vorsicht vorliegt, unterscheidet man nicht zwischen x und T_x. Eine Aussage der Art 'Die Distribution z ist eine integrierbare Funktion' bedeutet also, daß eine Funktion $x \in L^1(I)$ existiert, so daß $z = T_x$.

Als wichtigstes Beispiel dieser Kategorie wird nun die Heaviside Funktion H_0 eingeführt.

Definition 2.2 *Es sei $x : I \to \mathbf{R}$ mit*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

und $I_0 = Jx$, also

$$I_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t & \text{für } t \geq 0 \end{cases} .$$

Die **Heaviside Funktion** *H_0 wird nun definiert durch $H_0 := \widetilde{D} I_0$. Man identifiziert H_0 i.a. mit x. Allgemeiner definiert man H_a durch $H_a := \widetilde{D} I_a$ mit*

$$I_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ t - a & \text{für } t \geq a \end{cases} .$$

2.2 Dirac - Distributionen

Die Delta Funktion und ihre Ableitungen werden jetzt als Ableitungen der Heaviside Funktion eingeführt.

Definition 2.3 *Die* **Dirac Distribution** *(***Delta Funktion***) δ_a mit der Singularität in $a \in I$ ist definiert durch*

$$\delta_a := \widetilde{D} H_a. \tag{2.2}$$

Ihre n.te Ableitung $\delta_a^{(n)}$ ist definiert durch

$$\delta_a^{(n)} = \widetilde{D}^{(n+1)} H_a. \tag{2.3}$$

In den meisten Anwendungen der Delta - Distribution δ_0 ist jedoch nicht ihre Definition als Ableitung der Heaviside Funktion, sondern ihre Wirkung als Impuls mit unendlicher Höhe und unendlich kurzer Dauer im Zeitnullpunkt von Bedeutung. In vielen Anwendungen findet man die mathematisch nicht einwandfreie Definition

$$\delta_0(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t) dt = 1. \tag{2.4}$$

Obiger Ausdruck ist wegen $\delta_0(0) = \infty$ keine Funktion im eigentlichen Sinn (der Wert einer Funktion kann nicht ∞ sein) und wegen der punktweisen Darstellung auch keine Distribution (Distributionen müssen auf Intervallen definiert sein). Manchmal wird die Deltafunktion als Grenzwert gewisser Funktionenfolgen eingeführt, etwa als Grenzwert der Funktionenfolge

$$s_n(t) = \begin{cases} n/2 & \text{für } t \in [-1/n, 1/n] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{2.5}$$

Die 'Grenzfunktion' ist jedoch wieder keine Funktion im eigentlichen Sinn. Im Kapitel 8.2 wird gezeigt, daß die Delta - Distribution δ_0 (im Sinne der erst zu definierenden distributionellen Konvergenz) tatsächlich als Grenzwert gewisser Funktionenfolgen betrachtet werden kann. Es muß dafür allerdings erst die Theorie der Distributionenfolgen erzeugt werden. Es wird dies ein schwächerer Konvergenzbegriff als jener der punktweisen bzw. gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen sein. Man kann jedoch bereits jetzt von der Vorstellung der Delta - Distribution als Impuls im Zeitnullpunkt ausgehen.

Anwendungen der Delta - Distribution in der Physik zur Beschreibung idealisierter Begriffe wie Punktladung, Einzelkraft,... folgen in Kapitel 11

2.3 Die Distributionen $s_+^\lambda, s_-^\lambda, s_{\shortparallel}^\lambda, \ln_+, \ln_-, \ln_{\shortparallel}$

Es sei nun I ein Intervall, das 0 als inneren Punkt enthält. Auf diesem Intervall betrachte man die Funktionen (mit dem reellen oder komplexen Exponenten λ)

$$s_+^\lambda \ : \ s \to \begin{cases} 0 & \text{für } s < 0 \\ s^\lambda & \text{für } s \geq 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$s_-^\lambda \ : \ s \to \begin{cases} (-s)^\lambda & \text{für } s < 0 \\ 0 & \text{für } s \geq 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$s_{\shortparallel}^\lambda \ : \ s \to \begin{cases} |s|^\lambda & \text{für } s \neq 0 \\ 0 & \text{für } s = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Klarerweise gilt $s_{\shortparallel}^\lambda = s_+^\lambda + s_-^\lambda$. Diese Funktionen sind für $\mathrm{Re}\lambda > 1$ stetig differenzierbar, für $0 < \mathrm{Re}\lambda \leq 1$ stetig und für $\mathrm{Re}\lambda > -1$ zumindest noch integrierbar und repräsentieren daher in diesen Fällen Distributionen. Für $\mathrm{Re}\lambda \leq -1$ sind diese Funktionen zwar wohl definiert, jedoch nicht integrierbar. Aus diesem Grund handelt es sich nicht um Distributionen im Sinne von Kapitel 2.1 Es wird nun gezeigt, wie man die Funktionen s_+^λ, s_-^λ und $s_{\shortparallel}^\lambda$ trotzdem als Distributionen betrachten kann. Es sei vorerst $\mathrm{Re}\lambda \leq -1$ jedoch keine ganze Zahl. Man wähle eine positive ganze Zahl m so, daß $\mathrm{Re}(\lambda + m) > 0$ und definiere die Distributionen

$$s_+^\lambda \ : \ = \frac{\widetilde{D}^m s_+^{\lambda+m}}{(\lambda+m)...(\lambda+1)}, \tag{2.9}$$

$$s_-^\lambda \ : \ = \frac{(-1)^m \widetilde{D}^m s_-^{\lambda+m}}{(\lambda+m)...(\lambda+1)}, \tag{2.10}$$

$$s_{\shortparallel}^\lambda \ : \ = s_+^\lambda + s_-^\lambda. \tag{2.11}$$

Diese Definititionen sind unabhängig von der Wahl von m. Dazu folgendes

Beispiel 2.1 *Es wird die Distribution $s_+^{-1.5}$ einmal mit $m = 2$ und einmal mit $m = 3$ eingeführt und die Gleichheit gezeigt. Es sei also*

$$s_+^{-1.5} = \frac{\widetilde{D}^2 s_+^{0.5}}{(0.5)\,(-0.5)} = -4\widetilde{D}^2 s_+^{0.5}$$

sowie

$$\overline{s}_+^{-1.5} = \frac{\widetilde{D}^3 s_+^{1.5}}{(1.5)\,(0.5)\,(-0.5)} = -\frac{4}{1.5}\widetilde{D}^3 s_+^{1.5}.$$

Da $s_+^{1.5}$ *auf* I *stetig differenzierbar ist, gilt*

$$\overline{s}_+^{-1.5} = -\frac{4}{1.5}\widetilde{D}^3 s_+^{1.5} = -\frac{4}{1.5}\widetilde{D}^2 D s_+^{1.5} = -\frac{4}{1.5}\widetilde{D}^2(1.5 s_+^{0.5}) = -4\widetilde{D}^2 s_+^{0.5} = s_+^{-1.5}.$$

Diese Vorgangsweise kann einfach verallgemeinert werden, womit die Unabhängigkeit von m *gezeigt ist.*

Um den Fall zu behandeln, wo λ eine negative ganze Zahl ist, benötigt man die Logarithmusfunktionen. Man definiere die Funktionen

$$\ln_+ \ : \ s \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } s \leq 0 \\ \ln s & \text{für } s > 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\ln_- \ : \ s \rightarrow \begin{cases} \ln(-s) & \text{für } s < 0 \\ 0 & \text{für } s \geq 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\ln_{||} \ : \ s \rightarrow \begin{cases} \ln|s| & \text{für } s \neq 0 \\ 0 & \text{für } s = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Diese Funktionen sind integrierbar und definieren daher Distributionen auf I. Man definiert nun die Distributionen s_+^{-m}, s_-^{-m} und $s_{||}^{-m}$ für positive ganze Zahlen m durch

$$s_+^{-m} \ := \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\widetilde{D}^m \ln_+, \tag{2.15}$$

$$s_-^{-m} \ := -\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\widetilde{D}^m \ln_-, \tag{2.16}$$

$$s_{||}^{-m} \ := s_+^{-m} + s_-^{-m}. \tag{2.17}$$

Nun sind die obigen Distributionen für alle (reellen oder komplexen) Werte des Parameters λ eingeführt. Man zeigt einfach, daß für die distributionelle Ableitung in allen Fällen die Regeln

$$\widetilde{D} s_+^\lambda = \lambda s_+^{\lambda-1} \tag{2.18}$$

$$\widetilde{D} s_-^\lambda = \lambda s_-^{\lambda-1} \tag{2.19}$$

$$\widetilde{D} s_{||}^\lambda = \lambda s_{||}^{\lambda-1} \tag{2.20}$$

gelten. Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 2.2 *Man zeige obige Differentiationsregel für den Fall* $\lambda = -1.5$. *Es ist*

$$s_+^{-1.5} = \frac{\widetilde{D}^2 s_+^{0.5}}{(0.5)(-0.5)} = -4\widetilde{D}^2 s_+^{0.5} = (0, 0, -4 s_+^{0.5}).$$

Damit folgt

$$\widetilde{D}s_+^{-1.5} = (0,0,0,-4s_+^{0.5}).$$

Für die Distribution $s_+^{-2.5}$ kann man

$$s_+^{-2.5} = \frac{\widetilde{D}^3 s_+^{0.5}}{(0.5)(-0.5)(-1.5)} = (0,0,0,\frac{4}{1.5}s_+^{0.5})$$

schreiben. Damit gilt insgesamt

$$\widetilde{D}s_+^{-1.5} = -1.5s_+^{-2.5}.$$

Diese Vorgangsweise ist wieder einfach zu verallgemeinern.

Beispiel 2.3 *Man zeige obige Differentiationsregel für den Fall $\lambda = -2$. Es gilt*

$$s_+^{-2} = \widetilde{D}^2 \ln_+ = (0,0,\ln_+),$$

$$s_+^{-3} = -\frac{1}{2}\widetilde{D}^3 \ln_+ = (0,0,0,-\frac{1}{2}\ln_+)$$

sowie

$$\widetilde{D}s_+^{-2} = (0,0,0,\ln_+).$$

Damit hat man

$$\widetilde{D}s_+^{-2} = -2s_+^{-3}.$$

Aufbauend auf diese Überlegungen wird im Kapitel 4.3 gezeigt, daß alle rationalen und sogar alle meromorphen Funktionen als Distributionen betrachtet werden können.

Kapitel 3

Ableitung stückweise glatter Funktionen

3.1 Polynome mit Sprungstellen

Man betrachte die Funktion s_+^n mit positivem, ganzem Exponenten n. Für die Ableitungen dieser Funktion gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}s_+^n &= ns_+^{n-1},\\
\widetilde{D}^2 s_+^n &= n(n-1)s_+^{n-2},\\
&\vdots\\
\widetilde{D}^{n-1}s_+^n &= n!s_+,\\
\widetilde{D}^n s_+^n &= n!H_0,\\
\widetilde{D}^{n+1}s_+^n &= n!\delta_0.
\end{aligned}$$

Damit folgt für höhere Ableitungen ($m > n$) der Funktion s_+^n die Gleichung

$$\widetilde{D}^m s_+^n = n!\delta_0^{(m-n-1)}.$$

Es sei nun p ein Polynom mit dem Grad $n-1$, etwa

$$p : s \to a_0 + a_1 s + ... + a_{n-1}s^{n-1}$$

und $p_+ = pH_0$, also

$$p_+ = a_0 H_0 + a_1 s_+ + ... + a_{n-1}s_+^{n-1}.$$

Berücksichtigt man die für Polynome allgemein gültige Beziehung $p^{(i)}(0) = i!a_i$ ($i \geq 0$), so erhält man für die $n.te$ Ableitung von p_+ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^n p_+ &= a_0\delta_0^{(n-1)} + a_1\delta_0^{(n-2)} + ... + (n-1)!a_{n-1}\delta_0\\
&= p(0)\delta_0^{(n-1)} + p^{'}(0)\delta_0^{(n-2)} + ... + p^{(n-1)}(0)\delta_0\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} p^{(j)}(0)\delta_0^{(n-1-j)}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Tritt der Sprung an der Stelle a auf, gilt also $p_+ = pH_a$, so erhält man etwas allgemeiner

$$\widetilde{D}^n p_+ = \sum_{j=0}^{n-1} p^{(j)}(a)\delta_a^{(n-1-j)}. \tag{3.2}$$

Man erkennt, daß Sprünge in glatten Funktionen in deren Ableitungen δ Distributionen zur Folge haben.

Beispiel 3.1 *Es sei $p = 2 + 3s + 4s^2$ und $p_+ = pH_0$, also $p_+ = 2H_0 + 3s_+ + 4s_+^2$. Damit folgt für die Ableitungen von p_+*

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}p_+ &= 2\delta_0 + 3H_0 + 8s_+,\\
\widetilde{D}^2 p_+ &= 2\delta_0^{(1)} + 3\delta_0 + 8H_0,\\
\widetilde{D}^3 p_+ &= 2\delta_0^{(2)} + 3\delta_0^{(1)} + 8\delta_0.
\end{aligned}$$

3.2 Stückweise glatte Funktionen

Ausgehend von Gl.3.2 wird nun eine Formel für die distributionellen Ableitungen stückweise $n-$mal stetig differenzierbarer Funktionen entwickelt.

Stetige, nicht klassisch differenzierbare Funktionen

Vor dem allgemeinen Fall stückweise glatter Funktionen werden zuerst Funktionen betrachtet, die zwar stetig, jedoch in einem Punkt a_0 des Intervalls I nicht differenzierbar sind. Ein Beispiel wäre etwa die Funktion $x : I \to \mathbf{R}$ mit $x(t) = |t|$, die in $a_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

Satz 3.1 *Es sei x eine auf I stetige Funktion, die nur in einem inneren Punkt $a_0 \in I$ nicht klassisch differenzierbar ist. Es gilt dann für die distributionelle Ableitung die Beziehung*

$$\widetilde{D}x = T_{x'}. \tag{3.3}$$

Dabei bezeichnet x' die klassische Ableitung der Funktion x auf $I\diagdown\{a_0\}$ und T den Operator, der der Funktion x' die entsprechende Distribution nach Gl. 2.1 zuordnet. Man schreibt meist einfacher

$$\widetilde{D}x = x'. \tag{3.4}$$

Beweis: Die distributionelle Ableitung von x kann aufgrund der Stetigkeit sofort in der Form $\widetilde{D}x = (0, x)$ als Distribution erster Stufe geschrieben werden. Man kann jedoch auch wie folgt vorgehen: Man bilde auf $I\diagdown\{a_0\}$ die klassische Ableitung Dx von x und schreibt dafür x'. Diese Funktion x' ist nun auf ganz I integrierbar und die Funktion $X = Jx'$ auf I stetig. Es gilt $X = x + c$ mit $c \in \mathbf{R}$. Man definiere (nach Gl. 2.1) die Distribution $T_{x'} = \widetilde{D}X = (0, X) = (0, Jx')$. Wegen $X = x+c$ gilt $(0, x) \sim (0, Jx')$ und somit $\widetilde{D}x = T_{x'}$.

Für obiges Beispiel erhält man etwa

$$\widetilde{D}x = x'(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} = 2H_0 - 1.$$

Ableitung von Funktionen mit einer Sprungstelle

Die Funktion x, von der man die distributionelle Ableitung sucht, habe nun in a_0 eine Sprungstelle. Als Beispiel nehme man etwa die Funktion $x : I \to \mathbf{R}$ mit

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1+t & \text{für } t \geq 0 \end{cases} .$$

Satz 3.2 *Es sei x eine auf $I \diagdown \{a_0\}$ stetig differenzierbare Funktion, so daß die Grenzwerte $\lim\limits_{s \to a_0+} x(s)$ und $\lim\limits_{s \to a_0-} x(s)$ existieren. Es gilt dann für die distributionelle Ableitung von x die Beziehung*

$$\widetilde{D}x = x' + \sigma_{a_0}.\delta_{a_0}. \tag{3.5}$$

x' bezeichnet wieder die klassische Ableitung der Funktion x auf $I \diagdown \{a_0\}$.

Beweis: Aufgrund der Unstetigkeit von x kann man hier nicht mehr $\widetilde{D}x = (0, x)$ schreiben, es handelt sich um eine Singularität höherer Ordnung. Ist x' wieder die klassische Ableitung Dx von x auf $I \diagdown \{a_0\}$, so ist diese Funktion wie vorher auf ganz I integrierbar und kann somit wie oben beschrieben als Distribution erster Ordnung betrachtet werden ($x' = T_x = \widetilde{D}X$ mit $X = Jx'$, X stetig). Die Beziehung $X = x + c$ ist aufgrund der Unstetigkeit von x jedoch nicht mehr gültig. Um auch in diesem Fall $\widetilde{D}x$ berechnen zu können, kann man folgendermaßen vorgehen: Man konstruiert aus x eine stetige Funktion, indem man für $t > a_0$ die Konstante $\sigma_{a_0} = \lim\limits_{t \to a_0+} x(t) - \lim\limits_{t \to a_0-} x(t)$ (= Sprunghöhe der Funktion in a_0) von x subtrahiert. Die Funktion $x - p_+$ mit $p_+ = \sigma_{a_0}.H_{a_0}$ ist die angekündigte stetige Funktion. Mit der Linearität des Operators $\widetilde{D}$ gilt

$$\widetilde{D}x = \widetilde{D}(x - p_+) + \widetilde{D}p_+.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $x - p_+$ gilt mit Gl.3.4: $\widetilde{D}(x - p_+) = (x - p_+)'$. Man meint mit $(x - p_+)'$ wie oben einerseits die klassische Ableitung der Funktion $x - p_+$ auf $I \diagdown \{a_0\}$ und andererseits die mit ihr identifizierte Distribution erster Ordnung auf I. Da $(x - p_+)'$ auf $I \diagdown \{a_0\}$ mit x' übereinstimmt erhält man nun gemeinsam mit $\widetilde{D}p_+ = \sigma_{a_0}.\delta_{a_0}$ die behauptete Beziehung.

Für das obige Beispiel gilt etwa

$$\widetilde{D}x = H_0 + \delta_0.$$

Mit dieser Vorgangsweise hat man also die Singularität höherer Ordnung in p_+ verlagert, wofür die distributionelle Ableitung bereits bekannt war.

Allgemeiner Fall

Es werden nun auch mehrere Sprungstellen und höhere Ableitungen betrachtet. Die Vorgangsweise des letzten Abschnitts wird verallgemeinert, es kommen im Beweis des folgenden Satzes aber keine wesentlich neuen Überlegungen dazu. Ausgangspunkt ist eine Funktion x auf I und eine endliche Folge $(a_0, ..., a_k)$ im Inneren von I, sodaß gilt

- x ist auf $I \diagdown \{a_0, ..., a_k\}$ n-mal stetig differenzierbar,

- für alle $i = 0, ..., k$ und $j = 0, ..., n$ existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte

$$x_-^{(j)}(a_i) = \lim_{s \to a_i -} x^{(j)}(s) \qquad \text{und} \qquad x_+^{(j)}(a_i) = \lim_{s \to a_i +} x^{(j)}(s).$$

Funktionen dieser Art sind integrierbar auf I und daher Distributionen. Es sei

$$\sigma_{a_i}^j = x_+^{(j)}(a_i) - x_-^{(j)}(a_i),$$

dies ist die Sprunghöhe der *j.ten* klassischen Ableitung im Punkt a_i. $\sigma_{a_0}^0$ ist beispielsweise die Sprunghöhe der Funktion selbst im Punkt 0. Es gilt nun folgender

Satz 3.3 *Die n.te Ableitung einer wie oben beschriebenen Funktion ergibt sich zu*

$$\widetilde{D}^n x = x^{(n)} + \sum_{i,j} \sigma_{a_i}^j \delta_{a_i}^{(n-1-j)}. \tag{3.6}$$

Dabei entspricht $x^{(n)}$ der klassischen Ableitung der Funktion x auf $I \setminus \{a_0, ..., a_k\}$.

Beweis: Zur Vereinfachung der Schreibweise wird angenommen, daß die Funktion x nur in einem Punkt (a_0) Sprungstellen des Funktionswertes und der Ableitungen besitzt. $x^{(i)}$ sei die Funktion auf $I \setminus \{a_0\}$, die durch $i-$maliges klassisches Ableiten der Funktion x entsteht. Es ist dies eine integrierbare Funktion ($x^{(i)} \in L^1(I)$), sie kann daher als Distribution betrachtet werden. Es spielt keine Rolle, daß diese Funktion in a_0 nicht definiert ist. Es sei nun p das (eindeutig bestimmte) Polynom mit Grad $n-1$, für dessen Funktionswert bwz. Ableitungen in a_0 die Beziehungen

$$\begin{aligned} p(a_0) &= \sigma_{a_0}^0 \\ p'(a_0) &= \sigma_{a_0}^1 \\ &\vdots \\ p^{(n-1)}(a_0) &= \sigma_{a_0}^{n-1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

gelten. Weiters sei p_+ die Funktion $p.H_{a_0}$. Für p_+ gilt nun nach Gl. 3.2

$$\widetilde{D}^n p_+ = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{a_0}^j \delta_{a_0}^{(n-1-j)}.$$

Die Funktion p_+ ist aufgrund Gl. 3.7 so konstruiert, daß ihre Sprunghöhen im Funktionswert und in den ersten $(n-1)$ Ableitungen mit jenen der ursprünglich betrachteten Funktion x übereinstimmen. Die Differenz $x - p_+$ ist daher auf I $(n-1)$ - mal stetig differenzierbar. Für die *n.te* distributionelle Ableitung dieser Funktion gilt nun

$$\widetilde{D}^n(x - p_+) = \widetilde{D} D^{n-1}(x - p_+) = x^{(n)}.$$

Dies folgt aus der Tatsache, daß die klassische, punktweise *n.te* Ableitung der Funktion $x - p_+$ eine integrierbare Funktion ergibt, die auf $I \setminus \{a_0\}$ mit $x^{(n)}$ übereinstimmt. Mit der Linearität von $\widetilde{D}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\widetilde{D}^n x &= \widetilde{D}^n(x - p_+ + p_+) \\ &= \widetilde{D}^n(x - p_+) + \widetilde{D}^n p_+ \\ &= x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{a_0}^i \delta_{a_0}^{(n-1-j)}.\end{aligned}$$

Es sind also die Singularitäten höherer als erster Ordnung wieder in p_+ verlagert worden, wofür die distributionelle Ableitung durch Gl. 3.2 gegeben war.

