Arbeitsunterlagen zur Vorlesung

FUNKTIONALANALYSIS ~~II~~ 0

von

Paul Müller

Es gehören zwei dazu
die Wahrheit zu entdecken;
einer der sie ausspricht,
und einer der sie versteht.

Khalil Gibran

1. Auflage : Sommer 89.

TEIL 1

1. L^p-Räume

1.1 Wiederholung aus A III

In diesem Paragraphen werden wir einige aus der Analysis III bekannte Tatsachen in Erinnerung bringen.

Sei λ das Lebesgue Maß auf $[0,1]$. $([0,1],\mathcal{L})$ bezeichne den **Maßraum der Lebesgue** meßbaren Teilmengen von $[0,1]$ (siehe A III § 1).

Definition 1.1: Sei $p \in [1,\infty[$.

$$\mathcal{L}^p([0,1],\mathcal{L},\lambda) := \{x : [0,1] \to \mathbf{R} : x \text{ ist } \mathcal{L} \text{ meßbar, und } |x|^p \text{ ist integrierbar}\}$$

$$\mathcal{L}^\infty([0,1],\mathcal{L},\lambda) := \{x : [0,1] \to \mathbf{R} : x \text{ ist } \mathcal{L} \text{ meßbar, und } |x| \text{ ist f.ü. beschränkt}\}$$

Es liegt nun nahe (und in der Natur der Sache), die oben definierten linearen Vektorräume mit einer Norm (oder Halbnorm) zu versehen.

Definition 1.2: Sei $x \in \mathcal{L}^p([0,1],\mathcal{L},\lambda)$, dann heißt $\|x\|_p := (\int_0^1 |x|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}}$ die p-Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$.

Sei $x \in \mathcal{L}^\infty([0,1],\Lambda,\lambda)$, dann heißt $\|x\|_\infty := inf\{K > 0 : |x| < K \text{ fast überall}\}$ die ∞-Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty$.

Tatsächlich sind $\| \|_p$ (oder $\| \|_\infty$) Halbnormen und keine Normen auf $\mathcal{L}^p$ (oder $\mathcal{L}^\infty$), da für jede Funktion $x : [0,1] \to \mathbf{R}$ die nur auf einer Menge von Maß-Null, von Null verschieden ist, gilt:

$$\|x\|_p = \|x\|_\infty = 0.$$

Andererseits gilt für jede Funktion $x : [0,1] \to \mathbf{R}$, die in $\mathcal{L}^p$ (oder $\mathcal{L}^\infty$) liegt, und die auf einer Menge von strikt positivem Maß von Null verschieden ist

$$\|x\|_p > 0 \quad (\text{oder } \|x\|_\infty > 0).$$

Zusammenfassend halten wir fest, daß die beiden Mengen

$$\{x \in \mathcal{L}^p : \|x\|_p = 0\}$$

und

$$\{x \in \mathcal{L}^p : x = 0 \text{ fast überall}\}.$$

übereinstimmen. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{N}$. (Dasselbe gilt selbstverständlich für $\mathcal{L}^\infty$.) Bekannterweise erhält man aus einem Vektorraum der mit einer Halbnorm versehen ist, einen normierten Vektorraum, wenn man den Quotientenraum nach dem Nullraum der Halbnorm bildet. Wir folgen diesem Prinzip und setzen für $p \in [1,\infty]$ $L^p([0,1],\mathcal{L},\lambda) := \mathcal{L}^p([0,1],\mathcal{L},\lambda)/\mathcal{N}$.

Sei x nun eine Äquivalenzklasse in $L^p([0,1],\mathcal{L},\lambda)$ und $\overline{x}$ ein beliebiger Repräsentant in $\mathcal{L}^p([0,1],\mathcal{L},\lambda)$, dann definieren wir

$$\|x\|_p := \inf\{\|\overline{x} - h\|_p : h \in \mathcal{N}\}.$$

Wie man sofort sieht, ist diese Bezeichnungsweise inkonsistent, ihre Verwendung ist aber allgemein akzeptiert und führt zu keinem Mißverständnis! (sofern letztere nicht mutwillig herbeigeführt werden).

