

## Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 12. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 13.01.2016

---

### AUFGABE 89 Formeln für den doppelten Winkel

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die Identitäten

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{und} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

### AUFGABE 90 Substitution $u = \tan \frac{x}{2}$

Es sei  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq (2k+1)\pi$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Man zeige: Ist  $u = \tan \frac{x}{2}$ , so gilt

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

### AUFGABE 91 Hyperbelfunktionen

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für die Hyperbelfunktionen.

- (a)  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
- (b)  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
- (c)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

### AUFGABE 92 Areefunktionen

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen.

- (a)  $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- (b)  $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

### AUFGABE 93 Differenzierbarkeit

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig fixiert. Geben Sie in Abhängigkeit von  $x_0$  reelle Zahlen  $a$  und  $b$  an, so daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq x_0 \\ ax + b & , \quad x > x_0 \end{cases} \quad \text{überall differenzierbar wird.}$$

### AUFGABE 94 Ableitungen I

Geben Sie für die folgenden Funktionen die natürlichen Definitionsgebiete an, untersuchen Sie die Funktionen auf Differenzierbarkeit in den Punkten des Definitionsbereichs, und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

- (a)  $e^{x^3 \cos x}$
- (b)  $\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$
- (c)  $|\pi^2 - x^2| \sin^2 x$
- (d)  $\cos^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

### AUFGABE 95 Ableitungen II

Geben Sie für die folgenden Funktionen die natürlichen Definitionsgebiete an, untersuchen Sie die Funktionen auf Differenzierbarkeit in den Punkten des Definitionsbereichs, und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a)  $x^{2x}$

(b)  $|\cos x|$

(c)  $2^{\sin \frac{1}{x}}$

**AUFGABE 96 Ableitung von Umkehrfunktionen**

Bestimmen Sie die Ableitungen  $(f^{-1})'(y)$  und  $(g^{-1})'(y)$  für die Funktionen

(a)  $f(x) = \ln \sqrt{1+x^4}$ ,  $x \in (0, \infty)$

(b)  $g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$