Beispiel 3.2 *Gegeben ist die Funktion* $x : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ *mit*

$$x(s) = \begin{cases} 1 + s & \textit{für } s < 0 \\ 2s + s^2 & \textit{für } s \geq 0 \end{cases}.$$

Gesucht ist $\widetilde{D}^2 x$. *Für die klassischen Ableitungen der Funktion* x *auf* $[-1, 1] \setminus \{0\}$ *erhält man*

$$x^{'}(s) = \begin{cases} 1 & \textit{für } s < 0 \\ 2 + 2s & \textit{für } s \geq 0 \end{cases}$$

sowie

$$x''(s) = \begin{cases} 0 & \textit{für } s < 0 \\ 2 & \textit{für } s \geq 0 \end{cases}.$$

Man erkennt daraus $\sigma_0^0 = -1$ *und* $\sigma_0^1 = 1$. *Mit der Gleichung 3.6 folgt somit*

$$\widetilde{D}^2 x = 2H_0 - \delta_0^{(1)} + \delta_0.$$

Um die Beweisidee noch einmal zu wiederholen wird auch noch das Polynom mit den Eigenschaften der Gleichungen 3.7 bestimmt. Aus $p(0) = -1$ *und* $p'(0) = 1$ *folgt* $p(s) = -1 + s$ *sowie* $p_+ = -H_0 + s_+$. *Damit folgt für die Funktion* $x - p_+$ *und ihre klassischen Ableitungen auf* $[-1, 1]$

$$(x - p_+)(s) = \begin{cases} 1 + s & \textit{für } s < 0 \\ 1 + s + s^2 & \textit{für } s \geq 0 \end{cases}$$

und

$$(x - p_+)'(s) = \begin{cases} 1 & \textit{für } s < 0 \\ 1 + 2s & \textit{für } s \geq 0 \end{cases}.$$

Man erkennt, daß diese Funktion (1 mal) stetig differenzierbar ist. Auf $[-1, 1] \setminus \{0\}$ *gilt weiters*

$$(x - p_+)''(s) = \begin{cases} 0 & \textit{für } s < 0 \\ 2 & \textit{für } s > 0 \end{cases},$$

woraus die Gleichheit von $(x - p_+)''$ *und* x'' *ersichtlich ist.*

Beispiel 3.3 *Man betrachte die Funktion*

$$x(t) = H_0 \sin(t).$$

Für die distributionellen Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned} \widetilde{D}x &= H_0 \cos(t), \\ \widetilde{D}^2 x &= -H_0 \sin(t) + \delta_0. \end{aligned}$$

Somit ist x eine Lösung der distributionellen Differentialgleichung

$$\widetilde{D}^2 x + x = \delta_0.$$

Weitere Aspekte zu Distributionen - Differentialgleichungen findet man in Kapitel 11.2.

Kapitel 4

Operationen auf Distributionen

Es wird nun gezeigt wie man einige Standardoperationen auf Funktionen auf Distributionen erweitern kann. Das Hauptproblem dabei ist, daß solche Operationen (wie etwa die Multiplikation) nicht mehr punktweise definiert werden können. Man ist gezwungen, nach weniger direkten Methoden zu suchen.

4.1 Verschiebung und Einschränkung

Satz 4.1 *Es sei $S : C(I) \to C(J)$ ein linearer Operator (mit kompakten Intervallen I und J), der mit D kommutiert,*

$$\begin{array}{ccc} C^1(I) & \xrightarrow{S} & C^1(J) \\ D\downarrow & & \downarrow D \\ C(I) & \xrightarrow{S} & C(J) \end{array}$$

das heißt

$$\bigwedge_{x\in C^1(I)} Sx \in C^1(J) \text{ und } D(Sx) = S(Dx). \tag{4.1}$$

Dann existiert eine eindeutige Erweiterung $\widetilde{S}$ von S, das heißt ein eindeutig bestimmter Operator $\widetilde{S} : C^{-\infty}(I) \to C^{-\infty}(J)$ der mit $\widetilde{D}$ kommutiert,

$$\begin{array}{ccc} C^{-\infty}(I) & \xrightarrow{\widetilde{S}} & C^{-\infty}(J) \\ \widetilde{D}\downarrow & & \downarrow \widetilde{D} \\ C^{-\infty}(I) & \xrightarrow{\widetilde{S}} & C^{-\infty}(J) \end{array}$$

der also die Eigenschaft

$$\bigwedge_{x\in C^{-\infty}(I)} \widetilde{S}x \in C^{-\infty}(J) \text{ und } \widetilde{D}(\widetilde{S}x) = \widetilde{S}(\widetilde{D}x). \tag{4.2}$$

besitzt und im Fall stetiger Funktionen mit S übereinstimmt. Ist S stetig, so gilt dies auch für $\widetilde{S}$.

Beweis: Es werden in einem ersten Schritt einige Folgerungen der Eigenschaft 4.1 betrachtet.

- Es sei x vorerst eine konstante Funktion auf I ($x \in C^1(I)$). Es gilt $Dx = 0$ und da S linear ist ($S(0) = 0$) gilt $S(Dx) = 0$. S kommutiert mit D, daher gilt $D(Sx) = 0$, also muß Sx eine konstante Funktion auf J sein.

- Ähnlich zeigt man: Ist $x \in P_{n-1}(I)$, so ist $Sx \in P_{n-1}(J)$. (Als Konsequenz der Kommutativität erhält man mit $x \in C^n(I)$ die Gleichung $D^n(Sx) = S(D^n x)$, daraus erhält man das behauptete).

- Es wird gezeigt, wie sich die Kommutativeigenschaft auf den Integraloperator J auswirkt. Mit $x \in C(I)$ erhält man die Gleichungskette

$$JSx = JS(DJx) \underbrace{=}_{(4.1)} JD(SJx) = SJx + x_0$$

mit einer Konstanten x_0.

- Ähnlich zeigt man daß für jedes $n \in \mathbf{N}$ und jedes $x \in C(I)$ die Beziehung

$$J^n Sx - SJ^n x \in P_{n-1}(J) \tag{4.3}$$

gilt.

In einem zweiten Schritt wird nun der Operator

$$S_n : (x_0, ..., x_n) \to (Sx_0, ..., Sx_n)$$

von $H_n(I)$ nach $H_n(J)$ eingeführt. Es wird also der Operator S komponentenweise angewendet. Die Frage ist, ob dieser Operator zu einem Operator $\widetilde{S}_n$ von $C^{-n}(I)$ nach $C^{-n}(J)$ erhoben werden kann. Dazu muß man zeigen, daß dieser wohldefiniert ist, das heißt, daß für zwei beliebige Darstellungen $(x_0, ..., x_n) \sim (\overline{x}_0, ..., \overline{x}_n)$ einer Distribution x die Äquivalenz $\widetilde{S}_n(x_0, ..., x_n) \sim \widetilde{S}_n(\overline{x}_0, ..., \overline{x}_n)$ gilt. Das Ergebnis soll ja sinnvollerweise unabhängig vom Repräsentanten sein. Zu zeigen ist somit, daß gilt

$$J^n(S\overline{x}_0 - Sx_0) + ... + (S\overline{x}_n - Sx_n) \in P_{n-1}(J). \tag{4.4}$$

Wegen $(x_0, ..., x_n) \sim (\overline{x}_0, ..., \overline{x}_n)$ gilt

$$J^n(\overline{x}_0 - x_0) + ... + (\overline{x}_n - x_n) \in P_{n-1}(I)$$

und somit mit Gl. 4.3 und einem Polynom $p \in P_{n-1}(J)$

$$\begin{aligned} J^n(S\overline{x}_0 - Sx_0) + ... + (S\overline{x}_n - Sx_n) &= SJ^n(\overline{x}_0 - x_0) + ... + S(\overline{x}_n - x_n) + p \\ &= S(J^n(\overline{x}_0 - x_0) + ... + (\overline{x}_n - x_n)) + p \\ &\in P_{n-1}(J). \end{aligned}$$

Der Operator

$$\widetilde{S}_n : (x_0, ..., x_n) \to (Sx_0, ..., Sx_n)$$

von $C^{-n}(I)$ nach $C^{-n}(J)$ ist somit wohldefiniert. Er ist überdies stetig, wenn S stetig ist. Wegen

$$\widetilde{D}\widetilde{S}_n x = (0, Sx_0, ..., Sx_n) = \widetilde{S}_n \widetilde{D} x$$

kommutiert er mit $\widetilde{D}$ und er beschreibt somit die gewünschte Erweiterung von S auf einen Operator von $C^{-\infty}(I)$ nach $C^{-\infty}(J)$.

Man zeigt leicht, daß $\widetilde{S}$ surjektiv (bzw. injektiv bzw. bijektiv) ist, falls S die entsprechende Eigenschaft hat. Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß $\widetilde{S}_n$ in der Betrachtungsweise von Distributionen als $n+1-$Tuppel stetiger Funktionen komponentenweise wirkt.

Als Beispiele von Operatoren, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen, werden die Verschiebung und die Einschränkung betrachtet.

Verschiebung: Es ist bekannt, daß der Operator $\tau_h : C(I) \to C(I+h)$ mit

$$x \to (s \to x(s-h))$$

stetig und linear ist und mit D kommutiert. Nach obigem Satz existiert somit ein eindeutig bestimmter stetiger, linearer Operator $\widetilde{\tau}_h : C^{-\infty}(I) \to C^{-\infty}(I+h)$ der mit $\widetilde{D}$ kommutiert und der im Fall stetiger Funktionen mit der üblichen Verschiebung übereinstimmt.

Einschränkung: Sind I und J kompakte Intervalle mit $J \subset I$, so erfüllt der Restriktionsoperator $\rho_{I,J} : C(I) \to C(J)$ die Bedingungen des Satzes. Es existiert daher ein eindeutig bestimmter stetiger, linearer Operator $\widetilde{\rho}_{I,J}$ auf den entsprechenden Distributionenräumen der mit $\widetilde{D}$ kommutiert und der im Fall stetiger Funktionen mit der üblichen Restriktion übereinstimmt.Anstatt $\widetilde{\rho}_{I,J}x$ wird oft auch $x \mid_J$ geschrieben.

Man nennt die korrespondierenden Distributionen $\widetilde{\tau}_h x$ und $\widetilde{\rho}_{I,J}x$ die **h - Verschiebung** von x bzw. die **Einschränkung** von x auf J.

4.2 Recollement des morceaux

Satz 4.2 *Es seien I und J kompakte Intervalle mit $J \subset I$. Weiters sei $(y_0, ..., y_n)$ eine Darstellung einer Distribution y auf J und x eine Distribution auf $C^{-n}(I)$, die auf J mit y übereinstimmt, es gilt also $y = \widetilde{\rho}_{I,J}x$. Dann existiert eine Darstellung $(x_0, ..., x_n)$ von x, sodaß gilt: $x_i = y_i$ auf J für jedes i.*

Beweis: x habe auf I eine Darstellung der Form $(\widetilde{x}_0, ..., \widetilde{x}_n)$. Die Darstellung der Einschränkung $\widetilde{\rho}_{I,J}x$ besteht aus den entsprechenden Einschränkungen der Komponentenfunktionen. Zur Vereinfachung der Schreibweise schreibt man für $\widetilde{\rho}_{I,J}x$ ebenfalls $(\widetilde{x}_0, ..., \widetilde{x}_n)$. Da x und y auf J übereinstimmen, existiert ein Polynom p mit Grad kleiner oder gleich $n-1$, sodaß

$$J^n(\widetilde{x}_0 - y_0) + ... + (\widetilde{x}_n - y_n) = p \tag{4.5}$$

auf J. Man erweitert nun die Funktionen $y_0, ..., y_{n-1}$ auf ein willkürliche Art zu stetigen Funktionen auf I und schreibt dafür $(x_0, ..., x_{n-1})$. Wählt man nun

$$x_n = -p + J^n(\widetilde{x}_0 - x_0) + ... + J(\widetilde{x}_{n-1} - x_{n-1}) + \widetilde{x}_n, \tag{4.6}$$

so folgt durch Umstellen der Gleichung

$$J^n(\widetilde{x}_0 - x_0) + ... + J(\widetilde{x}_{n-1} - x_{n-1}) + (\widetilde{x}_n - x_n) = p \tag{4.7}$$

auf ganz I. Daraus erkennt man $[(x_0, ..., x_n)] = [(\widetilde{x}_0, ..., \widetilde{x}_n)] = x$, $(x_0, ..., x_n)$ ist also nur eine andere Darstellung von x. Außerdem folgt durch Vergleich der Gleichungen 4.5 und 4.7 daß $x_n = y_n$ auf J. $(x_0, ..., x_n)$ ist somit die gesuchte Darstellung.

An einem Beispiel wird diese konstruktive Beweisidee noch einmal vorgeführt.

Beispiel 4.1 *Es sei* $y = (y_0, y_1) = (t/2, t^2/4)$ *eine Distribution auf* $J = [1, 2]$ *und* $x = (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1) = (0, t^2/2)$ *eine Distribution auf* $I = [1, 3]$. *Schränkt man* x *auf* J *ein, so gilt*

$$J(\widetilde{x}_0 - y_0) + (\widetilde{x}_1 - y_1) = \int_1^t (-\frac{\tau}{2})d\tau + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} = \frac{1}{4} = p,$$

damit stimmt x *auf* J *mit* y *überein. Es wird nun* y_0 *stetig, sonst aber willkürlich auf* I *erweitert. Das Resultat wird mit* x_0 *bezeichnet und lautet etwa*

$$x_0 = \begin{cases} t/2 & \textit{für } t \in [1, 2] \\ 1 & \textit{für } t \in [2, 3] \end{cases} .$$

Für x_1 *ergibt sich nach Gleichung 4.6* $\quad x_1 = -p + \int_1^t (\widetilde{x}_0 - x_0)d\tau + \widetilde{x}_1$. *Man erhält*

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{4} + \left\{ \begin{array}{ll} \int_1^t (-\tau/2)d\tau & \textit{für } t \in [1, 2] \\ \int_1^2 (-\tau/2)d\tau + \int_2^t (-1)d\tau & \textit{für } t \in [2, 3] \end{array} \right\} + \frac{t^2}{2} \\ &= -\frac{1}{4} + \left\{ \begin{array}{ll} -t^2/4 + 1/4 & \textit{für } t \in [1, 2] \\ -1 + 1/4 - t + 2 & \textit{für } t \in [2, 3] \end{array} \right\} + \frac{t^2}{2} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} t^2/4 & \textit{für } t \in [1, 2] \\ 1 - t + t^2/2 & \textit{für } t \in [2, 3] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht von der Stetigkeit von x_1. (x_0, x_1) *ist die gewünschte Darstellung von* x.

Es wird nun Recollement des morceaux für den Fall von zwei Teilintervallen betrachtet.

Satz 4.3 *Es sei* $K = I \cup J$ *mit kompakten Intervallen* I *und* J *wobei* $I \cap J$ *ein nicht-entartetes Intervall ist. Ist nun* x *eine Distribution auf* I, y *eine Distribution auf* J, *sodaß*

$$\widetilde{\rho}_{I,I\cap J}x = \widetilde{\rho}_{J,I\cap J}y,$$

dann existiert genau eine Distribution z *auf* K, *die auf* I *mit* x *und auf* J *mit* y *übereinstimmt, das heißt*

$$\widetilde{\rho}_{K,I}z = x \qquad \textit{und} \qquad \widetilde{\rho}_{K,J}z = y.$$

Beweis: Es sei $(z_0, ..., z_n)$ eine Darstellung von x (und somit von y) auf $I \cap J$. Wendet man obigen Satz zweimal an, so findet man eine Darstellungen $(x_0, ..., x_n)$ von x auf I mit $z_i = x_i$ auf $I \cap J$ und eine Darstellung $(y_0, ..., y_n)$ von y auf J mit $z_i = y_i$ auf $I \cap J$. Es sei nun (für $0 \leq i \leq n$) z_i jene stetige Funktion auf K, für die $z_i = x_i$ auf I und $z_i = y_i$ auf J gilt. Dann ist $z = [(z_0, ..., z_n)]$ die gesuchte Distribution.

Die angegebene Distribution ist überdies eindeutig bestimmt. Dazu sei $\overline{z}$ eine weitere Distribution, die auf I mit x und auf J mit y übereinstimmt, es ist also $z = \overline{z}$ auf I und $z = \overline{z}$ auf J. Zu zeigen ist, daß dann z und $\overline{z}$ auf ganz K übereinstimmen. Es sei $(z_0, ..., z_n)$ eine gemeinsame Darstellung der beiden Distributionen auf I. Nach Satz 4.2 findet man Darstellungen

$$(x_0, ..., x_n) \qquad \text{und} \qquad (\overline{x}_0, ..., \overline{x}_n)$$

für z und $\overline{z}$ auf K wobei die x_i und $\overline{x}_i$ Erweiterungen der z_i sind. Da diese Distributionen auf J übereinstimmen, ist die Funktion

$$J^n(\overline{x}_0 - x_0) + ... + (\overline{x}_n - x_n)$$

ein Polynom auf J. Dieses Polynom verschwindet auf dem nichtentarteten Intervall $I \cap J$ und daher auf ganz J. Damit gilt $z = \overline{z}$ auf K.

Beispiel 4.2 *Es sei wie oben $y = (y_0, y_1) = (t/2, t^2/4)$ eine Distribution auf $J = [0, 2]$ und $x = (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1) = (0, t^2/2)$ eine Distribution auf $I = [1, 3]$. Es wurde bereits gezeigt, daß gilt: $\widetilde{\rho}_{I,I\cap J}x = \widetilde{\rho}_{J,I\cap J}y$. Die Distribution $z = [(z_0, z_1)]$ auf $K = [0, 3]$ mit*

$$z_0 = \begin{cases} t/2 & \text{für } t \in [0, 2] \\ 1 & \text{für } t \in [2, 3] \end{cases}$$

und

$$z_1 = \begin{cases} t^2/4 & \text{für } t \in [0, 2] \\ 1 - t + t^2/2 & \text{für } t \in [2, 3] \end{cases}$$

erfüllt die Bedingungen des Satzes.

Der allgemeine Fall von Recollement des morceaux folgt mit einem Induktionsargument. Es gilt der

Satz 4.4 *Es sei $(I_1, ..., I_m)$ (mit kompakten Intervallen I_i) eine Überdeckung des kompakten Intervalls I, sodaß jedes Paar I_j und I_k entweder disjunkt ist oder eine nichtentartete Schnittmenge besitzt. Weiters sei $(x_i)_{i=1}^m$ eine Folge von Distributionen, wobei x_i auf I_i definiert ist, sodaß*

$$\widetilde{\rho}_{I_j,I_j\cap I_k}x_j = \widetilde{\rho}_{I_k,I_j\cap I_k}x_k$$

für jedes Paar j, k. Dann existiert eine eindeutige Distribution x auf I, deren Einschränkungen mit jedem x_i auf I_i übereinstimmen.

