Wintersemester 2016/2017
A. Hinrichs, A. Lindner

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 für Lehramt – 5. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 23.11.2016

Aufgabe 33 Konvergenzdefinition

Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Finden Sie für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt.

(b) Finden Sie für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt.

(c) Finden Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt.

(d) Warum und gegen welchen Grenzwert ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?

Aufgabe 34 Konvergenz und Schranken

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert man untere/obere Schranken und Infimum/Supremum als die entsprechenden Größen der Menge $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder. Bestimmen Sie (mit Begründung) für die Folgen $\left(7 - \frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{3}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) jeweils 2 obere und untere Schranken

(b) Infimum und Supremum

(c) den Grenzwert

Aufgabe 35 Wahr oder falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie die wahren Aussagen, widerlegen Sie die falschen Aussagen jeweils durch ein Gegenbeispiel.

(a) Jede nicht beschränkte Folge ist divergent.

(b) Jede divergente Folge ist nicht beschränkt.

(c) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

(d) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(e) Jede Nullfolge ist beschränkt.

(f) Eine alternierende Folge kann niemals eine Nullfolge sein.

(g) Die Summe zweier Nullfolgen ist wieder eine Nullfolge.

Aufgabe 36 Konvergenz - Wurzeln

Sei (a_n) eine konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Aufgabe 37 Konvergenz - Maxima und Minima

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}$ und $\lim_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{a, b\}$. Hilfreich könnte dabei eine Aufgabe aus der Übungsserie 3 sein.

Aufgabe 38 **Grenzwerte**

Bestimmen Sie für die nachstehenden Folgen (a_n) die Grenzwerte.

(a) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$ (b) $a_n = \frac{2n^3-n+1}{n^4+3n^2}$ (c) $a_n = \sqrt[2n]{8^{n+1}}$

Aufgabe 39 **Konvergenz und Grenzwerte**

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{3^n+(-3)^n}{4^n}$ (b) $a_n = (-42)^n$ (c) $a_n = \frac{7+1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}+42^{-n}}$

Aufgabe 40 **Die Forschungsaufgabe - Teil 1**

Sei $x > 0$ gegeben. Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei induktiv durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$ für $n \geq 1$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit dem Hilfsmittel ihrer Wahl die ersten 10 Folgenglieder der Folge (a_n) für die vier Werte $x = 1, x = 4, x = 9, x = 16$ mindestens auf 6 Stellen nach dem Komma genau. Formulieren Sie eine Vermutung über die Konvergenz der Folge (a_n) und ihren Grenzwert.

(b) Berechnen Sie mit dem Hilfsmittel ihrer Wahl die ersten 10 Folgenglieder der Folge (a_n) für $x = 2, x = 3, x = 5$ mindestens auf 6 Stellen nach dem Komma genau. Erhärtet das Ihre Vermutung aus (a)?

Die etwas andere Aufgabe - ohne Kreuzerl und Bewertung, aber vielleicht mit Lerneffekt ;-)

Wir beweisen mittels vollständiger Induktion, dass alle Frauen blond sind. Gibt es in diesem Beweis eventuell einen Fehler?

Wir führen den Beweis, indem wir für jede Gruppe von n Frauen zeigen, daß alle Frauen in der Gruppe die gleiche Haarfarbe haben. Da es nur endlich viele Frauen gibt, müssen also alle die gleiche Haarfarbe haben. Da es mindestens eine blonde Frau gibt, müssen also alle blond sein.

Die Behauptung über die einheitliche Haarfarbe einer Frauengruppe zeigen wir per Induktion über die Gruppengröße n. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich. Die Induktionsvorraussetzung ist nun, daß in jeder Gruppe von n Frauen alle die gleiche Haarfarbe haben. Wir müssen dies für Gruppen von $n + 1$ Frauen zeigen. Nehmen wir also eine solche Gruppe von $n + 1$ Frauen her und bilden durch Herausnehmen der kleinsten Frau eine Gruppe von n Frauen. Diese haben nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Haarfarbe. Fügen wir nun die kleinste Frau wieder dazu und nehmen dafür die größte heraus erhalten wir wieder eine Gruppe von n Frauen, die nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Haarfarbe haben. Die kleinste Frau hat also auch die gleiche Haarfarbe wie die anderen n. Damit ist der Induktionsbeweis vollständig.