A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, A. Thalhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 14. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 27.01.2016

Aufgabe 105 **Jensensche Ungleichung**

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie für alle $n = 2, 3, \dots$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ sowie $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ die Ungleichung

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Wie lautet die analoge Ungleichung für konkave Funktionen?

Aufgabe 106 **Allgemeine Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel**

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \ln x$ konkav auf $(0, \infty)$ ist. Benutzen Sie dies und die Jensensche Ungleichung aus der vorhergehenden Aufgabe, um die Ungleichung

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$$

für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ sowie $x_1, \dots, x_n > 0$ zu zeigen. Schreiben Sie den Spezialfall $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ explizit auf.

Aufgabe 107 **Leibnizsche Produktformel**

Gegeben seien n-mal differenzierbare Funktionen $f,\ g$. Beweisen Sie die Formel

$$(f \cdot g)^{(n)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Aufgabe 108 **Kurvendiskussion**

Führen Sie eine Kurvendiskussion (Definitionsbereich, Wertebereich, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Nullstellen, Verhalten im Unendlichen und an den Rändern des Definitionsbereichs, Monotonie, Extremwerte, Konvexität, Wendepunkte, Skizze) für die Funktion $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ durch:

Aufgabe 109 **Partielle Integration**

Berechnen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = x \ln x$

(b) $f(x) = x^2\, \mathrm{e}^x$

Aufgabe 110 **Substitution**

Führen Sie zur Berechnung einer Stammfunktion von $f(x) := 1/(1 + \sin^2 x)$ in einem ersten Schritt die beiden Substitutionen

$$\tan(x/2) = t \qquad \text{bzw.} \qquad \tan x = t$$

durch. Entscheiden Sie dann, welche von beiden die effektivere ist und berechnen Sie auf dieser Grundlage das unbestimmte Integral von f.

Aufgabe 111 **Partialbruchzerlegung**

Berechnen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 5}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Aufgabe 112 **Stammfunktion der inversen Funktion**

Sei f eine differenzierbare Funktion mit $f' > 0$ für alle $x \in (a, b)$ und einer Stammfunktion F. Berechnen Sie eine Stammfunktion zur Umkehrfunktion f^{-1}.