4.3 Multiplikation

Es wird nun das Problem der Erweiterung der Multiplikation auf Distributionen betrachtet. Obwohl man Beispiele finden kann, in denen sich sogar singuläre Distributionen miteinander multiplizieren lassen, kann i. a. keine natürliche Multiplikation von $C^{-\infty}(I) \times C^{-\infty}(I)$ nach $C^{-\infty}(I)$ definiert werden, die assoziativ und kommutativ ist. Ein Beispiel am Ende dieses Abschnitts wird dieses Argument bestätigen. Es kann jedoch eine sinnvolle Multiplikation gewisser glatter Funktionen mit Distributionen definiert werden. Ausgangspunkt für eine sinnvolle Erweiterung der Multiplikation ist die Forderung, daß die Produktregel ihre Gültigkeit beibehalten soll. Für glatte Funktionen X und α gilt nach der Produktregel

$$\alpha \cdot DX = D(\alpha \cdot X) - (D\alpha) \cdot X.$$

Durch Iteration folgt

$$\alpha \cdot D^n X = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(D^k \alpha \cdot X). \tag{4.8}$$

Es wird sich zeigen, daß für das Produkt einer Funktion $\alpha \in C^n(I)$ mit einer Distribution $x \in C^{-n}(I)$ (mit $x = \widetilde{D}^n X$) diese Beziehung quasi als Definition benutzt wird. Diese Tatsache wird in Satz 4.6 zum Vorschein kommen. Es gilt der folgende

Satz 4.5 *Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ existiert eine eindeutig bestimmte Bilinearabbildung $(\alpha, x) \to a \cdot x$ von $C^n(I) \times C^{-n}(I)$ nach $C^{-n}(I)$, sodaß*

1. *für $n = 0$ erhält man die übliche Multiplikation stetiger Funktionen*
2. *für $\alpha \in C^{n+1}(I), x \in C^{-n}(I)$ gilt die (Leibniz'sche) Regel*

$$\widetilde{D}(\alpha \cdot x) = (D\alpha) \cdot x + \alpha \cdot (\widetilde{D}x) \tag{4.9}$$

Induktionsbeweis:
$n = 0$: In diesem Fall $C^0(I) \times C^0(I) \to C^0(I)$ mit stetigem α und x nehme man einfach die übliche Multiplikation stetiger Funktionen.
$n \to n+1$: Es sei $\alpha \in C^{n+1}(I)$ und $x \in C^{-(n+1)}(I)$, etwa $x = \widetilde{D}^{n+1} X = \widetilde{D} x_1$ mit einer stetigen Funktion X und $x_1 = \widetilde{D}^n X$. Die Induktionshypothese ist, daß bereits eine Multiplikation $(\alpha, x_1) \to a \cdot x_1$ von $C^n(I) \times C^{-n}(I)$ nach $C^{-n}(I)$ mit den im Satz erwähnten Eigenschaften existiert. Es soll dann die Gleichung

$$\begin{aligned} \widetilde{D}(\alpha \cdot x_1) &= (D\alpha) \cdot x_1 + \alpha \cdot (\widetilde{D} x_1) \\ &= (D\alpha) \cdot x_1 + \alpha \cdot x \end{aligned}$$

gelten. Das Produkt αx ist jedoch an dieser Stelle noch gar nicht definiert. Es liegt daher die Definition

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x \quad &:= \widetilde{D}(\alpha \cdot x_1) - (D\alpha) \cdot x_1 \\ &= \widetilde{D}(\alpha \cdot \widetilde{D}^n X) - (D\alpha) \cdot \widetilde{D}^n X \end{aligned} \tag{4.10}$$

nahe. Man beachte, daß die beiden Summanden auf der rechten Seite der Gleichung aufgrund der Induktionsannahme bereits definiert sind. Die Frage ist, ob dieses so erklärte Produkt wohldefiniert ist, das heißt, ob für zwei verschiedene stetige Funktionen X und X_1 mit $x = \widetilde{D}^{n+1}X = \widetilde{D}^{n+1}X_1$ obige Definition das gleiche Ergebnis liefert. Ist dies der Fall, so erkennt man leicht, daß die anderen geforderten Eigenschaften (Bilinerarität, Leibniz'sche Regel) von dieser Multiplikation erfüllt werden. Es sei also jetzt

$$x = \widetilde{D}^{n+1}X = \widetilde{D}^{n+1}X_1 \qquad \text{mit} \qquad X, X_1 \in C(I), X \neq X_1.$$

Damit gilt $X - X_1 = p$ mit $p \in P_n(I)$. Folgende Gleichung soll gelten:

$$\widetilde{D}(\alpha\widetilde{D}^n X) - (D\alpha)\,\widetilde{D}^n X = \widetilde{D}(\alpha\widetilde{D}^n X_1) - (D\alpha)\,\widetilde{D}^n X_{1.} \tag{4.11}$$

Sie ist äquivalent zu

$$\widetilde{D}\left\{(\alpha\widetilde{D}^n X) - (\alpha\widetilde{D}^n X_1)\right\} = (D\alpha)\cdot\left\{\widetilde{D}^n X - \widetilde{D}^n X_1\right\}$$

bzw. zu

$$\widetilde{D}\{\alpha\underbrace{\widetilde{D}^n(X - X_1)}_{const}\} = (D\alpha)\cdot\{\underbrace{\widetilde{D}^n(X - X_1)}_{const}\},$$

da $X - X_1 \in P_n(I)$ und daher $\widetilde{D}^n$ mit D^n vertauscht werden kann. Gl. 4.11 ist also ferner äquivalent zu

$$\widetilde{D}(\alpha\cdot c) = (D\alpha)\cdot c,$$

mit einer Konstanten c, was aufgrund der Vertauschbarkeit von $\widetilde{D}$ und D eine wahre Aussage ist. Die Gültigkeit von Gl. 4.11 und somit die Wohldefiniertheit dieser Multiplikation ist damit gezeigt.

Es existiert somit eine Muliplikation mit den Eigenschaften des Satzes, man kennt jedoch an dieser Stell noch keine explizite Formel zur Berechnung. Dazu der

Satz 4.6 *Es sei $\alpha \in C^n(I)$ und $x \in C^{-n}(I)$, etwa $x = \widetilde{D}^n X$ mit $X \in C(I)$. Die Multiplikation $(\alpha, x) \to a\cdot x$ von $C^n(I)\times C^{-n}(I)$ nach $C^{-n}(I)$ mit den beschriebenen Eigenschaften berechnet sich nach der Formel*

$$\alpha\cdot x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\widetilde{D}^{n-k}(D^k\alpha\cdot X) \tag{4.12}$$

(Man vergleiche diese Formel mit Gl. 4.8.)

Beweis: Es sei vorerst $n = 1$. Mit Gl. 4.10 erhält man

$$\alpha x = \widetilde{D}(\alpha x_1) - (D\alpha)\,x_1.$$

mit $x = \widetilde{D}x_1$ und stetigem x_1. Für $n > 1$ folgt Gl. 4.12 durch Iteration.

Beispiel 4.3 *Man berechne $(2+s^2)\cdot\delta_0$ durch direkte Anwendung der Formel 4.12:*
Lösung: Aus früheren Kapiteln ist bekannt, daß gilt: $\delta_0 = \widetilde{D}^2 s_+$. Somit gilt mit Gl. 4.12

$$\begin{aligned}
(2+s^2)\cdot\delta_0 &= \sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{2}{k}\widetilde{D}^{2-k}\left\{D^k(2+s^2)\cdot s_+\right\} \\
&= \widetilde{D}^2\left\{(2+s^2)\cdot s_+\right\} - 2\widetilde{D}\left\{D(2+s^2)\cdot s_+\right\} + D^2(2+s^2)\cdot s_+ \\
&= \widetilde{D}^2\left\{2s_+ + s_+^3\right\} - 2\widetilde{D}\left\{2s_+^2\right\} + 2s_+ \\
&= 2\delta_0 + 6s_+ - 8s_+ + 2s_+ \\
&= 2\delta_0.
\end{aligned}$$

Beispiel 4.4 *Es sei $s = s_+ - s_-$ und $s^{-1} = s_+^{-1} - s_-^{-1}$. Man zeige die Gültigkeit der Beziehungen*

$$s\cdot\delta_0 = 0, \tag{4.13}$$
$$s\cdot s^{-1} = 1. \tag{4.14}$$

Lösung: Es wird Gl. 4.13 gezeigt. Es gilt

$$H_0 = \widetilde{D}s_+ = \widetilde{D}(s\cdot H_0).$$

Mit der Leibnitz'schen Regel folgt weiter

$$H_0 = Ds\cdot H_0 + s\cdot\widetilde{D}H_0 = H_0 + s\cdot\delta_0,$$

und somit $s\cdot\delta_0 = 0$.

Die Siebeigenschaft der Delta - Distribution

Folgende Eigenschaft der Delta - Distribution ist vor allem für die Integrationstheorie von Distributionen und ihre Anwendungen von großer Bedeutung.

Satz 4.7 *Es sei I ein kompaktes Intervall mit 0 als inneren Punkt und $x \in C(I)$. Dann gilt*

$$x\cdot\delta_0 = x(0)\cdot\delta_0. \tag{4.15}$$

Ebenso erhält man für $a \in I^o$

$$x\cdot\delta_a = x(a)\cdot\delta_a. \tag{4.16}$$

Allgemeiner gilt

$$x\cdot\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{(k)}(0)\cdot\delta_0^{(n-k)} \tag{4.17}$$

für entsprechend glattes x.

Beweis: Es wird Gl. 4.15 für $x \in C^2(I)$ gezeigt. Mit der Leibnitz'schen Regel erhält man dann einerseits

$$\widetilde{D}(x \cdot H_0) = Dx \cdot H_0 + x \cdot \delta_0$$

und mit der Ableitungsformel Gl. 3.6 für stückweise glatte Funktionen andererseits

$$\widetilde{D}(x \cdot H_0) = Dx \cdot H_0 + x(0) \cdot \delta_0.$$

Der Vergleich der beiden Darstellungen liefert das Behauptete. Die Behauptung kann mit etwas mehr Theorie auch für nur in 0 stetiges x gezeigt werden.

Beispiel 4.5 *Es sei $r \in \dot{\mathbf{N}}$. Man zeige die Gültigkeit der Beziehung*

$$s^r \delta_0^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r \geq n+1 \\ (-1)^r \binom{n}{r} r! \delta_0^{(n-r)} & \text{sonst} \end{cases} . \tag{4.18}$$

Lösung: Die Behauptung folgt sofort durch Einsetzen der Funktion s^r in Gl. 4.17.

Erweiterungsmöglichkeiten der Multiplikation

An einem Beispiel soll demonstriert werden, daß in der Tat keine allgemeine Multiplikation von Distributionen formuliert werden kann. Dazu wird das Produkt

$$s^{-1} \cdot s \cdot \delta_0$$

zuerst als $(s^{-1} \cdot s) \cdot \delta_0$ berechnet. Mit den bisherigen Resultaten gilt $(s^{-1} \cdot s) \cdot \delta_0 = \delta_0$. Berechnet man das Produkt andererseits als $s^{-1} \cdot (s \cdot \delta_0)$, so folgt mit Gl.4.13 die Beziehung $s^{-1} \cdot (s \cdot \delta_0) = 0$. Das zeigt, das in diesem Fall etwa die Assoziativität nicht halten würde.

Es wird kurz eine mögliche vernünftige Erweiterung des hier eingeführten Produkts $(\alpha, x) \to a \cdot x$ von $C^n(I) \times C^{-n}(I)$ nach $C^{-n}(I)$ erwähnt. Mit dem Prinzip von Recollement des morceaux kann etwa das Produkt zweier Delta - Distributionen $\delta_a \cdot \delta_b$ mit $a \neq b$ eingeführt werden. Präziser formuliert: Es seien x und y zwei Distributionen auf dem kompakten Intervall I und $(I_1, ..., I_m)$ eine (wie übliche) Überdeckung von I mit den zusätzlichen Eigenschaften:

- Für jedes I_i gilt: x hat in I_i genau eine isolierte Singularität und es gilt $x \in C^{-n_i}(I_i)$ und $y \in C^{n_i}(I_i)$ mit einem $n_i \in \mathbf{N}$ oder umgekehrt.
- Die Singularitäten liegen nicht in den Überlappungen $I_i \cap I_j$.

Dann kann man das Produkt $x \cdot y$ auf I erklären, indem man es auf jedem I_i definiert und dann das Prinzip von Recollement des morceaux anwendet.

Rationale Funktionen als Distributionen

Als Anwendung der eben eingeführten Multiplikation und des Prinzips von Recollement des morceaux kann gezeigt werden, daß jede rationale Funktion als Distribution betrachtet werden kann. Es sei $x(t) = p(t)/q(t)$ eine rationale Funktion auf I. Man wählt nun eine Überdeckung $(I_1, ..., I_m)$ von I (mit den üblichen Eigenschaften) so, daß in jedem I_i nur eine Polstelle auftritt. Die Überdeckung muß so gewählt werden, daß die Polstellen jedoch nicht in einer der Überlappungen $I_i \cap I_j$ zu liegen kommen. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird hier nur der Fall mit zwei Polstellen a und b betrachtet. Es sei (I_1, I_2) die Überdeckung des Intervalls I mit $a \in I_1, b \in I_2$ und $a, b \notin I_1 \cap I_2$. Weiters sei

$$x(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \qquad \text{mit } q(a) = q(b) = 0.$$

Dann gilt

$$q(t) = (t-a)^k \widetilde{q}_1(t) \qquad \text{mit } \widetilde{q}_1(a) \neq 0$$

bzw.

$$q(t) = (t-b)^l \widetilde{q}_2(t) \qquad \text{mit } \widetilde{q}_2(b) \neq 0$$

mit den Polynomen $\widetilde{q}_1$ und $\widetilde{q}_2$ und $k + l = grad(q)$. Für die rationale Funktion x ergibt sich dann

$$x(t) = \frac{p(t)}{(t-a)^k \widetilde{q}_1(t)} = \frac{p(t)}{\widetilde{q}_1(t)} (t-a)^{-k} \tag{4.19}$$

bzw.

$$x(t) = \frac{p(t)}{(t-b)^l \widetilde{q}_2(t)} = \frac{p(t)}{\widetilde{q}_2(t)} (t-b)^{-l}, \tag{4.20}$$

also jeweils ein Produkt einer glatten Funktion mit einer Distribution. Verwendet man nun für x auf I_1 die Darstellung nach Gl. 4.19 und auf I_2 jene nach Gl. 4.20, so lassen sich nach Recollement des morceaux die beiden Darstellungen von x zu einer eindeutig bestimmten Distribution auf I zusammenstückeln.

Mit der gleichen Vorgangsweise zeigt man, daß auch alle meromorphen Funktionen als Distributionen betrachtet werden können.

4.4 Division

Im folgenden Abschnitt wird das Problem der Division von Distributionen bzw. die Lösbarkeit von Gleichungen der Form

$$\alpha \cdot y = x \tag{4.21}$$

mit gegebenem, glattem α und gegebener Distribution x betrachtet. Es stellt sich also die Frage, ob x/α als Distribution aufgefaßt werden kann. Es wird sich herausstellen, daß diese Aufgabe für eine große Klasse von Funktionen α lösbar ist. Es wird an dieser Stelle aber vorerst der einfachste Fall $\alpha(s) = s$ betrachtet.

Satz 4.8 *Es sei I ein kompaktes Intervall mit 0 als inneren Punkt. Ist $x \in C^{-\infty}(I)$, dann existiert eine Distribution $y \in C^{-\infty}(I)$, so daß die Gleichung*

$$s \cdot y = x \tag{4.22}$$

erfüllt ist. Die Lösung y ist bis auf einen Term $c \cdot \delta_0$ (mit einer Konstanten c) eindeutig bestimmt.

<u>Beweis:</u> In diesem Beweis wird eine Funktion y angegeben, die Gleichung 4.22 erfüllt. Die Distribution x habe eine Darstellung $x = \widetilde{D}^n X$ mit einem $n \in \mathbf{N}$ und einer stetigen Funktion X. Weiters seien a und b die Endpunkte des Intervalls I. Man führt nun die Funktion

$$Y = \begin{cases} s^n J_a\left(\frac{X}{t^{n+1}}\right) = s^n \int_a^s \frac{X}{t^{n+1}} dt & \text{für } s < 0 \\ s^n J_b\left(\frac{X}{t^{n+1}}\right) = s^n \int_b^s \frac{X}{t^{n+1}} dt & \text{für } s > 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

ein. Für diese (unstetige) Funktion gelten die Abschätzungen

$$|Y(s)| \leq C \int_a^s -\frac{1}{t} dt = C\left(\ln(-a) - \ln(-s)\right) \qquad \text{für } s < 0$$

bzw.

$$|Y(s)| \leq C\left(\ln b - \ln s\right) \qquad \text{für } s > 0$$

mit $C = \sup|X(t)|$. Damit ist Y Lebesgue- (bzw. im uneigentlichen Sinn Riemann-) integrierbar und daher eine Distribution. Es wird sich nun zeigen, daß die Distribution $y = \widetilde{D}^{n+1} Y$ eine Lösung der Gleichung 4.22 ist. In der Tat folgt aus der Leibnitz'schen Regel

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^{n+1}(s \cdot Y) &= \widetilde{D}^n \widetilde{D}\,(s \cdot Y) \\
&= \widetilde{D}^n \left(s \cdot \widetilde{D} Y + Y\right) \\
&= \widetilde{D}^{n-1} \widetilde{D} \left(s \cdot \widetilde{D} Y + Y\right) \\
&= \widetilde{D}^{n-1} \left(s \cdot \widetilde{D}^2 Y + 2\widetilde{D} Y\right) \\
&= \qquad \vdots \\
&= s \cdot \widetilde{D}^{n+1} Y + (n+1)\widetilde{D} Y \\
&= s \cdot y + (n+1)\widetilde{D}^n Y
\end{aligned}$$

Andererseits ist die Funktion $s \cdot Y$ stückweise glatt und man erhält mit der Ableitungsformel stückweise glatter Funktionen

$$\widetilde{D}(s \cdot Y) = (n+1)Y + X.$$

Nach mehrmaliger Anwendung der Formel fogt

$$\widetilde{D}^{n+1}(s \cdot Y) = (n+1)\widetilde{D}^n Y + x.$$

Durch Vergleich der beiden Gleichungen erhält man daher das gewünschte Ergebnis $s \cdot y = x$. Die Distribution y ist wie im Satz formuliert nicht die einzige Lösung von Gl. 4.22.

Nach Gl. 4.13 gilt $s \cdot (c\delta_0) = 0$ mit einer beliebigen Konstanten c. Vielfache der Delta - Distribution erfüllen somit die homogene Gleichung

$$s \cdot y = 0. \tag{4.24}$$

Daß dies die einzigen Lösungen der homogenen Gleichung sind wird erst in Kapitel 5.3 gezeigt. Addiert man zur oben konstruierten speziellen Lösung y der inhomogenen Gleichung 4.22 Vielfache von δ_0, so erhält man somit wieder eine Lösung.

Satz 4.9 *Es sei I ein kompaktes Intervall mit 0 als inneren Punkt und $r \in \mathbf{N}$. Ist $x \in C^{-\infty}(I)$, dann existiert eine Distribution $y \in C^{-\infty}(I)$, so daß die Gleichung*

$$s^r \cdot y = x \tag{4.25}$$

erfüllt ist. Die Lösung y ist bis auf einen Term

$$\sum_{j=0}^{r-1} c_j \delta_0^{(j)} \tag{4.26}$$

mit Konstanten c_j eindeutig bestimmt.

<u>Beweis:</u> Durch Induktion findet man, daß eine Distribution y auf I existiert, die die Gleichung 4.25 erfüllt. In der Tat ist die Distribution $y = \widetilde{D}^{n+r} Y$ mit

$$Y = \begin{cases} \frac{s^n}{(r-1)!} \int_a^s (s-t)^{r-1} \frac{X}{t^{n+r}} dt & \text{für } s < 0 \\ \frac{s^n}{(r-1)!} \int_b^s (s-t)^{r-1} \frac{X}{t^{n+r}} dt & \text{für } s > 0 \end{cases}$$

eine Lösung dieser Gleichung. Mit Gl. 4.18 gilt $s^r \cdot \delta_0^{(j)} = 0$ für $0 \leq j \leq r-1$, somit erfüllt jede Distribution der Form $\sum_{j=0}^{r-1} c_j \delta_0^{(j)}$ die (homogene) Gleichung

$$s^r \cdot y = 0. \tag{4.27}$$

Addiert man also eine Linearkombination der Delta - Distribution und ihrer ersten $r-1$ Ableitungen zu einer Lösung y der inhomogenen Gleichung, so erhält man dadurch wieder eine Lösung. Wie allerdings in Kapitel 5.3 gezeigt wird sind Distributionen nach Gl. 4.26 die einzigen Lösungen der homogenen Gleichung 4.27, somit ist die Lösung y der inhomogenen Gleichung 4.25 bis auf Linearkombinationen der Delta - Distribution und deren Ableitungen eindeutig bestimmt.

Mit diesem Ergebnis und mit dem Prinzip von Recollement des morceaux kann nun für beliebige Polynome $\alpha = p$ (und mit dem selben Beweisprinzip sogar für beliebige Funktionen auf der komplexen Ebene, die nicht mehr als endlich viele singuläre Nullstellen besitzen) die Gleichung $\alpha \cdot y = x$ gelöst werden. Es gilt also der

Satz 4.10 *Es sei I ein kompaktes Intervall, $x \in C^{-\infty}(I)$ und α ein Polynom (jedoch nicht das Nullpolynom). Dann existiert eine Distribution y, so daß die Gleichung*

$$\alpha \cdot y = x \tag{4.28}$$

erfüllt ist.

Beweis: Es sei p ein Polynom. Man wähle eine Überdeckung $(I_1, ..., I_m)$ von I (mit den üblichen Eigenschaften) so, daß in jedem I_i nur eine Nullstelle von p auftritt. Die Überdeckung muß so gewählt werden, daß die Nullstellen jedoch nicht in einer der Überlappungen $I_i \cap I_j$ zu liegen kommen. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird hier nur der Fall mit zwei Nullstellen a und b betrachtet. Es sei also (I_1, I_2) die Überdeckung des Intervalls I mit $a \in I_1, b \in I_2$ und $a, b \notin I_1 \cap I_2$. Dann gilt

$$p(s) = (s-a)^k \widetilde{p}_1(s) \qquad \text{mit } \widetilde{p}_1(a) \neq 0$$

bzw.

$$p(s) = (s-b)^l \widetilde{p}_2(s) \qquad \text{mit } \widetilde{p}_2(b) \neq 0$$

mit den Polynomen $\widetilde{p}_1$ und $\widetilde{p}_2$ und $k + l = grad(p)$. In I_1 gilt somit

$$(s-a)^k \cdot y = \frac{x}{\widetilde{p}_1(s)} =: x_1,$$

mit $x_1 \in C^{-\infty}(I)$, in I_2 gilt

$$(s-b)^l \cdot y = \frac{x}{\widetilde{p}_2(s)} =: x_2,$$

mit $x_2 \in C^{-\infty}(I)$. Nach einer Verschiebung um a bzw. b ist in beiden Fällen das Problem auf den Fall $s^r \cdot y = x$ reduziert, welcher bereits gelöst ist. Für die entsprechenden Lösungen y_1 und y_2 gilt $y_1 = y_2 = y$ in $I_1 \cap I_2$. Nach recollement des morceaux lassen sich die beiden Darstellungen von y zu einer eindeutig bestimmten Distribution auf I zusammenstückeln.

4.5 Hintereinanderausführung

Es wird hier kurz die Erweiterung der Komposition (bzw. Hintereinanderausführung oder Variablentransformation) für Distributionen betrachtet. Die Erweiterung der Multiplikation wurde so durchgeführt, daß die Gültigkeit der Produktregel gesichert war. Die Rolle der Produktregel nimmt in diesem Erweiterungsprozeß die Kettenregel ein. Die für glatte Funktionen X und Φ gültige Regel

$$D(X \circ \Phi) = (DX \circ \Phi)\, \Phi' \tag{4.29}$$

soll also ihre Gültigkeit beibehalten. Stellt man diese Gleichung um, so folgt

$$DX \circ \Phi = \left(\frac{1}{\Phi'} D\right) (X \circ \Phi).$$

Durch Iteration erhält man

$$D^n X \circ \Phi = \left(\frac{1}{\Phi'} D\right)^n (X \circ \Phi), \tag{4.30}$$

wobei $\left(\frac{1}{\Phi'} D\right)^n$ den Operator

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\Phi'} D\right) \left(\frac{1}{\Phi'} D\right) \cdots \left(\frac{1}{\Phi'} D\right)}_{\text{n Mal}} \tag{4.31}$$

bezeichnet. Es wird sich zeigen, daß für die Hintereinanderausführung $x \circ \Phi$ ($x \in C^{-\infty}(I)$ mit $x = \widetilde{D}^n X, \Phi \in C^{\infty}(I)$) die Beziehung 4.30 quasi als Definition benutzt wird. Diese Aussage wird in Satz 4.12 zum Vorschein kommen. Es gilt der

Satz 4.11 *Es seien I und J kompakte Intervalle und $\Phi : I \to J$ eine glatte Abbildung (etwa $\Phi \in C^{n+1}(I)$) von I nach J mit $\Phi' \neq 0$. Dann existiert zu jedem n ein eindeutig bestimmter, linearer, stetiger Operator $x \to x \circ \Phi$ von $C^{-n}(J)$ nach $C^{-n}(I)$ mit den Eigenschaften:*

1. *Für $x \in C(J)$ hat $(x \circ \Phi) \in C(I)$ die übliche Bedeutung.*

2. *Die Kettenregel behält in der Form*

$$\widetilde{D}(x \circ \Phi) = \left(\widetilde{D}x \circ \Phi\right) \Phi' \tag{4.32}$$

bzw.

$$\widetilde{D}\left(x(\Phi(t))\right) = \left(\widetilde{D}x(\Phi(t))\right) \Phi'(t) \tag{4.33}$$

ihre Gültigkeit.

<u>Induktionsbeweis:</u>
$n = 0$: In diesem Fall nehme man die übliche Hintereinanderausführung von Funktionen:

$$\begin{array}{llll} \circ : & C(J) & \to & C(I) \\ & x & \to & x \circ \Phi \end{array}.$$

$n \to n + 1$: Es sei $\Phi \in C^{n+1}(I)$ und $x \in C^{-(n+1)}(J)$, etwa $x = \widetilde{D}^{n+1} X = \widetilde{D}x_1$ mit einer auf J stetigen Funktion X und $x_1 = \widetilde{D}^n X$. Die Induktionshypothese ist, daß bereits eine Hintereinanderausführung

$$\begin{array}{llll} \circ : & C^{-n}(J) & \to & C^{-n}(I) \\ & x_1 & \to & x_1 \circ \Phi \end{array}$$

existiert. Es soll dann die Gleichung

$$\begin{aligned} \widetilde{D}(x_1 \circ \Phi) &= \left(\widetilde{D}x_1 \circ \Phi\right) \Phi' \\ &= (x \circ \Phi)\Phi' \end{aligned}$$

gelten. Der Ausdruck $(x \circ \Phi)$ auf der rechten Seite ist jedoch an dieser Stelle noch gar nicht definiert. Es liegt daher die Definition

$$\begin{aligned} (x \circ \Phi) \quad &:= \frac{1}{\Phi'} \widetilde{D}(x_1 \circ \Phi) \\ &= \frac{1}{\Phi'} \widetilde{D}(\widetilde{D}^n X \circ \Phi) \end{aligned} \tag{4.34}$$

nahe. Man beachte, daß die rechte Seite aufgrund der Induktionshypothese bereits definiert ist. Man muß jetzt nur noch zeigen, daß diese Hintereinanderausführung wohldefiniert ist, das heißt, daß für zwei verschiedene stetige Funktionen X und X_1 mit

$x = \widetilde{D}^{n+1}X = \widetilde{D}^{n+1}X_1$ obige Definition das gleiche Ergebnis liefert. Es gilt $X - X_1 = p$ mit $p \in P_n(J)$. Folgende Gleichung soll gelten:

$$\frac{1}{\Phi'}\widetilde{D}(\widetilde{D}^n X \circ \Phi) = \frac{1}{\Phi'}\widetilde{D}(\widetilde{D}^n X_1 \circ \Phi). \tag{4.35}$$

Sie ist äquivalent zu

$$\widetilde{D}\left\{\left(\widetilde{D}^n X \circ \Phi\right) - \left(\widetilde{D}^n X_1 \circ \Phi\right)\right\} = 0$$

bzw.

$$\widetilde{D}\left\{\left(\widetilde{D}^n X - \widetilde{D}^n X_1\right) \circ \Phi\right\} = 0$$

bzw.

$$\widetilde{D}\left\{\left(\widetilde{D}^n (X - X_1)\right) \circ \Phi\right\} = 0.$$

Es gilt $\widetilde{D}^n(X - X_1) = c$ mit einer Konstanten c, daher ist die Gleichung weiters äquivalent zu

$$\widetilde{D}\left\{c \circ \Phi\right\} = 0. \tag{4.36}$$

Ist c eine konstante Funktion (mit Wert c) auf J, so ist $c \circ \Phi$ eine konstante Funktion (ebenfalls mit Wert c) auf I. Gl. 4.36 und somit wegen der Äquivalenz auch Gl. 4.35 sind daher wahre Aussagen. Somit ist die Wohldefiniertheit der so eingeführten Hintereinanderausführung gezeigt.

Es existiert somit eine Hintereinanderausführung mit den Eigenschaften des Satzes, man kennt jedoch an dieser Stelle noch keine explizite Formel zur Berechnung. Dazu der

Satz 4.12 *Es seien I, J, x und Φ wie oben und $x = \widetilde{D}^n X$ mit auf J stetigem X. Dann gilt die für die Hintereinanderausführung*

$$\begin{array}{rccc} \circ: & C^{-n}(J) & \to & C^{-n}(I) \\ & x & \to & x \circ \Phi \end{array}$$

die Formel

$$x \circ \Phi = \left(\frac{1}{\Phi'}\widetilde{D}\right)^n (X \circ \Phi). \tag{4.37}$$

Beweis: Es sei vorerst $n = 1$. Mit Gl. 4.34 erhält man

$$(x \circ \Phi) := \frac{1}{\Phi'}\widetilde{D}(x_1 \circ \Phi)$$

mit $x = \widetilde{D}x_1$ und stetigem x_1. Für $n > 1$ folgt Gl. 4.37 durch Iteration.

Bemerkung: Die Operatoren $\widetilde{\tau}_h$ und $\widetilde{\rho}_{I,J}$ können als Hintereinanderausführungen (Kompositionen) in diesem Sinn betrachtet werden. Φ ist im Fall der Verschiebung die Abbildung $t \to t - h$ und im Fall der Einschränkung die natürliche Einbettung von I in J.

Beispiel 4.6 *Man zeige die Gültigkeit der Beziehungen*

$$\delta_0(kt) = \frac{1}{|k|}\delta_0(t) \qquad (4.38)$$

$$\delta_0^{(n)}(kt) = \frac{1}{|k|^n}\delta_0(t) \qquad (4.39)$$

für $k \neq 0$.
Lösung: Aus

$$\delta_0 = \widetilde{D}^2 t_+ = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$

folgt mit Gl. 4.37 $\delta_0 \circ \Phi = \left(\frac{1}{k}\widetilde{D}\right)^2 (t_+ \circ \Phi)$. *Für* $k > 0$ *gilt nun*

$$t_+ \circ \Phi = \begin{cases} 0 & kt < 0 \\ kt & kt > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ kt & t > 0 \end{cases} = kt_+$$

und somit

$$\begin{aligned} \delta_0 \circ \Phi &= \left(\frac{1}{k}\widetilde{D}\right)^2 (t_+ \circ \Phi) \\ &= \left(\frac{1}{k}\widetilde{D}\right)\left(\frac{1}{k}\widetilde{D}\right)(t_+ \circ \Phi) \\ &= \left(\frac{1}{k}\widetilde{D}\right)\left(\frac{1}{k}\widetilde{D}\right)(kt_+) \\ &= \left(\frac{1}{k}\widetilde{D}\right) H_0 \\ &= \frac{1}{k}\delta_0. \end{aligned}$$

Ähnlich erhält man für $k < 0$ *die Beziehung* $\delta_0 \circ \Phi = -\frac{1}{k}\delta_0$.

Wie schon im Fall der Multiplikation kann auch die Definition der Hintereinanderausführung mit Recollement des morceaux erweitert werden. Es sei dazu $(I_1, ..., I_n)$ mit kompakten Intervallen I_i wieder eine passende Überdeckung von I, so daß

- $\rho_{I,I_i}\Phi$ erfüllt die oben geforderten Bedingungen

oder

- $\widetilde{\rho}_{I,I_i}x$ ist stetig (dann genügt auch, daß $\rho_{I,I_i}\Phi$ stetig ist)

Unter diesen Voraussetzungen kann $x \circ \Phi$ auf jedem I_i und mit Recollement des morceaux daher auf ganz I definiert werden. Mit dieser Methode können dann etwa Ausdrücke wie $\delta_0(t^2 - a^2)$ (mit $a \neq 0$) eingeführt werden.

Kapitel 5

Distributionen auf offenen Intervallen

5.1 Definition und Eigenschaften

In diesem Kapitel werden Distributionen auf $\mathbf{R}$ beziehungsweise Distributionen auf offenen Intervallen eingeführt. Dazu folgende

Definition 5.1 *Es sei U ein offenes Intervall und $\mathcal{I}(U)$ die Familie aller nicht degenerierten, abgeschlossenen Teilintervalle von U. Man erklärt nun eine Distribution auf U durch die Familie $\{x_I \mid I \in \mathcal{I}(U)\}$, wobei x_I eine Distribution auf I ist, für die*

$$\rho_{I,I\cap J}x_I = \rho_{J,I\cap J}x_J,$$

falls I und $J \in \mathcal{I}(U)$ Intervalle mit nicht degeneriertem Durchschnitt sind.

Ohne Beweis sei bemerkt, daß man zur Definition einer Distribution auf U nicht alle kompakten Teilintervalle von U heranziehen muß. Als Beispiel wird hier eine Definition für Distributionen auf $\mathbf{R}$ angeführt, die im Fall $U = \mathbf{R}$ zur vorangegangenen äquivalent ist:

Definition 5.2 *Eine* **Distribution auf R** *ist eine Folge (x_n) von Distributionen mit den Eigenschaften*

a) $\bigwedge\limits_{n\in\mathbf{N}} x_n \in C^{-\infty}[-n,n]$, also für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist x_n ist eine Distribution auf dem kompakten Intervall $[-n,n]$.

b) $\bigwedge\limits_{n\in\mathbf{N}} \widetilde{\rho}_{[-(n+1),n+1],[-n,n]}x_{n+1} = x_n$, für jedes $n \in \mathbf{N}$ stimmt also die Einschränkung von x_{n+1} auf das Intervall $[-n,n]$ mit x_n überein.

Ein Beispiel einer Distribution auf $\mathbf{R}$ ist etwa

$$T_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k. \tag{5.1}$$

Die Folge (x_n) kann hier durch $x_n = \sum_{k\in[-n,n]} \delta_k$ angegeben werden. Ein weiteres Beispiel ist

$$T_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k^{(k)} \tag{5.2}$$

mit $x_n = \sum_{k\in[-n,n]} \delta_k^{(k)}$. Als Beispiel aus $C^{-\infty}([0,\infty[)$ kann man etwa

$$T_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \tag{5.3}$$

angeben.

Es folgen einige Eigenschaften bzw. Definitionen für Distributionen auf $\mathbf{R}$ bzw. auf offenen Intervallen U, die aus obiger Definition bzw. aus den entsprechenden Eigenschaften von Distributionen auf kompakten Intervallen folgen.

I) Jede auf $\mathbf{R}$ (bzw. U) integrierbare Funktion kann als Distribution auf der entsprechenden Menge betrachtet werden.

II) Die Definition der distributionellen Ableitung wird folgendermaßen erweitert: Es sei $x \in C^{-\infty}(\mathbf{R})$ (bzw. $x \in C^{-\infty}(U)$). Die Distribution x ist dabei definiert durch die Familie (x_n). Man definiert nun die distributionelle Ableitung von x durch die Familie $(\widetilde{D}x_n)$, die natürlich wieder mit $\widetilde{D}x$ bezeichnet wird.

III) Der Raum der Distributionen auf $\mathbf{R}$ erfüllt die zu beginn formulierten Axiome mit Ausnahme der Tatsache, daß Distributionen existieren, die keine Darstellung der Form $x = \widetilde{D}^n X$ mit $X \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ besitzen (Man betrachte etwa die Distribution $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^{(n)}$). Darstellungen der Form $x = \widetilde{D}^n X$ mit stetigem X existieren dann nur für Einschränkungen solcher Distributionen (etwa auf beschränkte Intervalle). Eine Distribution, die für ein $n \in \mathbf{N}$ die *n.te* Ableitung einer stetigen Funktion auf $\mathbf{R}$ ist, wird als **Distribution endlicher Ordnung** bezeichnet.

IV) Ähnlich wie bei Distributionen auf kompakten Intervallen können die Operatoren $\widetilde{\rho}_{U,U_1} : C^{-\infty}(U) \to C^{-\infty}(U_1)$ mit $U_1 \subset U$ (Einschränkung) und $\widetilde{\tau}_h : C^{-\infty}(U) \to C^{-\infty}(U+h)$ (Verschiebung) eingeführt werden.

Es gilt folgende Version des Prinzips von recollement des morceaux:

Satz 5.1 *Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$ und es gelte $U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ mit offenen Mengen U_α. Weiters sei $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von Distributionen mit der Eigenschaft $x_\alpha = x_\beta$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$ für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Distribution x auf U mit $\rho_{U,U_\alpha} x = x_\alpha$ und $\rho_{U,U_\beta} x = x_\beta$.*

5.2 Der Träger einer Distribution

Man kann dieses gerade formulierte Prinzip von recollement des morceaux verwenden um den *Träger* einer Distribution zu definieren. Zuvor wird an die Definition

$$Tr(f) := \overline{\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

des Trägers einer stetigen Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ erinnert. Es wird die abgeschlossene Menge aller Punkte herangezogen, in denen f nicht verschwindet. Würde man die offene Menge $\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \neq 0\}$ verwenden, so wären die einpunktigen Mengen der Nullstellen im 'Wirkungsbereich der Funktion' vom Träger ausgeschlossen, was jedoch nicht zweckmäßig wäre. Man kann für den Träger der Funktion auch schreiben:

$$Tr(f) = \mathbf{R} \setminus \{V \mid V \text{ offen}, \rho_{\mathbf{R},V} f = 0\}\,.$$

Motiviert von diesen Überlegungen folgt nun die

Definition 5.3 *Es sei x eine Distribution auf $\mathbf{R}$. Die (abgeschlossene) Menge*

$$Tr(x) := \mathbf{R} \setminus \{V \mid V \text{ offen}, \widetilde{\rho}_{\mathbf{R},V} x = 0\} \tag{5.4}$$

wird als **Träger** *der Distribution x bezeichnet. Ähnlich definiert man den Träger einer Distribution $x \in C^{-\infty}(U)$ mit einer offenen Menge U. Man sagt, die Distribution x hat einen* **kompakten Träger**, *wenn $Tr(x)$ eine kompakte (und somit beschränkte) Teilmenge von $\mathbf{R}$ bzw. U ist.*

Es gilt

$$Tr(\delta_0^{(j)}) = \{0\} \qquad \text{für } j \geq 0. \tag{5.5}$$

In der Tat sind die Delta - Distribution und ihre Ableitungen die einzigen Distributionen mit dieser Eigenschaft. Präziser formuliert gilt der

Satz 5.2 *Es sei x eine Distribution auf $\mathbf{R}$ mit $Tr(x) = \{0\}$. Dann ist x eine endliche Linearkombination der Delta - Distribution und ihrer Ableitungen. x ist also von der Form*

$$\sum_{j=0}^{p} c_j \delta_0^{(j)} \tag{5.6}$$

mit einem $p \in \mathbf{N}$.

Beweis: Man betrachte die Einschränkung $\widetilde{\rho}_{\mathbf{R},[-1,1]} x$ von x auf das Intervall $[-1,1]$. Sie besitzt eine Darstellung $\widetilde{\rho}_{\mathbf{R},[-1,1]} x = \widetilde{D}^r X$ mit einem $r \in \mathbf{N}$ und einem $X \in C[-1,1]$. Wegen $\widetilde{\rho}_{\mathbf{R},[-1,0[} x = 0$ und $\widetilde{\rho}_{\mathbf{R},]0,1]} x = 0$ und Axiom 3) existieren daher Polynome $p_1 \in P_{r-1}([-1,0[)$, $p_2 \in P_{r-1}(]0,1])$, so daß gilt :

$$\begin{aligned} X &= p_1 && \text{auf } [-1,0[, \\ X &= p_2 && \text{auf }]0,1]. \end{aligned}$$

Damit ist X eine stückweise glatte Funktion mit der einzigen Singularität in 0. Das Ergebnis folgt somit aus der Formel für die distributionelle Ableitung stückweise glatter Funktionen.

5.3 Homogene Distributionengleichungen

Es kann nun der bereits zitierte Satz über die Lösungsverhältnisse einer homogenen Gleichung der Art

$$s^r \cdot y = 0 \tag{5.7}$$

mit der unbekannten Distribution y bewiesen werden.

Satz 5.3 *Falls $s^r \cdot y = 0$, dann ist y von der Form*

$$y = \sum_{j=0}^{r-1} c_j \delta_0^{(j)}, \tag{5.8}$$

also eine Linearkombination der Delta - Distribution und ihrer Ableitungen. Umgekehrt folgt aus $y = \sum_{j=0}^{r-1} c_j \delta_0^{(j)}$ die Gleichung $s^r \cdot y = 0$.

Beweis:

- '$\Leftarrow$': Es gelte vorerst $y = \sum_{j=0}^{r-1} c_j \delta_0^{(j)}$. Mit Gl. 4.18 folgt

$$s^r \cdot y = \sum_{j=0}^{r-1} c_j s^r \delta_0^{(j)} = c_0 s^r \delta_0 + ... + c_{r-1} s^r \delta_0^{(r-1)} = 0.$$

- '$\Rightarrow$': Nun sei $s^r \cdot y = 0$. Ist I ein beliebiges offenes Intervall mit $0 \notin I$, so gilt $y = \dfrac{1}{s^r} \cdot 0 = 0$. Somit ist der Träger von y die Nullmenge, es gilt also $Tr(y) = \{0\}$. Aufgrund des vorangegangenen Satzes ist daher $y = \sum_{j=0}^{p} c_j \delta_0^{(j)}$ mit einem endlichen p. Man nehme nun an, daß die höchste auftretende Ableitung der Delta - Distribution von der Ordnung p mit $p \geq r$ sei. Setzt man in die Gleichung $s^r \cdot y = 0$ ein, so folgt aus der Beziehung

$$s^r \cdot y = \sum_{j=0}^{p} c_j s^r \delta_0^{(j)} = \underbrace{c_0 s^r \delta_0 + ... + c_{r-1} s^r \delta_0^{(r-1)}}_{=0} + c_r s^r \delta_0^{(r)} + ... + c_p s^r \delta_0^{(p)} = 0,$$

daß die Koeffizienten $c_r, ..., c_p$ verschwinden müssen. Damit ist y wie behauptet von der Form $y = \sum_{j=0}^{r-1} c_j \delta_0^{(j)}$.

Man vergleiche die Ähnlichkeit dieser Aussage mit den Lösungverhältnissen linearer, homogener Gleichungssysteme

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{5.9}$$

bzw. linearer, homogener Differentialgleichungssysteme

$$\mathbf{x}' - \mathbf{Ax} = \mathbf{0}. \tag{5.10}$$

Auch in diesen beiden Fällen ergeben sich die Lösungen durch Linearkombination gewisser Basisvektoren bzw. Basisfunktionen. Die Rolle dieser Basisvektoren übernehmen hier die Delta - Distribution und ihre Ableitungen.

Kapitel 6

Grenzwerte und Stetigkeit

Es werden nun in der Folge Grenzwerte einer Distribution für $s \to \pm\infty$ bzw. für $s \to a$ mit $a \in \mathbf{R}$ eingeführt. Es sei an dieser Stelle an die Regel von Del' Hospital für Grenzwerte von Funktionen erinnert:

Satz 6.1 *Sind X und Y auf $I = [a, b]$ differenzierbare Funktionen, $Y(t) \neq 0$, mit den folgenden Eigenschaften*

1. $\lim\limits_{t\to b} X(t) = 0, \lim\limits_{t\to b} Y(t) = 0$ *oder* $\lim\limits_{t\to b} X(t) = \infty, \lim\limits_{t\to b} Y(t) = \infty$

2. $\lim\limits_{t\to b} \dfrac{X'(t)}{Y'(t)} = L$ *mit* $L \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

dann gilt

$$\lim_{t\to b} \frac{X(t)}{Y(t)} = \lim_{t\to b} \frac{X'(t)}{Y'(t)} = L. \tag{6.1}$$

Entsprechendes gilt für die Grenzprozesse $t \to \pm\infty$.

Treten bei $\lim\limits_{t\to b}\{X'(t)/Y'(t)\}, \lim\limits_{t\to b}\{X''(t)/Y''(t)\}, ...$ immer noch Grenzwerte der Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ auf und existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t\to b}\{X^{(n)}(t)/Y^{(n)}(t)\} = L$, so gilt

$$\lim_{t\to b} \frac{X(t)}{Y(t)} = ... = \lim_{t\to b} \frac{X^{(n)}(t)}{Y^{(n)}(t)} = L, \tag{6.2}$$

und entsprechendes für Grenzprozesse der Form $t \to \pm\infty$. Gilt speziell $Y(t) = t^n$, so folgt daraus etwa

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t^n} = \lim_{t\to\infty} \frac{DX(t)}{nt^{n-1}} = ... = \lim_{t\to\infty} \frac{D^n X(t)}{n!}, \tag{6.3}$$

bzw.

$$\lim_{t\to\infty} D^n X(t) = n! \lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t^n}. \tag{6.4}$$

6.1 Grenzwerte der Form $s \to \pm\infty$

Für die Definition eines Grenzwertbegriffes für Distributionen wird die Beziehung 6.4 als Ausgangspunkt gewählt. Dazu folgende

Definition 6.1 *Es sei vorerst I ein Intervall der Form $[a, \infty[$ und x eine Distribution auf I. Man sagt $\lim\limits_{s\to\infty} x(s)$ existiert und ist gleich λ mit $\lambda \in \mathbf{R}$, falls*

$$\bigvee_{n\in\mathbf{N}} \ \bigvee_{b>a} \ \bigvee_{X\in C[b,\infty[} \quad x\,|_{[b,\infty[} = \widetilde{D}^n X \quad \text{und} \quad n! \lim_{s\to\infty} \frac{X(s)}{s^n} = \lambda, \tag{6.5}$$

wobei der in Gl. 6.5 auftretende Limes klassisch zu betrachten ist. Man schreibt dann

$$\lim_{s\to\infty} x(s) = \lambda. \tag{6.6}$$

Für links unbeschränkte Intervalle wird der Grenzwert analog eingeführt.

Man kann zeigen, daß diese Definition wieder unabhängig von der Darstellung $x = \widetilde{D}^n X$ ist. Gilt also $x = \widetilde{D}^n X = \widetilde{D}^n X_1$ mit $X \neq X_1$ so erhält man in beiden Fällen das gleiche Ergebnis.

Gilt insbesondere $\lambda = 0$, so folgt

$$\lim_{s\to\infty} x(s) = 0 \Leftrightarrow \lim_{s\to\infty} \frac{X(s)}{s^n} = 0, \tag{6.7}$$

wobei der rechte Grenzwert klassisch zu betrachten ist.

Man zeigt leicht die Gültigkeit der üblichen Rechenregeln für Grenzwerte. So gilt etwa

$$\lim_{s\to\infty} (x(s) \pm y(s)) = \lim_{s\to\infty} x(s) \pm \lim_{s\to\infty} y(s), \tag{6.8}$$

$$\lim_{s\to\infty} \{a x(s)\} = a \cdot \lim_{s\to\infty} x(s) \tag{6.9}$$

falls die Grenzwerte auf den rechten Seite der Gleichungen existieren.

Beispiel 6.1 *Der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \cos(t)$ existiert im klassischen Sinn nicht, da $\cos(t)$ oszilliert. Es gilt jedoch $\cos(t) = \widetilde{D}\sin(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\sin(t)}{t} = 0$ im klassischen Sinn. Damit gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \cos(t) = 0 \tag{6.10}$$

im distributionellen Sinn. Dies ist kein Widerspruch zur klassischen Theorie, da $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}$ kein Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ ist, und daher die Regel von Del' Hospital klassisch nicht angewendet werden darf. Im distributionellen Sinn wurde Del' Hospital in der Definition verwendet, man braucht sich daher um keine Gültigkeitsbedingung kümmern.

Beispiel 6.2 *Der Grenzwert $\lim\limits_{s\to\infty} \sum\limits_{n\in Z} \delta_n(s)$ existiert weder im klassischen noch im distributionellen Sinn.*

6.2 Grenzwerte der Form $s \to a$

Der Grenzwert einer Funktion $x(t)$ für $t \to a$ mit $a \in I$ wurde so definiert, daß sein Wert unabhängig vom Funktionswert $x(a)$ ist. Die Funktion muß in a nicht einmal definiert sein, trotzdem können der Grenzwert - oder zumindest die links- und rechtsseitigen Grenzwerte - existieren. Man wird nun auch bei Distributionen eine Grenzwertdefinition formulieren, die eine ähnliche Argumentation zuläßt.

Definition 6.2 *Es sei x eine Distribution auf $I = [a, b]$ und $c \in I$.*

1. *Man sagt der* **rechtsseitige Grenzwert** $\lim\limits_{s \to c_+} x(s)$ *existiert und ist gleich λ mit $\lambda \in \mathbf{R}$, falls*

$$\bigvee_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n \in N} \bigvee_{X \in C]c,c+\epsilon[} x \mid_{]c,c+\epsilon[} = \widetilde{D}^n X \quad und \quad n! \lim_{s \to c_+} \frac{X(s)}{(s-c)^n} = \lambda, \tag{6.11}$$

wobei der in Gl. 6.11 auftretende Limes klassisch zu betrachten ist. Man schreibt dann

$$\lim_{s \to c_+} x(s) = \lambda. \tag{6.12}$$

Linkswertige Grenzwerte $\lim\limits_{s \to c_-} x(s)$ *werden analog eingeführt.*

2. *Man sagt der* **Grenzwert** $\lim\limits_{s \to c} x(s)$ *existiert und ist gleich λ mit $\lambda \in \mathbf{R}$, falls*

$$\lim_{s \to c_+} x(s) = \lim_{s \to c_-} x(s) = \lambda. \tag{6.13}$$

Man beachte, daß die Darstellung $x = \widetilde{D}^n X$ jeweils nur in der Umgebung von c und nicht in c selbst gelten muß. Die Unabhängigkeit vom Verhalten der Distribution in c ist somit wie beim Grenzwert von Funktionen gegeben.

Beispiel 6.3 *Die Delta -Distribution δ_0 hat wie schon gezeigt wurde den Träger $Tr(\delta_0) = \{0\}$. Für die Einschränkung von δ_0 auf $]0, \epsilon[$ bzw. auf $]-\epsilon, 0[$ mit einem beliebigen $\epsilon > 0$ gilt daher $\widetilde{\rho}_{\mathbf{R},]0,\epsilon[}\delta_0 = 0$ bzw. $\widetilde{\rho}_{\mathbf{R},]-\epsilon,0[}\delta_0 = 0$. Klarerweise gilt daher $\lim\limits_{s \to 0_+} \delta_0(s) = \lim\limits_{s \to 0_-} \delta_0(s) = 0$ und damit*

$$\lim_{s \to 0} \delta_0(s) = 0. \tag{6.14}$$

Auch für die Ableitungen der Delta -Distribution gilt

$$\lim_{s \to 0} \delta_0^{(k)}(s) = 0. \tag{6.15}$$

Die Delta -Distribution und ihre Ableitungen haben zwar in 0 ihre Singularität, jedoch der Grenzwert verschwindet in 0.

6.3 Stetigkeit

I. a. kann man nicht vom Wert einer Distribution an einem festen Punkt sprechen, da das Verhalten von Distributionen fest mit ganzen Intervallen verbunden ist. Trotzdem sollen Aussagen wie '*der Wert der Delta - Distribution im Punkt* 1 *ist* 0' gültig sein. Diese und ähnliche Feinheiten werden von der folgenden Definition erfaßt.

Definition 6.3 *Es sei x eine Distribution auf dem Intervall I, das den Punkt c als inneren Punkt enthält. Man sagt x ist* **stetig** *in c und hat dort den Wert $\lambda \in \mathbf{R}$, falls*

$$\bigvee_{\varepsilon>0} \bigvee_{n\in N} \bigvee_{X\in C]c-\epsilon,c+\epsilon[} x\,|_{]c-\epsilon,c+\epsilon[} = \widetilde{D}^n X \quad und \quad n! \lim_{s\to c} \frac{X(s)}{(s-c)^n} = \lambda, \tag{6.16}$$

wobei der in Gl. 6.16 auftretende Limes klassisch zu betrachten ist.

Man beachte, daß hier die Darstellung $x = \widetilde{D}^n X$ auf einer den Punkt c enthaltenden Umgebung desgleichen gelten muß. Wie bei der Stetigkeitsdefinition von Funktionen geht das Verhalten der Distribution im betrachteten Punkt c - im Gegensatz zur Grenzwertdefinition - in die Definition ein. Die Stetigkeit ist somit eine stärkere Bedingung als jene der Existenz des Grenzwertes in einem Punkt.

Beispiel 6.4 *Die Delta - Distribution hat auf $]-\epsilon,\epsilon[$ die Darstellung $\delta_0(s) = \widetilde{D}^2 s_+$. Es gilt daher*

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0_-} \delta_0(s) &= 2 \lim_{s\to 0_-} \frac{0}{s^2} = 0 \\ \lim_{s\to 0+} \delta_0(s) &= 2 \lim_{s\to 0_-} \frac{s}{s^2} = \infty \end{aligned}$$

somit ist δ_0 in 0 nicht stetig (obwohl der Grenzwert in 0 existiert).

Beispiel 6.5 *Die Distribution $\cos(\frac{1}{s})$ ist in 0 stetig mit Wert 0. Dies folgt aus der Darstellung*

$$\cos(\frac{1}{s}) = 2s \cdot \sin(\frac{1}{s}) - \widetilde{D}(s^2 \cdot \sin(\frac{1}{s})). \tag{6.17}$$

Kapitel 7

Integralrechnug für Distributionen

7.1 Stammdistributionen

Definition 7.1 *Es sei x eine Distribution auf dem kompakten Intervall I. Eine Distribution X auf I mit der Eigenschaft*

$$x = \widetilde{D}X \tag{7.1}$$

heißt **Stammdistribution** *von x.*

Satz 7.1 *Jede Distribution x auf einem kompakten Intervall besitzt eine Stammdistribution. Je zwei verschiedene Stammdistributionen von x unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.*

Beweis: Falls x stetig ist, so wähle man eine klassische Stammfunktion. Aus Analysis 1 ist bekannt, daß sich zwei verschiedene Stammfunktionen um eine Konstante unterscheiden. Ist x nicht stetig, so existiert ein $n \in \mathbf{N}$ und ein $Y \in C(I)$, so daß $x = \widetilde{D}^n Y$. Wählt man $X = \widetilde{D}^{n-1}Y$, so gilt $x = \widetilde{D}X$, X ist daher eine Stammdistribution von x. Die Darstellung $x = \widetilde{D}^n Y$ (und somit die Stammdistribution X) ist jedoch nicht eindeutig. Gilt jedoch $x = \widetilde{D}^n Y = \widetilde{D}^n Y_1$ mit $Y \neq Y_1$, so unterscheiden sich Y und Y_1 nur um ein Polynom $p \in P_{n-1}(I)$. Für die entsprechende Differenz der Stammdistributionen X und X_1 folgt dann

$$X - X_1 = \widetilde{D}^{n-1}Y - \widetilde{D}^{n-1}Y_1 = \widetilde{D}^{n-1}(\underbrace{Y - Y_1}_{\in P_{n-1}(I)}) = const.$$

Entsprechend definiert man Stammdistributionen von Distributionen auf offenen Intervallen U bzw. auf $\mathbf{R}$. Obiger Satz behält auch in diesen Fällen seine Gültigkeit.

Beweis: U kann von einer steigenden Folge (I_n) von kompakten Intervallen überdeckt werden. In dieser Folge gilt also $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$. Ist x eine Distribution auf U, so existiert eine Distribution X_1 auf I_1, so daß $\widetilde{D}X_1 = x$ auf I_1. Genauso existiert eine Distribution X_2 auf I_2, so daß $\widetilde{D}X_2 = x$ auf I_2. Dann unterscheiden sich X_1und X_2 auf I_1 maximal durch eine Konstante. Subtrahiert man diese Konstante von X_2, so stimmen X_1und X_2 auf I_1 überein und überdies ist X_2 immer noch eine Stammdistribution auf I_2. Setzt man diese Vorgangsweise fort, so kann man eine Folge (X_n) konstruieren, so daß auf I_n gilt: $\widetilde{D}X_n = x$. Die X_n sind überdies kompatibel und definieren somit eine Distribution auf U. Diese Distribution hat die Eigenschaften einer Stammfunktion.

Beispiel 7.1 *Die Heaviside Funktion H_0 ist auf jedem beliebigen Intervall, das 0 als inneren Punkt enthält eine Stammdistribution der Deltadistribution. Genauso ist für beliebiges $n \geq 0$ die Distribution $\delta_0^{(n+1)}$ eine Stammdistribution von $\delta_0^{(n)}$.*

7.2 Bestimmte Integrale

Mit der Theorie der Grenzwerte und der Stammdistributionen kann nun die natürliche Erweiterung des bestimmten Integrals auf Distributionen durchgeführt werden. Es sei gleich vorweggenommen, daß beim bestimmten Integral einer Distribution an den Randpunkten des Integrationsintervalls Vorsicht angebracht ist.

Definition 7.2 *Es sei I ein Intervall mit den Endpunkten a und b, welche nicht notwendigerweise dem Intervall angehören müssen, und x eine Distribution auf I. Man sagt, daß x auf I integrierbar ist, bzw. daß das Integral*

$$\int_{a_+}^{b_-} x(s)ds \tag{7.2}$$

existiert, falls eine Stammfunktion X von x auf I existiert, so daß die Grenzwerte $\lim_{s\to a_+} X(s)$ bzw. $\lim_{s\to b_-} X(s)$ existieren. Man definiert dann in natürlicher Weise

$$\int_{a_+}^{b_-} x(s)ds = \lim_{s\to b_-} X(s) - \lim_{s\to a_+} X(s). \tag{7.3}$$

Ähnlich definiert man Intgrale der Form

$$\int_{a_-}^{b_-} \qquad \int_{a_-}^{b_+} \qquad \int_{a_-}^{\infty} \qquad \int_{-\infty}^{b_-} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}$$

etc. Natürlich können in all den Fällen die Integrationsgrenzen auch beliebige innere Punkte des Intervalls sein. Im Fall $\int_{a_-}^{b_+} x(s)ds$ müssen a und b sogar notwendigerweise innere Punkte von I sein.

Beispiel 7.2 *Es sei $I =]-\infty, \infty[$. Auf I ist H_0 eine Stammdistribution von δ_0. Es folgt unmittelbar die wichtige Formeln*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(s)ds = \lim_{s\to 0_+} H_0 - \lim_{s\to 0_-} H_0 = 1. \tag{7.4}$$

Beispiel 7.3 *Es gelten offensichtlich die Formeln*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0^{(n)}(s)ds = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_0^{(n)}(s)ds = 0 \qquad n \geq 1 \tag{7.5}$$

Beispiel 7.4 *Man zeige die Gültigkeit der Beziehung*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega = 0 \qquad \text{für } t \neq 0. \tag{7.6}$$

Lösung: Es gilt $e^{j\omega t} = D_\omega(\frac{1}{jt}e^{j\omega t})$. Die Funktion $\frac{1}{jt}e^{j\omega t}$ ist somit eine Stammfunktion von $e^{j\omega t}$ bezüglich ω. Außerdem gilt im distributionellen Sinn $\lim_{\omega\to\pm\infty} e^{j\omega t} = 0$. Damit hat man

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi jt}(\lim_{\omega\to\infty} e^{j\omega t} - \lim_{\omega\to-\infty} e^{j\omega t}) = 0.$$

Später wird gezeigt, daß die Beziehung (inverse Fourier - Transformation der Funktion $\mathcal{F}(\omega) = 1$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega = \delta_0(t) \tag{7.7}$$

gilt. Man beachte, daß dieses Integral im klassischen Sinn an keiner Stelle konvergiert.

Es gilt der folgende

Satz 7.2 *Es sei x ein Distribution auf $\mathbf{R}$ mit kompakten Träger, etwa mit $Tr(x) = [a, b]$. Dann ist x integrierbar auf $\mathbf{R}$ und es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s)ds = \int_{a_-}^{b_+} x(s)ds. \tag{7.8}$$

Der Träger kann auch ein entartetes Intervall der Form $Tr(x) = \{a\}$ sein. Es gilt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s)ds = \int_{a_-}^{a_+} x(s)ds. \tag{7.9}$$

Beweis: Es sei X eine Stammdistribution von x auf $\mathbf{R}$. Auf $]-\infty, a[$ bzw. $]b, \infty[$ verschwindet x, daher muß gelten $X = c_1$ auf $]-\infty, a[$ bzw. $X = c_2$ auf $]b, \infty[$ mit Konstanten c_1 und c_2. Damit verschwinden die beiden Integrale $\int_{-\infty}^{a_-} x(s)ds$ und $\int_{b_+}^{\infty} x(s)ds$ und es folgt $\int_{a_-}^{b_+} x(s)ds = c_2 - c_1$.

Beispiel 7.5 *Aus dem Satz folgen die Beziehungen*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(s)ds = \int_{0_-}^{0_+} \delta_0(s)ds = 1 \tag{7.10}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(s)ds = \int_{a_-}^{a_+} \delta_a(s)ds = 1. \tag{7.11}$$

7.3 Die Siebeigenschaft der Deltafunktion

In der Theorie der Fourier - Transformation und daher in den Gebieten der Systemtheorie und Nachrichtentechnik spielt die sogenannte Siebeigenschaft der Deltafunktion eine entscheidende Rolle.

Satz 7.3 *Es sei f eine in a stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta_a(s)ds = \int_{a_-}^{a_+} f(s)\delta_a(s)ds = f(a). \tag{7.12}$$

Diese Beziehung wird als **Siebeigenschaft der Deltafunktion** *bezeichnet.*

Beweis: In Satz 4.7 Gl. 4.16 wurde gezeigt, daß für in a stetiges f die Beziehung $f(s)\delta_a(s) = f(a)\delta_a(s)$ gilt. Dieses Produkt hat kompakten Träger und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta_a(s)ds = \int_{a_-}^{a_+} f(a)\delta_a(s)ds = f(a)\int_{a_-}^{a_+} \delta_a(s)ds = f(a).$$

Man schreibt Gl. 7.12 auch oft in der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta_0(s-a)ds = f(a). \tag{7.13}$$

Man erhält unmittelbar die Beziehungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s-a)\delta_0(s)ds = f(-a) \tag{7.14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s+a)\delta_0(s)ds = f(a) \tag{7.15}$$

bzw. das **Faltungsprodukt** der stetigen Funktion f mit der Delta - Distribution

$$f(t) * \delta_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta_0(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\delta_0(\tau)d\tau = f(t). \tag{7.16}$$

Aus dieser Gleichung folgt die wichtige Aussge, daß die Faltung einer stetigen Funktion mit der Delta - Distribution die ursprüngliche Funktion selbst als Ergebnis liefert. In anderen Worten: δ_0 ist das Einselement der Faltungsalgebra.

Beispiel 7.6 *Eine Verallgemeinerung der Siebeigenschaft ist die Beziehung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta_0^{(n)}(s)ds = \left(\frac{d^n}{dt^n}f\right)(0). \tag{7.17}$$

Dies folgt aus Gl. 4.17.

7.4 Wachstumsordnung von Distributionen

Es sei an folgende Definitionen für klassische Funktionen erinnert:

Definition 7.3 *Es sei Φ eine positive, stetige Funktion auf einer Umgebung $I = [a,\infty[$ von Unendlich und x eine stetige Funktion auf I.*

1. *Man sagt x ist von der Ordnung Φ für $t \to \infty$ und schreibt dafür*

$$x \in O(\Phi) \quad \textit{für } t \to \infty, \tag{7.18}$$

falls

$$\bigvee_{M>0} \bigvee_{b>a} \bigwedge_{t \geq b} |x(t)| \leq M\Phi(t). \tag{7.19}$$

Das bedeutet, daß der Quotient $x(t)/\Phi(t)$ auf $[b,\infty[$ beschränkt ist.

2. *Man sagt x ist klein von der Ordnung Φ für $t \to \infty$ und schreibt dafür*

$$x \in o(\Phi) \quad \textit{für } t \to \infty, \tag{7.20}$$

falls

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{b>a} \bigwedge_{t \geq b} |x(t)| \leq \epsilon \Phi(t). \tag{7.21}$$

Dies ist gleichwertig mit $\lim_{t\to\infty} \dfrac{x(t)}{\Phi(t)} = 0.$

Ähnlich definiert man $x \in O(\Phi)$ bzw. $x \in o(\Phi)$ für $t \to -\infty$ und für $t \to \pm\infty$.

Interessant sind in den Anwendungen hauptsächlich die Fälle $\Phi(t) = t^\alpha$ mit einem $\alpha \in \mathbf{R}$.

Beispiel 7.7 *Es sei $x(t) = t^2 \sin t$ und $\Phi_1(t) = t^2$ auf $I = [0, \infty[$. Es gilt die Abschätzung $|x(t)| \leq \Phi_1(t)$ auf I, somit ist $x \in O(\Phi_1)$ für $t \to \infty$. Man beachte, daß daraus nicht die Existenz des Grenzwertes $\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{\Phi_1(t)}$ folgt. Mit $\Phi_2(t) = t^3$ auf I gilt $\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{\Phi_2(t)} = 0$ bzw. $x \in o(\Phi)$ für $t \to \infty$.*

Obige Definitionen werden nun für Distributionen wie folgt erweitert:

Definition 7.4 *Es seien I und Φ wie oben und $x \in C^{-\infty}(I)$.*

1. *Man sagt x ist beschränkt in der Umgebung von Unendlich und schreibt dafür*

$$x \in O(1) \quad \textit{für } t \to \infty, \tag{7.22}$$

falls

$$\bigvee_{b>a} \bigvee_{X \in [b,\infty[} \bigvee_{n \in \mathbf{N}} x\,|_{[b,\infty[} = \widetilde{D}^n X \quad \textit{und} \quad X \in O(t^n). \tag{7.23}$$

$X \in O(t^n)$ ist dabei im klassischen Sinn zu verstehen.

2. *Man sagt $x \in o(1)$ für $t \to \infty$, falls*

$$\bigvee_{b>a} \bigvee_{X \in [b,\infty[} \bigvee_{n \in \mathbf{N}} x\,|_{[b,\infty[} = \widetilde{D}^n X \quad \textit{und} \quad X \in o(t^n). \tag{7.24}$$

Dies ist gleichwertig mit $\lim_{s\to\infty} x(s) = 0$ im distributionellen Sinn.

3. *Man sagt $x \in O(\Phi)$ für $t \to \infty$, falls $x = y \cdot \Phi$ mit $y \in O(1)$ (bzw. $x/\Phi \in O(1)$).*

4. *Man sagt $x \in o(\Phi)$ für $t \to \infty$, falls $x = y \cdot \Phi$ mit $y \in o(1)$ (bzw. $x/\Phi \in o(1)$).*

In ähnlicher Weise kann man obige Definitionen für $t \to -\infty, t \to \pm\infty$ bzw. $t \to a_-$ oder $t \to b_+$ erweitern. Im Fall $x \in O(1)$ für $t \to \pm\infty$ muß etwa auf Umgebungen von $\pm\infty$ eine Darstellung der Art $x = \widetilde{D}^n X$ mit $X \in O(|t|^n)$ existieren. Es gilt nun folgender Zusammenhang zwischen distributioneller Ableitung und Wachstum von Distributionen:

Satz 7.4 *Es sei $\alpha \in \mathbf{R}$ und $x \in O(t^\alpha)$ für $t \to \infty$. Dann gilt $\widetilde{D}x \in O(t^{\alpha-1})$ für $t \to \infty$. Die entsprechende Aussage gilt für $t \to -\infty$.*

Beweis: Es sei vorerst $\alpha = 0$, also $x \in O(1)$. Es existiert daher eine Darstellung $x = \widetilde{D}^n X$ mit $X \in O(t^n)$ für $t \to \infty$. Es gilt die Gleichung

$$\widetilde{D}x = \widetilde{D}^{n+1}X = t^{-1}(t\widetilde{D}^{n+1}X) = t^{-1}(\underbrace{\widetilde{D}^{n+1}(tX) - (n+1)\widetilde{D}^n X}_{(*)}).$$

Der Ausdruck $(*)$ ist aus $O(1)$ und daher beschränkt, damit gilt $\widetilde{D}x \in O(t^{-1})$ für $t \to \infty$. Im allgemeinen Fall mit $x \in O(t^\alpha)$ gilt $x = t^\alpha \cdot y$ mit $y \in O(1)$. Es folgt daher

$$\widetilde{D}x = \alpha t^{\alpha-1} \underbrace{y}_{\in O(1)} + t^\alpha \underbrace{\widetilde{D}y}_{\in O(t^{-1})} \in O(t^{\alpha-1}) \text{ für } t \to \infty.$$

Bei uneigentlichen Integralen von Funktionen treten Konvergenzprobleme bei Singularitäten des Integranden bzw. bei unendlichen Integrationsgrenzen auf. Ersteres ist für Konvergenz im distributionellen Sinn kein Problem, man muß sich nur um den Fall unendlicher Interationsgrenzen kümmern. Eine interessante Konsequenz obiger Definitionen ist, daß Integrierbarkeit (über **R**) für eine Distribution in viel engerem Zusammenhang zum Wachstumsverhalten derselben steht, als dies bei Funktionen der Fall ist. Der fogende Satz ist ähnlich dem Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale von Funktionen:

Satz 7.5 *Es sei $\alpha < -1$ und $x \in O(|t|^\alpha)$ für $t \to \pm\infty$. Dann ist x integrierbar über* **R**.

Beweis: Um den Satz zu beweisen muß die Existenz einer Stammdistribution X nachgewiesen werden, für die die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} X(t)$ existieren. Es wird der Fall $t \to \infty$ gezeigt: Aufgrund der Voraussetzung des Satzes gilt $x = t^\alpha \cdot y$ mit $y \in O(1)$ für $t \to \infty$. Es existiert daher auf einer Umgebung von Unendlich eine Darstellung $y = \widetilde{D}^n Y$ mit stetigem Y und (etwa durch M) beschränktem $\frac{Y(t)}{t^n}$. Mit Hilfe der Produktformel Gl. 4.12 kann man schreiben

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{n} c_k \widetilde{D}^{n-k}(t^{\alpha-k}Y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \widetilde{D}^{n-k}(t^{\alpha-k}Y(t)) + c_n t^{\alpha-n}Y(t), \end{aligned}$$

wobei für die Koeffizienten $c_k = (-1)^k \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)\binom{n}{k}$ gilt. Damit ist

$$X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \widetilde{D}^{n-k-1}(t^{\alpha-k}Y(t)) + c_n \int_0^t s^{\alpha-n}Y(s)ds$$

eine Stammdistribution von x. Der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} c_n \int_0^t s^{\alpha-n}Y(s)ds$ existiert im klassischen Sinn, da der Integrand für $\alpha < -1$ durch

$$\left|s^{\alpha-n}Y(s)\right| \leq s^{\alpha-n}Ms^n = Ms^\alpha$$

abgeschätzt werden kann. Die Aussage folgt dann aus dem klassischen Vergleichskriterium. Außerdem gilt

$$\frac{t^{\alpha-k}Y(t)}{t^{n-k-1}} = \frac{t^{\alpha+1}Y(t)}{t^n} \to 0$$

für $t \to \infty$. Damit gilt

$$\widetilde{D}^{n-k-1}(t^{\alpha-k}Y(t)) \xrightarrow{d} 0$$

für $t \to \infty$. Somit existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} X(t)$.

Anders als für Funktionen gilt nun für diesen Satz 'fast' die Umkehrung:

Satz 7.6 *Ist x integrierbar über $\mathbf{R}$ dann gilt $x \in O(t^{-1})$.*

Beweis: Wegen der Integrierbarkeit von x existiert eine Stammdistribution $X \in C^{-\infty}(\mathbf{R})$, sodaß die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} X$ existieren. X hat daher auf Umgebungen von $\pm\infty$ eine Darstellung der Form $X = \widetilde{D}^n\Phi$ mit stetigem Φ, so daß die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{\Phi(t)}{|t|^n}$ (klassisch) existieren. Damit ist $\frac{\Phi(t)}{|t|^n}$ auf diesen Umgebungen beschränkt bzw. es gilt $X \in O(1)$ für $t \to \pm\infty$. Wegen $x = \widetilde{D}X$ und Satz 7.4 folgt daher $x \in O(t^{-1})$.

7.5 Distributionen als Funktionale

In der von Schwartz eingeführten Distributionentheorie wird eine Distribution als Funktional auf Räumen von Testfunktionen betrachtet. Dem Element y eines linearen Vektorraumes (dem Raum der Testfunktionen) wird also eine reelle Zahl zugeordnet. Im Fall der Delta - Distribution lautet diese Abbildung

$$y(t) \to y(0). \tag{7.25}$$

Im Fall der *n.ten* Ableitung der Delta - Distribution lautet die Zuordnung

$$y(t) \to \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)(0). \tag{7.26}$$

Die Schwartz'sche Theorie ist mit der hier betrachteten Theorie äquivalent. Dies folgt daraus, daß die Distributionen im Schwartz'schen Sinn die Axiome erfüllen, die hier als Definition benutzt wurden. Es wird nun mit Hilfe der Integrationstheorie eine direktere Verbindung zwischen den beiden Theorien angegeben und damit gezeigt, wie Elemente von $C^{-\infty}$ - Räumen als Funktionale betrachtet werden können.

Definition 7.5 *Es seien $x, y \in C^{-\infty}(I)$ für ein beliebiges Intervall I. Man sagt, x wirkt auf y, falls das Produkt $x \cdot y$ definiert ist und das bestimmte Integral $\int_I x(s)\cdot y(s)ds$ existiert. Man schreibt dann $T_x(y)$ für das Integral.*

Beispiel 7.8 *Ist I kompakt, so wirkt jede Distribution x auf I auf jede Funktion $y \in C^\infty(I)$. Mit $x = \widetilde{D}^n X$ gilt*

$$T_x(y) = (-1)^n \int_I X(s) \cdot y^{(n)}(s)ds.$$

Beweis: Es gilt

$$x \cdot y = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \widetilde{D}^{n-k}(X \cdot y^{(k)}).$$

Alle Summanden der rechten Seite mit Ausnahme des letzten Terms $\pm X \cdot y^{(n)}$ haben Stammdistributionen, die sämtlich an den Intervallrändern verschwinden. Damit ist $x \cdot y$ integrierbar und es gilt $T_x(y) = (-1)^n \int_I X(s) \cdot y^{(n)}(s)ds$.

Beispiel 7.9 *Da jede Distribution mit kompaktem Träger auf* $\mathbf{R}$ *integrierbar ist, folgt, daß* $T_x(y)$ *existiert, sobald das Produkt* $x \cdot y$ *kompakten Träger hat, im speziellen falls*

1. $y \in C^\infty(I)$ *mit kompakten* I *und* x *eine beliebige Distribution auf* $\mathbf{R}$ *ist*

2. $y \in C^\infty(\mathbf{R})$ *und* x *eine Distribution mit kompaktem Träger ist.*

Diese Überlegungen stellen eine direkte Verbindung zwischen $C^{-\infty}(\mathbf{R})$ und dem Schwartz'schen Distributionenraum $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ dar. Nach der hier entwickelten Integrationstheorie gilt etwa $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(s)y(s)ds = y(0)$ für stetiges y. Schreibt man wie in der Definition eingeführt $T_{\delta_0}(y)$ für das Integral, so gilt

$$T_{\delta_0}(y) = y(0), \tag{7.27}$$

also ordnet δ_0 wie bei Schwartz der glatten Funktion y die reelle Zahl $y(0)$ zu. Nach Gl. 7.17 gilt des weiteren

$$T_{\delta_0^{(n)}}(y) = \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)(0). \tag{7.28}$$

Kapitel 8

Folgen und Reihen von Distributionen

8.1 Konvergenz von Distributionenfolgen

Man wünscht sich einen Konvergenzbegriff für Distributionen mit den folgenden Eigenschaften:

K1) Falls die Funktionenfolge (x_n) mit $x_n \in C(I)$ in I gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $x \in C(I)$ konvergiert, so konvergiert (x_n) auch im distributionellen Sinn gegen x. Für die distributionelle Konvergenz schreibt man

$$x_n \xrightarrow{d} x. \tag{8.1}$$

K2) Mit $x_n \xrightarrow{d} x$ gilt auch $\widetilde{D}x_n \xrightarrow{d} \widetilde{D}x$. Konvergiert die Folge (x_n) distributionell, so konvergiert auch die Folge der Ableitungen im distributionellen Sinn, und zwar gegen die Ableitung der ursprünglichen Grenzdistribution.

Die Eigenschaft K2) gilt i. a. nicht im klassischen Sinn. Aufgrund dieser Forderung kann es sich daher nur um einen schwachen Konvergenzbegriff handeln. In der Tat existiert ein solcher gewünschter Konvergenzbegriff. Dazu nun folgende

Definition 8.1 *Es sei (x_n) eine Folge von Distributionen aus $C^{-\infty}(I)$ und $x \in C^{-\infty}(I)$. Die Folge konvergiert distributionell gegen die Grenzdistribution x, falls*

$$\bigvee_{k\in\mathbf{N}} \quad \bigvee_{\substack{(X_n)\\ X_n\in C(I)}} \quad \bigvee_{X\in C(I)} \begin{cases} 1.)\ x_n = \widetilde{D}^{(k)}X_n \\ 2.)\ x = \widetilde{D}^{(k)}X \\ 3.)\ X_n \to X \qquad \textit{gleichmäßig} \end{cases} . \tag{8.2}$$

Diese Definition erfüllt - wie man unmittelbar einsieht - die gewünschten Eigenschaften. Obwohl es sich bei Distributionenräumen um keine normierten Räume handelt - der Abstand eines Folgenelements zur Grenzdistribution kann somit nicht mit einer Norm gemessen werden - steht nun ein vernünftiger Konvergenzbegriff für Distributionen zur Verfügung. Neben den wichtigen Eigenschaften K1) und K2) gelten erwartungsgemäß die üblichen Eigenschaften eines vernünftigen Konvergenzbegriffes:

K3) Jede im Distributionensinn konvergente Folge besitzt einen eindeutig bestimmten Grenzwert im Raum der Distributionen.

K4) Konvergieren die Distributionenfolgen (x_n) und (y_n) gegen die Distributionen x und y, so konvergiert auch die Folge $(ax_n + by_n)$ und zwar gegen $ax + by$ für beliebige Zahlen a und b.

Es kann nun auch die in Kapitel 1.5 angekündigte Definition einer stetigen Abbildung von $C^{-\infty}(I)$ in sich selbst oder einen Vektorraum ähnlicher Struktur nachgeliefert werden:

Definition 8.2 *Es seien E und F Vektorräume (Banachräume, Hilberträume, Distributionenräume,...), in denen vernünftige Konvergenzbegriffe definiert sind. Eine Abbildung $T : E \to F$ heißt* **stetig**, *falls für jede Folge (x_n), die in E gegen x konvergiert, die entsprechende Bildfolge (Tx_n) in F gegen Tx konvergiert.*

8.2 Die Deltafunktion als Grenzwert

Man betrachte die Funktionenfolge

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} n e^{-n^2 t^2}. \tag{8.3}$$

Diese Folge konvergiert auf $\mathbf{R}\diagdown\{0\}$ punktweise gegen 0. Für jedes Folgenglied gilt $\int_{\mathbf{R}} x_n(t)dt = 1$. Man betrachte nun die Funktionenfolgen, die sich aus Integration obiger Folge ergeben:

$$\begin{aligned} x_n^1(t) &: = Jx_n(t) = \tfrac{1}{2}\operatorname{erf}(nt), \\ x_n^2(t) &: = J^{(2)}x_n(t) = \tfrac{1}{2}t\operatorname{erf}(nt) + \tfrac{1}{2\sqrt{\pi}n}e^{-n^2t^2}, \\ x_n^3(t) &: = J^{(3)}x_n(t) = \tfrac{1}{4}t^2\operatorname{erf}(nt) + \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}n}te^{-n^2t^2} + \tfrac{1}{8n^2}\operatorname{erf}(nt). \end{aligned}$$

Mit Mitteln der Analysis 1 zeigt man

$$\begin{aligned} x^1(t) := \lim x_n^1(t) &= H_0(t) - \tfrac{1}{2} && \text{punktweise auf } \mathbf{R}\diagdown\{0\}, \\ x^2(t) := \lim x_n^2(t) &= \tfrac{1}{2}\,|t| && \text{punktweise auf } \mathbf{R}, \\ x^3(t) := \lim x_n^3(t) &= \begin{cases} \tfrac{1}{4}t^2 & \text{für } t \geq 0 \\ -\tfrac{1}{4}t^2 & \text{für } t < 0 \end{cases} && \text{gleichmäßig auf } \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Das Konvergenzverhalten wird nach jeder Integration schöner, für die Funktionenfolge (x_n^3) hat man dann sogar die gewünschte gleichmäßige und somit die distributionelle Konvergenz. Damit konvergieren auch die Folgen der (distributionellen) Ableitungen von (x_n^3) distributionell (und zwar gegen die entsprechenden Ableitungen der Grenzfunktion). Wegen $x_n = \widetilde{D}^3 x_n^3$ sowie $\widetilde{D}^3 x^3(t) = \delta_0$ gilt somit

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} n e^{-n^2t^2} \xrightarrow{d} \delta_0(t). \tag{8.4}$$

Damit ist die Vorstellung der Delta - Distribution als *Impuls* im Zeitnullpunkt mit der *Impulsstärke* $\int \delta_0(t)dt = 1$ gerechtfertigt. Es sei bemerkt, daß auch mit anderen Funktionenfolgen das gleiche Ergebnis wie hier erzielt werden kann. So konvergiert etwa auch die Funktionenfolge

$$x_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2t^2} \tag{8.5}$$

im distributionellen Sinn gegen $\delta_0(t)$. Es gilt also

$$\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2t^2} \xrightarrow{d} \delta_0(t). \tag{8.6}$$

Differenziert man diese Gleichung distributionell, so erhält man

$$-\frac{2n^3}{\pi}\frac{t}{(1+n^2t^2)^2} \xrightarrow{d} \delta_0^{(1)}(t). \tag{8.7}$$

(Man beachte, daß auf der linken Seite klassisch abgeleitet werden darf). Ein Bild einiger Folgenglieder dieser Beziehung zeigt, daß sich die Ableitung der Delta - Distribution als *Doppelimpuls* deuten läßt.

8.3 Beispiel zu Distributionenfolgen

Es sei an dieser Stelle an die komplexe Exponentialfunktion $w = e^s$ mit $s \in \mathbf{C}$ erinnert. Es gilt

$$w = e^s = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x(\cos y + j \sin y) \tag{8.8}$$

sowie

$$e^s = e^{s+2\pi kj}, \qquad k \in \mathbf{Z}, \tag{8.9}$$

damit ist komplexe Exponentialfunktion $2\pi i$ - periodisch. Der Fundamentalstreifen

$$F := \{s \in \mathbf{C} \mid -\pi < Ims \leq \pi\} \tag{8.10}$$

wird durch die komplexe Exponentialfunktion bijektiv auf die gesamte komplexe $w-$ Ebene ohne den Nullpunkt abgebildet. Die Umkehrfunktion

$$\ln : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to F \tag{8.11}$$

wird als Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichnet. Man prüft leicht nach, daß

$$\ln(s) = \ln|s| + jArg(s) \qquad \text{mit} \qquad -\pi < Arg(s) \leq \pi \tag{8.12}$$

gilt. Das Argument ist dabei auf $\mathbf{R}_-^0$ unstetig. Man betrachte nun die Funktion

$$s \to \ln(s + j\epsilon) = \ln|s + j\epsilon| + jArg(s + j\epsilon). \tag{8.13}$$

Mit elementaren Mitteln kann man zeigen, daß die punktweise Grenzwertbeziehung

$$\lim_{\epsilon \to 0} \ln(s + j\epsilon) = \ln|s| + j\pi(1 - H_0) \tag{8.14}$$

gilt. Man definiert daher die Distribution

$$\ln(s + j0) := \ln|s| + j\pi(1 - H_0). \tag{8.15}$$

Es gilt somit punktweise

$$\lim_{\epsilon \to 0} \ln(s + j\epsilon) = \ln(s + j0). \tag{8.16}$$

Mit Mitteln aus der Lebesgueschen Theorie kann man zeigen, daß Konvergenz im distributionellen Sinn gegeben ist. In ähnlicher Weise definiert man

$$\ln(s - j0) := \ln|s| - j\pi(1 - H_0) \tag{8.17}$$

bzw.

$$(s + j0)^{-1} \ := \widetilde{D} \ln(s + j0) = s^{-1} - j\pi\delta_0 \tag{8.18}$$

$$(s - j0)^{-1} \ := \widetilde{D} \ln(s - j0) = s^{-1} + j\pi\delta_0 \tag{8.19}$$

Dabei ist s^{-1} die Distribution $\widetilde{D} \ln|s| = \widetilde{D} \ln_+ s + \widetilde{D} \ln_- s = s_+^{-1} - s_-^{-1}$. Da die Konvergenz in Gl. 8.16 distributionell gilt, darf man differenzieren. Es folgt

$$\lim_{\epsilon \to 0} (s + j\epsilon)^{-1} = (s + j0)^{-1}. \tag{8.20}$$

Ebenso erhält man

$$\lim_{\epsilon \to 0} (s - j\epsilon)^{-1} = (s - j0)^{-1}. \tag{8.21}$$

Führt man nun die Notation

$$\delta_0^+ := \frac{1}{2\pi j}(s - j0)^{-1}, \qquad \delta_0^- := \frac{1}{2\pi j}(s + j0)^{-1} \tag{8.22}$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$\delta_0 = \delta_0^+ - \delta_0^-. \tag{8.23}$$

Die Delta - Distribution kann somit als Differenz zweier Distributionen δ_0^+ und δ_0^- dargestellt werden, wobei δ_0^+ der Randwert einer holomorphen Funktion auf $\{s + jt \mid t > 0\}$ bzw. δ_0^- der Randwert einer holomorphen Funktion auf $\{s + it \mid t < 0\}$ ist.

8.4 Fourierreihen von Distributionen

Definition 8.3 *Man sagt eine Distribution $x \in C^{-\infty}(\mathbf{R})$ ist* **periodisch** *mit Periode h, falls $x = \widetilde{\tau}_h x$. Der Raum der Distributionen mit Periode 1, also mit $x = \widetilde{\tau}_1 x$ wird mit $C_p^{-\infty}(\mathbf{R})$ bezeichnet.*

Beispiele für Distributionen aus $C_p^{-\infty}(\mathbf{R})$ sind die Funktionen $\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt)$ und $e^{2\pi jnt}$ mit $n \in \mathbf{Z}$. Allgemeiner handelt es sich bei den *trigonometrischen Polynomen*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(2\pi kt) \tag{8.24}$$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \sin(2\pi kt) \tag{8.25}$$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi jkt} \tag{8.26}$$

um Distributionen aus $C_p^{-\infty}(\mathbf{R})$. Noch allgemeiner, falls die Folge (c_n) absolut summierbar ist, also $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n| < \infty$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2\pi jnt} \tag{8.27}$$

gleichmäßig (im Sinne der klassischen Konvergenz) und definiert daher eine periodische Distribution. Insbesondere gilt diese Aussage falls $(c_n) \in O(|n|^{-2})$. Es gilt sogar der

Satz 8.1 *Falls $(c_n) \in O(|n|^k)$ mit einem $k \in \mathbf{Z}$, dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2\pi jnt} \tag{8.28}$$

im distributionellen Sinn gegen eine periodische Distribution $x \in C_p^{-\infty}(\mathbf{R})$.

Beweis: Man betrachte die Reihe

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \underbrace{c_n(2\pi jn)^{-k-2}}_{O(|n|^{-2})} e^{2\pi jnt}.$$

Nach dem vorher Gesagtem konvergiert diese Reihe gleichmäßig gegen eine stetige, periodische Funktion X. Differenziert man die Reihe $k+2$ mal distributionell, so folgt daraus die distributionelle Konvergenz der Reihe 8.28.

Es gilt auch die Umkehrung dieser Aussage. Dazu der

Satz 8.2 *Ist $x \in C_p^{-\infty}(\mathbf{R})$, dann existiert eine Folge (c_n) mit $(c_n) \in O(|n|^k)$ und $k \in \mathbf{Z}$, so daß*

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2\pi jnt}. \tag{8.29}$$

Beweis: Es sei $x \in C_p^{-\infty}(\mathbf{R})$. Die Einschränkung von x auf $[0,2]$ hat die Gestalt $x = \widetilde{D}^l X$ mit einem $l \in \mathbf{N}$ und einer stetigen Funktion $X \in [0,2]$. Mit einer Stammfunktion Y von X gilt dann $x = \widetilde{D}^k Y$ mit $k = l+1$ und $Y \in C^1[0,2]$. Wegen der Periodizität von x gilt auf $[1,2]$ $x = \widetilde{\tau}_1 x$ was äquivalent mit $Y - \widetilde{\tau}_1 Y = p$ mit $p \in P_{k-1}[1,2]$ ist. Es gilt also

$$Y\mid_{[1,2]} = \widetilde{\tau}_1(Y\mid_{[0,1]}) + H_1 p.$$

Schreibt man $\widetilde{Y}$ für die periodische Erweiterung der Funktion Y auf $\mathbf{R}$ - was eine stückweise glatte Funktion ergibt - so folgt

$$x = \widetilde{D}^k \widetilde{Y} + y,$$

wobei y eine Linearkombination der Form

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{r=0}^{k-1} \delta_n^{(r)} \right)$$

ist. (Dies folgt aus der Formel für die Ableitung stückweise glatter Funktionen). Man muß jetzt noch zeigen, daß für Distributionen vom Typ $\widetilde{D}^k \widetilde{Y}$ und vom Typ y eine Fourierreihendarstellung existiert. Ersteres folgt durch k - maliges distributionelles Differenzieren der Fouriereihe von $\widetilde{Y}$, welche gleichmäßig konvergiert, zweiteres folgt unmittelbar aus dem folgenden Beispiel (Gl. 8.30 und Gl. 8.31).

Beispiel 8.1 Die Fourierreihe der periodischen Deltafunktion: *Gesucht ist die Fourierreihe der Distribution* $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$*, also der mit der Periode* $p = 1$ *fortgesetzten Delta - Distribution. Man betrachte dazu vorerst die Funktion* $f : t \to t^2 - t$ *auf* $[0, 1]$ *und ihre periodische Fortsetzung* $\widetilde{f}$ *auf* $\mathbf{R}$*. Es handelt sich dabei um eine Funktion aus* $C(I)$*. Ihre Fourierreihe lautet*

$$-\frac{1}{6} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} e^{2\pi jnt}.$$

Mit dem M - Test von Weierstraß zeigt man, daß diese Reihe absolut und gleichmäßig auf $\mathbf{R}$ *konvergiert. Differenziert man nun die Gleichung*

$$\widetilde{f} = -\frac{1}{6} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} e^{2\pi jnt}$$

zweimal distributionell, so erhält man mit Gl. 3.6 das Ergebnis

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{2\pi jnt}. \tag{8.30}$$

Differenziert man weiter, so folgt für ein beliebiges $k \in \mathbf{N}$

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n^{(k)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (2\pi jn)^k e^{2\pi jnt}. \tag{8.31}$$

Ohne Beweis folgen nun einige Bemerkungen über Fourierreihen von Distributionen:

I) Für eine periodische Distribution x gelten die bekannten Formeln für die Fourierkoeffizienten , man hat also das Gleichungspaar

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi f_0 jnt} \tag{8.32}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{0_+}^{T_{0+}} x(t) e^{-2\pi f_0 jnt} dt \tag{8.33}$$

mit der Periodendauer $T_0 = f_0^{-1}$. Zu beachten ist, daß bei beiden Integralgrenzen der Grenzwert von der gleichen Richtung zu verwenden ist. Für die Fourierreihe der Delta - Distribution gilt etwa

$$c_n = \int_{0_-}^{1_-} \delta(t) e^{-2\pi jnt} dt = 1,$$

womit das gleiche Ergebnis wie in Gl. 8.30 folgt.

II) Auch im Fall periodischer Distributionen kann anstelle der komplexen die reelle Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_0 nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi f_0 nt) \tag{8.34}$$

gewählt werden. Die komplexen Koeffizienten (c_n) können wieder wie gewohnt in die reellen Koeffizienten (a_n) und (b_n) umgerechnet werden. Es gelten die Beziehungen

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & n \neq 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) & n < 0 \end{cases}, \tag{8.35}$$

sowie

$$a_n = \underbrace{c_n}_{n>0} + \underbrace{c_n}_{n<0}, \tag{8.36}$$

$$b_n = j(\underbrace{c_n}_{n>0} - \underbrace{c_n}_{n<0}). \tag{8.37}$$

III) *Symmetrieeigenschaften*: Ist x eine *ungerade* Distribution, gilt also $x(-t) = -x(t)$ für alle $t \in \mathbf{R}$, dann erfüllen die Fourier - Koeffizienten die Bedingung $a_n = 0$ bzw. $\underbrace{c_n}_{n>0} = -\underbrace{c_n}_{n<0}$ und es folgt eine Darstellung der Form

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi f_0 nt). \tag{8.38}$$

Im Fall *gerader* Distributionen hat man eine Darstellung der Art

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_0 nt). \tag{8.39}$$

Die Fourierreihe der periodischen Delta - Distribution nach Gl. 8.30 kann etwa auf die Form

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nt) \tag{8.40}$$

gebracht werden.

IV) Ist α eine glatte, periodische Funktion ($\alpha \in C_p^{\infty}(\mathbf{R})$) und x eine periodische Distribution ($x \in C_p^{-\infty}(\mathbf{R})$), dann ist $\alpha \cdot x$ ebenfalls periodisch und die Fourierreihe erhält man durch formale Multiplikation der entsprechenden Reihen für α und x.

Die direkte Berechnung der Fourierreihe einer Funktion bzw. Distribution über die Formeln 8.32 und 8.33 ist nicht immer die einfachste Möglichkeit. Folgendes Beispiel (welches die vorhergehende Bemerkung verwendet) zeigt einen in manchen Fällen günstigeren Weg zur Bestimmung einer Fourierreihe.

Beispiel 8.2 *Man berechne die Fourierreihe von*

$$cosec(2\pi t) := \frac{1}{\sin(2\pi t)}. \tag{8.41}$$

Da es sich offensichtlich um eine meromorphe Funktion mit isolierten Polen bei $t = 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) handelt, kann diese Funktion als periodische Distribution auf $\mathbf{R}$ betrachtet werden. (Man hätte diese Distribution auch als

$$cosec(2\pi t) = \frac{1}{2\pi}\widetilde{D}(\ln|\tan(\pi t)|) \tag{8.42}$$

definieren können, wobei die Funktion $t \to \ln|\tan(\pi t)|$ lokal integrierbar und periodisch mit Periode 1 ist.) Man bestimmt nun die Koeffizienten der Fourierreihe

$$cosec(2\pi t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi jnt} \tag{8.43}$$

aus der Beziehung

$$(\sin(2\pi t)) \cdot (cosec(2\pi t)) = 1. \tag{8.44}$$

Gl. 8.44 gilt klarerweise punktweise mit Ausnahme an den Singularitäten. Mit etwas Mühe (etwa durch Einsetzen von Gl. 8.42 in die Produktformel einer glatten Funktion mit einer Distribution) kann man zeigen, daß Gl. 8.44 im distributionellen Sinn tatsächlich auf ganz $\mathbf{R}$ die konstante Funktion $t \to 1$ ergibt. Setzt man die Fourierreihendarstellung der sin *- Funktion*

$$\sin(2\pi t) = \frac{1}{2j}(e^{2\pi jt} - e^{-2\pi jt}) \tag{8.45}$$

und Gl. 8.43 in Gl. 8.44 ein, so erhält man

$$\left(e^{2\pi jt} - e^{-2\pi jt}\right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi jnt}\right) = 2j,$$

bzw.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{2\pi j(n+1)t} - e^{2\pi j(n-1)t}\right) = 2j,$$

bzw.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(c_{n-1}-c_{n+1})e^{2\pi jnt}=2j.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$c_{-1}-c_1=2j \qquad \text{und} \qquad c_{n-1}-c_{n+1}=0 \quad (n\neq 0).$$

Da es sich um eine ungerade Distribution handelt gilt außerdem $\underbrace{c_n}_{n>0}=-\underbrace{c_n}_{n<0}$, *also zusammen mit der Bedingung aus dem Koeffizientenvergleich*

$$\begin{aligned} c_1 &= c_3=c_5=...=-j,\\ c_{-1} &= c_{-3}=c_{-5}=...=j. \end{aligned}$$

Die zusätzlichen Symmetrieverhältnisse liefern desweiteren

$$c_0=c_2=c_{-2}=...=0.$$

Damit erhält man für alle ungeraden n *die Beziehung* $b_n=j(\underbrace{c_n}_{n>0}-\underbrace{c_n}_{n<0})=2$ *und somit die Reihendarstellung*

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2\pi(2k-1)t). \tag{8.46}$$

für die Funktion $t\rightarrow cosec(2\pi t)$.

Der Abschnitt wird mit einem interessanten Beispiel, das einen Zusammenhang zwischen den Abtastwerten einer Zeitfunktion und den Abtastwerten ihrer Fourier - Transformierten liefert, abgeschlossen:

Beispiel 8.3 Die Poison - Summenformel: *Multipliziert man die Gl. 8.30 mit einer Testfunktion* $x(t)$ *und integriert dann über* $\mathbf{R}$, *so erhält man nach Vertauschung von Summation und Integration*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(t)x(t)dt=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi jnt}x(t)dt.$$

Mit der Formel für die Fourier - Transformation

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{8.47}$$

und der Siebeigenschaft der Delta - Distribution erhält man für obige Gleichung

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}x(n)=2\pi\sum_{n\in\mathbf{Z}}X(n). \tag{8.48}$$

Diese Beziehung wird als **Poison - Summenformel** *bezeichnet.*

Kapitel 9

Mehrdimensionale Distributionen

9.1 Distributionen in mehreren Variablen

Es sei $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$. Für eine glatte Funktion X auf I bezeichnet D_i den Operator der partiellen Differentiation nach der *i.ten* Variablen $(i = 1, ..., n)$. Mit dem Multi - Index $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbf{N}_0^n$ können dann Operatoren der Form

$$D^r : C^r(I) \to C(I)$$

mit

$$C^r(I) = \{X \in C(I) \mid D^r X \text{ existiert und ist stetig}\}$$

betrachtet werden.

Beispiel 9.1 *Es sei X eine Funktion in drei Variablen. Für die Abbildung $X \to D^r X$ mit $r = (1, 0, 2)$ gilt*

$$D^r X = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial z^2} X.$$

Distributionen auf $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ können nun wieder axiomatisch eingeführt werden. Dazu die

Definition 9.1 *Ein* **Distributionenraum** *auf einem kompakten Intervall der Form $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ ist ein Vektorraum $E \supset C(I)$ zusammen mit den linearen Abbildungen $\widetilde{D}_1, ..., \widetilde{D}_n$ (und damit $\widetilde{D}^r$) von E in sich selbst mit den Axiomen:*

(A1) die genannten Operatoren sind geeignete Erweiterungen der entsprechenden Operatoren für glatte Funktionen

(A2) falls $x \in E$, dann existiert ein Multi - Index $r \in \mathbf{N}_0^n$ und ein $X \in C(I)$, sodaß $x = \widetilde{D}^r X$

(A3) falls $x \in E$ und $\widetilde{D}_i x = 0$, dann hat x die Gestalt

$$x = f(s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n),$$

wobei f eine stetige Funktion in $n - 1$ Variablen ist.

Satz 9.1 *Es existiert ein Modell das die obigen Axiome erfüllt. Dieses Modell ist bis auf einen Isomorphismus eindeutig bestimmt.*

Obige Definition kann auch wieder auf offene Intervalle erweitert werden. Beispiele für Distributionen in mehreren Variablen sind wie im eindimensionalen Fall integrierbare Funktionen. Ist etwa (im Fall von zwei Variablen) $x(u, v)$ eine integriebare Funktion und

$$X(s,t) = \int_{-1}^{s} \int_{-1}^{t} x(u,v)dudv,$$

so definiert man die Distribution

$$T_x := \widetilde{D}_s \widetilde{D}_t X$$

und identifiziert sie i. a. wieder mit x.

Beispiel 9.2 Heaviside- und Dirac - Distribution im zweidimensionalen Fall*: Es sei*

$$x(u,v) = \begin{cases} 1 & u \geq 0 \textit{ und } v \geq 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$I_{0,0}(s,t) = \int_{-1}^{s} \int_{-1}^{t} x(u,v)dudv.$$

Man definiert nun die zweidimensionale Heaviside Funktion durch $H_{0,0}(s,t) := \widetilde{D}_s \widetilde{D}_t I_{0,0}$ *und identifiziert diese i. a. mit obiger Funktion* x*. Die zweidimensionale Delta - Distribution ist durch* $\delta_{0,0} := \widetilde{D}_s \widetilde{D}_t H_{0,0}$ *definiert.*

$\delta_{0,0}$ kann als Impuls im Nullpunkt der s,t - Ebene betrachtet werden. Dies wird wieder durch die Konvergenz gewisser Distributionenfolgen gerechtfertigt. Die Delta - Distribution ist auch in höheren Dimensionen das geeignete Mittel, die idealisiert in einem Punkt konzentrierten Impulse, Kräfte, Massen, Ladungen, Wärmequellen,... darzustellen. In Kapitel 11 wird etwas spezieller auf einige Anwendungen eingegangen.

Auch im mehrdimensionalen Fall gelten (mit den entsprechenden Erweiterungen der Integrationstheorie) die Beziehungen

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{0,0}(x,y)dxdy = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{0,0,0}(x,y,z)dxdydz = 1 \\ \vdots \end{gathered} \tag{9.1}$$

bzw.

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{x_0,y_0}(x,y)f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{x_0,y_0,z_0}(x,y,z)f(x,y,z)dxdy = f(x_0,y_0,z_0) \\ \vdots \end{gathered} \tag{9.2}$$

für jede stetige Funktion f. In Vektorschreibweise kann man mit $dV = dx_1...dx_n$ allgemein

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dV = f(\mathbf{x}_0) \tag{9.3}$$

schreiben.

9.2 Vektorwertige Distributionen

Aufgrund der Siebeigenschaft der Delta - Distribution gilt für jedes $\omega \in \mathbf{R}$ die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \tag{9.4}$$

Ziel des Abschnitts 9.3 ist es, die Gültigkeit der Formel

$$\delta_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \tag{9.5}$$

zu zeigen. Aufgrund dieser Beziehungen gelten also im distributionellen Sinn die üblichen Formeln der Fourier - Transformation für die Deltafunktion. Im Kapitel 10. wird ein Satz formuliert, der angibt, für welche Klasse von Distributionen die Theorie der Fourier - Transformation erweitert werden kann.

Das Integral Gl. 9.5 konvergiert im klassischen Sinn für kein $t \in \mathbf{R}$. Um Aussagen im distributionellen Sinn machen zu können, muß dafür eine sinnvolle Erweiterung für den Begriff eines Parameterintegrals definiert werden. Dazu muß zuvor noch eine Erweiterung der bisher betrachteten Distributionenräume durchgeführt werden.

Die Räume $C(I \times J)$ und $C(I, C(J))$

Es seien I und J kompakte Intervalle und $C(I \times J)$ der Raum der auf $I \times J$ stetigen Funktionen $f(s,t)$. Ein Element aus $C(I \times J)$ ist eine Abbildung der Form

$$\begin{array}{rlcl} f: & I \times J & \rightarrow & \mathbf{R} \\ & (s,t) & \rightarrow & f(s,t) \end{array} . \tag{9.6}$$

Es soll nun eine neue Betrachtungsweise für diesen Raum dargestellt werden. Dazu betrachte man eine spezielle Funktion aus $C(I \times J)$ und halte s vorerst fest. Man erhält dann für diesen Wert von s eine stetige Funktion $f_s(t) \in C(J)$ in t. Betrachtet man diese Situation für einen anderen Wert von s aus I, so erhält man auch eine andere Funktion $f_s(t)$. Jedem $s \in I$ wird sozusagen eine Funktion $f_s(t) \in C(J)$ zugeordnet. Man bezeichnet nun $C(I, C(J))$ als die Menge aller stetigen Abbildungen von I nach $C(J)$. Ein Element aus $C(I, C(J))$ ist also eine Abbildung der Form

$$\begin{array}{rlcl} f_s: & I & \rightarrow & C(J) \\ & s & \rightarrow & f_s(t) \end{array} \tag{9.7}$$

mit $f_s(t) \in C(J)$. Der Wert der Funktion f_s an der Stelle t stimmt natürlich mit dem Wert der Funktion f an der Stelle (s,t) überein. Der Raum $C(I, C(J))$ kann somit mit $C(I \times J)$ identifiziert werden. Man schreibt dazu

$$C(I \times J) \cong C(I, C(J)). \tag{9.8}$$

Die Räume $C(I \times J)$ und $C(I, C(J))$

Man betrachte nun den Raum $C^1(I \times J)$ - die Menge der auf $I \times J$ stetig partiell differenzierbaren Funktionen - und eine beliebige Abbildung f aus $C^1(I \times J)$. Die Funktion $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ ist dann ein Element aus $C(I \times J)$. Der Operator $\dfrac{\partial}{\partial s}$ ist somit von der Form

$$\frac{\partial}{\partial s} : C^1(I \times J) \to C(I \times J). \tag{9.9}$$

Betrachtet man s wieder als Parameter und schreibt $f_s(t)$ für ein festes s, so kann man in Anlehnung an die obige Betrachtungsweise f_s auch als Element aus $C^1(I, C^1(J))$ und $D_s f_s$ als Element aus $C(I, C(J))$ ansehen. Der Differentialoperator D_s, für den man in dieser Betrachtungsweise meist nur D schreibt, ist dann von der Form

$$D : C^1(I, C^1(J)) \to C(I, C(J)). \tag{9.10}$$

Die Räume $C^\infty(I, E)$ und $C^{-\infty}(I, E)$

Diese Betrachtungsweise wird nun folgendermaßen erweitert: Es sei E ein beliebiger Vektorraum mit einem vernünftigen Konvergenzbegriff (wie etwa ein Banachraum, Hilbertraum oder der Raum der Distributionen $C^{-\infty}(J)$) und I ein kompaktes Intervall. Man definiert dann den Raum $C(I, E)$ als die Menge aller stetigen Abbildungen der Form

$$\begin{array}{rccc} f_s : & I & \to & E \\ & s & \to & f_s(t) \end{array} \tag{9.11}$$

mit $f_s(t) \in E$. Man definiert des weiteren den Raum $C^1(I, E)$- die Menge aller Abbildungen der Form

$$\begin{array}{rccc} f_s : & I & \to & E \\ & s & \to & f_s(t) \end{array} \tag{9.12}$$

mit $f_s(t) \in E$ - in dem ein Differentialoperator D der Form

$$D : C^1(I, E) \to C(I, E) \tag{9.13}$$

bezüglich des Parameters s wohldefiniert ist. Ähnlicherweise kann man natürlich die Räume $C^n(I, E)$ mit $n \in N$ und $C^\infty(I, E)$ betrachten. Wie schon im eindimensionalen Fall wird nun die Kette

$$C^\infty(I, E) \subset ... \subset C^1(I, E) \subset C(I, E) \tag{9.14}$$

rechts für distributionelle Betrachtungen erweitert. Dazu der

Satz 9.2 *Es existiert ein Vektorraum $C^{-\infty}(I, E)$ und ein Operator*

$$\widetilde{D} : C^{-\infty}(I, E) \to C^{-\infty}(I, E), \tag{9.15}$$

sodaß die üblichen Axiome (in entsprechend modifizierter Form) gelten. Da es nicht unmittelbar einsichtig ist, wird Axiom 3 im speziellen für diesen Fall angeführt:

(A3) Falls $\widetilde{D}^p x = 0 \Rightarrow x(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_{n-1} s^{n-1}$ mit $a_0, ...a_n \in E$.

Dieser Vektorraum ist wieder bis auf einen Isomorphismus eindeutig.

Es soll nun angedeutet werden, daß es eine natürliche Identifikation zwischen $C^{-\infty}(I \times J)$ und $C^{-\infty}(I, C^{-\infty}(J))$ gibt. Es sei dazu $x \in C^{-\infty}(I \times J)$.

- Dann existiert eine Darstellung $x(s,t) = \widetilde{D}_s^m \widetilde{D}_t^n X(s,t)$ mit $X \in C(I \times J)$. Man kann nun X auch als Element aus $C(I, C(J))$, sprich als Abbildung der Form
$$s \to (t \to X_s(t))$$
ansehen (wobei für $X(s,t)$ wieder $X_s(t)$ geschrieben wird). Es ist dann
$$x(s,t) = \widetilde{D}_s^m \widetilde{D}_t^n X_s(t).$$

- Betrachtet man noch einmal die Distribution x, fixiert man jetzt aber s, so existiert eine Darstellung $x_s(t) = \widetilde{D}_t^n \overline{X}_s(t)$. x_s ist in dieser Betrachtungsweise die $n.te$ Ableitung (nach t) einer stetigen Funktion und daher eine Distribution aus $C^{-\infty}(J)$. Betrachtet man diese Situation für einen anderen Wert von s aus I, so erhält man auch eine andere Distribution $x_s(t)$. Jedem $s \in I$ wird sozusagen eine Distribution $x_s(t) \in C^{-\infty}(J)$ zugeordnet, man hat also eine Abbildung der Form
$$\begin{array}{rccl} x_s: & I & \to & C^{-\infty}(J) \\ & s & \to & \widetilde{D}_t^n \overline{X}_s(T) \end{array}.$$
Differenziert man diese Abbildung m - Mal (nach s), so erhält man $\widetilde{D}_s^m \widetilde{D}_t^n \overline{X}_s(T)$, eine Distribution aus $C^{-\infty}(I, C^{-\infty}(J))$. Man kann nun zeigen, daß dies wieder die ursprünglich betrachtetet Distribution x ist.

Beispiel 9.3 *Es sei $x(s)$ eine Distribution. Dann ist*
$$x(s) \cdot \underbrace{e^{jst}}_{glatt} \tag{9.16}$$
eine Distribution von zwei Variablen und daher eine Distribution in s mit Werten einer Distribution in t.

Zusammenfassung

Es sei an dieser Stelle noch einmal der Weg von der Definition des Distributionenraumes $C^{-\infty}(I)$ bis zu den hier betrachteten vektorwertigen Distributionen schematisch zusammengefaßt.:

$$\begin{tikzcd} & C^{-\infty}(I) \arrow[d] & \\ & C^{-\infty}(\mathbf{R}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C^{-\infty}(I^n) \text{ bzw. } C^{-\infty}(\mathbf{R}^n) \arrow[dr] & & C^{-\infty}(I,E) \text{ bzw. } C^{-\infty}(\mathbf{R},E) \arrow[dl] \\ & C^{-\infty}(I \times J) \cong C^{-\infty}(I, C^{-\infty}(J)) & \end{tikzcd}$$

9.3 Parametrisierte Integrale

Mit den Bemerkungen aus dem letzten Kapitel kann nun die Definition eines parametrisierten Integrals im distributionellen Sinn gebracht werden:

Definition 9.2 *Es sei $x \in C^{-\infty}(I \times \mathbf{R})$ mit einem kompakten Intervall I. Man betrachte x in diesem Zusammenhang als Element des Raumes $C^{-\infty}(\mathbf{R}, C^{-\infty}(I))$, also als Distribution auf $\mathbf{R}$ mit Werten in $C^{-\infty}(I)$. Man verwendet nun die Definition für $\int_{-\infty}^{\infty}$ in $C^{-\infty}(\mathbf{R}, E)$ mit $E = C^{-\infty}(I)$. Man definiert also*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s,t)dt := y(s) \tag{9.17}$$

auf I, falls

$$\bigvee_{m,n \in \mathbf{N}_0} \quad \bigvee_{\substack{X \in C(I \times \mathbf{R}),\\ Y \in C(I)}} \quad \begin{array}{l} 1)\ x = \widetilde{D}_s^m \widetilde{D}_t^n X(s,t) \\ 2)\ y = D_s^m Y(s) \\ 3)\ \lim_{t \to \infty} \frac{X(s,t)}{t^n} = \frac{Y(s)}{n!} \quad \text{gleichmäßig in } s \in I \end{array} .$$

Eine wichtige Konsequenz dieser Definition ist die Tatsache, daß aus der klassischen, gleichmäßigen Konvergenz des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} x(s,t)dt$ die distributionelle Konvergenz folgt.

Definition 9.3 *Ist $x \in C^{-\infty}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}), y \in C^{-\infty}(\mathbf{R})$, dann schreibt man*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s,t)dt := y(s),$$

falls für jedes kompakte Intervall I gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\rho}_{\mathbf{R},I}^{s} x(s,t)dt = \widetilde{\rho}_{\mathbf{R},I} y(s).$$

Der Hochindex im Einschränkungsoperator soll andeuten, daß die Einschränkung nur für die Variable s zu betrachten ist.

Es gilt nun der wichtige

Satz 9.3 *Es sei $x \in C^{-\infty}(I, E)$ mit einem beliebigen Intervall I und einem geeigneten Vektorraum E (Banachraum, Distributionenraum,...) und T ein stetiger, linearer Operator der Form $T : E \to F$. Dann gilt: Existiert $\int_{\mathbf{R}} x(s,t)dt$, so existiert $\int_{\mathbf{R}} Tx(s,t)dt$ in $C^{-\infty}(I, F)$ und es gilt*

$$\int_{\mathbf{R}} Tx(s,t)dt = T \int_{\mathbf{R}} x(s,t)dt. \tag{9.18}$$

Wichtige Spezialfälle des Satzes erhält man, wenn man für T den Differentiations- bzw, den Multiplikationsoperator verwendet. Die Ergebnisse werden wegen ihrer Wichtigkeit in einem Satz zusammengefaßt:

Satz 9.4 *Das Integral $\int_{\mathbf{R}} x(s,t)dt$ existiere im distributionellen Sinn.*

1. *Es sei $T : C^{-\infty}(I) \to C^{-\infty}(I)$ der Multiplikationsoperator, der der Distribution $x(s,t)$ (mit dem Parameter s und der Variablen t) die Distribution $\Phi(s) \cdot x(s,t)$ (mit $\Phi \in C^{\infty}(I)$) zuordnet. Dann gilt*

$$\int_{\mathbf{R}} \Phi(s) x(s,t) dt = \Phi(s) \int_{\mathbf{R}} x(s,t) dt. \tag{9.19}$$

2. *Mit dem Differentiationsoperator $\widetilde{D} : C^{-\infty}(I) \to C^{-\infty}(I)$ gilt die Beziehung*

$$\widetilde{D} \int_{\mathbf{R}} x(s,t) dt = \int_{\mathbf{R}} \widetilde{D}_s x(s,t) dt. \tag{9.20}$$

Mit dieser wichtigen Erkenntnis kann nun tatsächlich Gl. 9.5 gezeigt werden.

Beispiel 9.4 *Mit dem Residuensatz kann man zeigen, daß die Beziehung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{1+\omega^2} d\omega = \pi e^{-|t|} \tag{9.21}$$

gilt. Die Konvergenz dabei ist gleichmäßig bezüglich s, daher liegt auch Konvergenz im distributionellen Sinn vor. Es gilt nun

$$(I - \widetilde{D}^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(I - \widetilde{D}_t^2) e^{j\omega t}}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

bzw. nach der Formel für die Ableitung stückweise glatter Funktionen

$$(I - \widetilde{D}^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{1+\omega^2} d\omega = (I - \widetilde{D}^2) \pi e^{-|t|} = 2\pi \delta_0(t).$$

Damit ist die Gültigkeit der Beziehung

$$\delta_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

im distributionellen Sinn mathematisch sauber gezeigt.

Kapitel 10

Die Fourier - Transformation

Es wurde bereits gezeigt, daß die Beziehungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t) e^{j\omega t} dt = 1$$

sowie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \delta_0(t)$$

gelten. Dies läßt vermuten, daß auch im distributionellen Sinn die üblichen Formeln für die Fourier - Transformation sowie deren Inverser gelten. Hier soll nun klar definiert werden, was man unter der Fourier - Transformation von Distributionen versteht, welche Distributionen transformiert werden können und wie es mit der Umkehrung aussieht. Zuvor werden zur Wiederholung noch einmal die wesentlichen Inhalte der L^1 - Theorie der Fourier - Transformation wiederholt.

10.1 L^1 Theorie der Fourier-Transformation

Eine Funktion ist aus $L^1(\mathbf{R})$, falls sie im Lebesgueschen Sinn absolut über $\mathbf{R}$ integrierbar ist.

Definition 10.1 *Sei $f \in L^1(\mathbf{R})$. Die Funktion*

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{10.1}$$

wird als Fourier - Transformierte von f bezeichnet.

Satz 10.1 *Sei $f \in L^1(\mathbf{R})$, dann ist die Funktion F wie in (10.1) definiert für alle $\omega \in]-\infty, \infty[$ beschränkt und gleichmäßig stetig.*

Der folgende Satz gibt Auskunft über das Abklingverhalten der Funktion F:

Eigenschaft	**Zeitbereich**	**Frequenzbereich**
1) Linearität	$\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$	$\lambda F_1(\omega) + \mu F_2(\omega)$
2) Ähnlichkeitssatz	$f(at), \quad a \in \mathbf{C}$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F(\frac{\omega}{a})$
3) Verschiebungssatz	$f(t-T)$	$e^{-j\omega T} F(\omega)$
4) Modulation	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
5) Differentiation	$\dot{f}(t)$	$j\omega F(\omega)$
6) Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega)$
7) Umkehrung zu 5)	$-jtx(t)$	$\frac{d}{d\omega} F(\omega)$
8) Faltung	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$
9) Fenster	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma) F_2(\omega - \sigma) d\sigma$ $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - \sigma) F_2(\sigma) d\sigma$
10) Glätten	$\frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(\tau) d\tau$	$F(\omega) \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$

Satz 10.2 *(Riemann - Lebesgue): Sei $f \in L^1(\mathbf{R})$ und F ihre Fourier - Transformierte, dann gilt*

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} F(\omega) = 0. \tag{10.2}$$

Aus $f \in L^1(\mathbf{R})$ folgt allerdings nicht notwendigerweise $F \in L^1(\mathbf{R})$. Aus den beiden letzten Sätzen folgt, daß für $f \in L^1(\mathbf{R})$ die Funktion F stetig ist und für $\omega \to \pm\infty$ verschwindet. Es gilt jedoch nicht die Umkehrung: nicht jede für $\omega \to \pm\infty$ verschwindende, stetige Funktion ist die Fourier - Transformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbf{R})$.

Für die Umkehrtransformation gilt:

Satz 10.3 *Sei $f \in L^1(\mathbf{R})$ und $F(\omega)$ die Fourier - Transformierte von $f(t)$. Ist f auf dem Intervall $t \in]t-\delta, t+\delta[$ von beschränkter Variation $f \in BV(t-\delta, t+\delta)$, dann gilt*

$$\frac{1}{2}\left(f(t_+) + x(t_-)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{10.3}$$

Die inverse Fourier - Transformation liefert also die Funktion $f(t)$ als Überlagerung von Exponentialfunktionen unterschiedlicher Frequenzen mit $F(\omega)$ als Koeffizientenfunktion.

Obiger Tabelle beinhaltet die wichtigsten Rechenregeln für die Fourier - Transformation.

10.2 Fourier-Transformation für Distributionen

Definition 10.2 *Man nennt die Menge*

$$S' := \{x \in C^{-\infty}(\mathbf{R}) \mid \bigvee_{n\in\ \mathbf{N}} \quad x \in O(|t|^n) \text{ für } t \to \pm\infty\} \tag{10.4}$$

die Menge der **temperierten Distributionen**.

Der folgende Satz garantiert nun, daß jede temperierte Distribution eine Fourier - Transformierte besitzt.

Satz 10.4 *Die Abbildung* $\mathcal{F} : S' \to S'$ *mit*

$$\mathcal{F}\{f(t)\} := F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt \tag{10.5}$$

ist stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung $\mathcal{F}^{-1} : S' \to S'$ *lautet*

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega. \tag{10.6}$$

Es gelten im wesentlichen die gleichen Rechenregeln wie im Fall der L_1- Theorie. Lediglich die Regel 6) für die Integration ist im Fall von Distributionen durch

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta_0(\omega) \tag{10.7}$$

zu ersetzen. Es lassen sich mit dieser Theorie etwa auch Fourier - Transformierte für periodische Funktionen oder für die Heaviside Funktion berechnen, da sie alle als temporierte Distributionen betrachtet werden können. Man nennt die Fourier - Transformierten solcher Funktionen auch *Linienspektra*. In der folgenden Tabelle sind einige Korrespondenzen zusammengestellt.

Zeitbereich $f(t)$	Frequenzbereich $F(\omega)$
$\delta_0(t)$	1
$\delta_0(t-T)$	$e^{-j\omega T}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta_0(\omega-\omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi(\delta_0(\omega+\omega_0)-\delta_0(\omega-\omega_0))$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta_0(\omega+\omega_0)+\delta_0(\omega-\omega_0))$
$sgn(t)$	$\frac{2}{j\pi}$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{j\pi}+\pi\delta_0(\omega)$

Kapitel 11

Anwendungen

11.1 Idealisierte Darstellung physikalischer Größen

Lassen sich praktische Größen durch Funktionen (es kann sich dabei um Zeitfunktionen, ortsabhängige Funktionen oder Funktionen in anderen unabhängigen Größen handeln) beschreiben und wirken diese Funktionen nur in extrem kleinen Umgebungen gewisser Stellen, so kann man - wenn der genaue Funktionsverlauf ohnehin nicht interessiert bzw. nicht genau feststellbar ist - durch Übergang zu den Distributionen δ_a, δ'_a oft übersichtlichere Aufgaben schaffen, die sich i. a. einfacher und schneller lösen lassen. Meist muß man beim Übergang einer pysikalischen Größe in die distributionelle Darstellung auf die entsprechende Verteilungsdichte der betrachteten Größe wechseln.

Ladungsdichte von Punktladungen

Die Ladungsdichte einer im Punkt $x = a$ der $x - Achse$ konzentrierten Punktladung der Größe Q_a kann in der Form

$$Q_a\delta_a(x) = Q_a\delta_0(x - a) \tag{11.1}$$

geschrieben werden. Mehrere auf der $x - Achse$ verteilte Punktladungen kann man durch eine Reihendarstellung der Art

$$\sum_k Q_k\delta_0(x - x_k) \tag{11.2}$$

beschreiben. Handelt es sich um Flächen- oder Raumladungen, so müssen die entsprechenden zwei- bzw. dreidimensionalen Delta - Distributionen zur Beschreibung herangezogen werden.

Einzelkräfte

Einzelkräfte können ebenfalls als Grenzfall von in extrem kleinen Intervallen wirkenden Linienkräften beschrieben werden. Wirkt etwa in einem Punkt a der $x - Achse$ eine Einzelkraft F_a, so kann deren Dichte durch

$$F_a\delta_0(x - a) \tag{11.3}$$

ausgedrückt werden. Natürlich gelten auch hier die entsprechenden Verallgemeinerungen.

11.2 Aspekte zu Distributionen - Differentialgleichungen

Viele Probleme in Technik und Naturwissenschaft lassen sich durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten der Form

$$a_n x^{(n)}(t) + ... + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \tag{11.4}$$

beschreiben. Die Erregungsfunktion $f(t)$ ist dabei vorgegeben, die Funktion $x(t)$ wird gesucht. In Anwendungen treten aber nicht nur Erregungsfunktionen, sondern auch Distributionen $f(t)$ auf, wie etwa Stöße $f(t) = \delta_0(t)$, falls die im vorigen Abschnitt erläuterten Verhältnisse zutreffen. Auch kommt es häufig vor, daß $f(t)$ zwar eine Funktion ist, aber die Ableitungen im Sinne der Distributionen verstanden werden müssen, wie etwa im Fall $f(t) = h(t)$. In all diesen Fällen muß die Differentialgleichung als Distributionen - Differentialgleichungen aufgefaßt werden.

Bekanntlich läßt sich die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung nach Gl. 11.4 als Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$a_n x^{(n)}(t) + ... + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \tag{11.5}$$

und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung 11.4 darstellen. Analog kann man bei der Lösung von entsprechenden Distributionen - Differentialgleichungen vorgehen. Eine Folgerung aus Axiom 3 der Distributionentheorie ist, daß bei Differentialgleichungen, die klassische Lösungen besitzen, keine zusätzlichen distributionellen Lösungen auftreten. Dies trifft natürlich auf die homogene Gleichung 11.5 zu. Man muß daher lediglich noch auf eine geeignete Art und Weise eine zugehörige spezielle distributionelle Lösung der inhomogenen Gleichung finden.

Beispiel 11.1 *Man betrachte noch einmal (siehe Bsp. 3.3) die Differentialgleichung*

$$x''(t) + x(t) = \delta_0(t). \tag{11.6}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$x''(t) + x(t) = 0 \tag{11.7}$$

lautet

$$x_h(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t). \tag{11.8}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung 11.6 wurde bereits in Beispiel 3.3 mit

$$x_p(t) = H_0 \sin(t) \tag{11.9}$$

angegeben. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 11.6 lautet somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + H_0 \sin(t). \tag{11.10}$$

11.3 Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Man betrachte eine Zufallsvariable X eines entsprechenden Zufallsexperiments. Jeder Zufallsvariablen kann eine *Verteilungsfunktio*n $F_Z(z)$ durch die Beziehung

$$F_Z(z) = P(Z < z) \tag{11.11}$$

zugeordnet werden.

Diskrete Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable Z heißt *diskret*, falls sie nur endlich viele oder höchstens abzählbar unendlich viele verschiedene Werte annehmen kann. F_Z ist in diesem Fall eine Stufenfunktion. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$f_Z(z) = P(Z = z) \tag{11.12}$$

die *Verteilungsdichte* von Z.

Stetige Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable Z heißt *stetig*, falls eine nichtnegative Funktion $f_Z(z)$ (die *Verteilungsdichte*) existiert, sodaß für die Verteilungsfunktion

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(\tau) d\tau \tag{11.13}$$

gilt. $F_Z(z)$ ist dann eine stetige Funktion. Umgekehrt gilt die Beziehung

$$f_Z(\tau) = F'_Z(z). \tag{11.14}$$

Neben diesen Grundtypen gibt es auch noch gemischte Verteilungen.

Distributionelle Betrachtungen

Betrachtet man unabhängig davon, ob es sich um diskrete oder stetige Zufallsgrößen handelt, die Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ als Distribution, so kann man in beiden und auch in gemischten Fällen eine *Verteilungsdichte* durch die Beziehung

$$f_Z(z) = \widetilde{D} F_Z(z) \tag{11.15}$$

definieren. Im rein stetigen Fall stimmt diese Definition mit der in Gl. 11.13 angeführten Definition überein, in diskreten oder gemischten Fällen hat diese Verteilungsdichte eine andere Bedeutung als jene in Gl. 11.12. Treten in Anwendungen gemische Typen von Zufallsvariablen auf, so vereinfachen sich mit dieser Darstellung oft die Überlegungen.

Beispiel 11.2 *Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit zwei möglichen Werten x_1 und x_2 und den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $P(Z = x_1) = a$ und $P(Z = x_2) = b$. Die Zufallsvariable Y sei stetig mit der Verteilungsdichte $f_Y(y)$. Gesucht ist die Verteilungsdichte der Zufallsvariablen $Z = X + Y$.*

Lösung: *Bekanntlich ergibt sich die Verteilungsdichte der Summe zweier stetiger Zufallsvariablen durch Faltung der Einzelverteilungsdichten. Handelt es sich um zwei diskrete Zufallsvariablen, so kann zur Berechnung der Verteilungsdichte der Summe die diskrete Faltung verwendet werden. Sind X und Y nicht vom gleichen Typ, oder treten gemischte Typen auf, so kann unter Verwendung der distributionellen Verteilungsdichten wieder die Faltung der Form*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\tau) f_Y(z-\tau) d\tau \tag{11.16}$$

angewandt werden. Verwendet man nun also für die Verteilungsfunktion der diskreten Zufallsvariablen X die Darstellung

$$f_X(x) = a\delta_0(x - x_1) + b\delta_0(x - x_2), \tag{11.17}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\tau) f_Z(z-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(a\delta_0(\tau - x_1) + b\delta_0(\tau - x_2)\right) f_Z(z-\tau) d\tau \\ &= a f_Z(z - x_1) + b f_Z(z - x_2). \end{aligned} \tag{11.18}$$

Hätte man mit den Verteilungsdichten nach Gl. 11.12 gerechnet, so wäre eine so einfache Berechnung nicht möglich gewesen.