Wir zitieren nun aus A III zwei bekannte Sätze über L^p.

Satz 1.3: Sei $p \in [1,\infty]$, dann ist $(L^p([0,1],\mathcal{L},\lambda), \|\ \|_p)$ ein **vollständiger, normierter** Vektorraum.

Bemerkung: Dieser Satz (dem ja die Konvergenzsätze aus A III, § 3 zugrundeliegen) ist auf das Innigste mit dem Lebesgue'schen Integralbegriff verbunden.

Satz 1.4: Die Abbildung $y \to (x \to \int xy d\lambda)$ induziert für $p \in [1, \infty[$ einen isometrischen Isomorphismus zwischen L^q und $(L^p)'$ (dem Dualraum von L^p), wobei $q \in]1, \infty]$ so gewählt wird, daß gilt: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bemerkung: Satz 1.4 ist für $p = \infty$ falsch. Der Beweis von Satz 1.4 beruht auf zwei wesentlichen Stützen: Der Hölder-Ungleichung und dem Satz von Radon-Nikodym. Nähere Informationen zur Hölder-Ungleichung findet man in den UE A III, während der Satz von Radon-Nikodym in A III, § 6 behandelt wird.

Definition 1.5: Sei $x : [0,1] \to \mathbf{R}$ meßbar. Dann heißt

$$m_x : \mathbf{R}^+ \to [0,1], \ t \to \lambda\{s : |x|(x) > t\}$$

die **Verteilungsfunktion** von x.

Wie wir im folgenden Lemma beweisen (und später laufend benutzen) werden, ist die L^p-Norm einer Funktion nur von deren Verteilungsfunktion abhängig.

Lemma 1.6: Sei $x : [0,1] \to \mathbf{R}$ meßbar und $|x|^p$ integrierbar. Dann gilt für $1 \leq p < \infty$

$$\int_0^1 |x|^p d\lambda = p. \int_0^\infty t^{p-1}.m_x(t)dt.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x|^p d\lambda &= \int_0^1 \left(\int^{|x(\lambda)|} pt^{p-1} dt\right) d\lambda \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\infty \chi_{\{t<|x|(\lambda)|\}} pt^{p-1} dt\right) d\lambda \\
&= \int_{\mathbf{R}+} \left(\int_0^1 \chi_{\{|x(\lambda)|>t\}} d\lambda\right) pt^{p-1} dt \\
&= p \int_{\mathbf{R}+} t^{p-1} m_x(t) dt.
\end{aligned}$$

1.2 Gleichmäßige Integrierbarkeit und Konvergenz in L^1

Definition 1.7: Eine Teilmenge $\mathcal{K}$ von $L^1([0,1])$ heißt genau dann gleichmäßig integrierbar, wenn

$$\lim_{a\to\infty}\{\sup_{f\in\mathcal{K}}\int_{\{|f|>a\}}|f|d\lambda\}=0.$$

Bemerkung: In dieser Vorlesung wird dieser Begriff nur insoweit behandelt, als er für die Martingaltheorie (siehe § 2) von Nutzen ist. Damit ist allerdings die Bedeutung dieses Begriffes noch keineswegs erschöpft. Es sei hier nur erwähnt, daß ein fundamentaler Satz der (höheren) Funktionalanalysis besagt, daß die schwach relativ kompakten Teilmengen von L^1 mit gleichmäßig integrierbaren Teilmengen übereinstimmen.

Beispiele:

1. Endliche Teilmengen $\mathcal{K}$ von L^1 sind gleichmäßig integrierbar.
2. L^∞ beschränkte Teilmengen $\mathcal{K}$ sind gleichmäßig integrierbar.
3. Man definiere

$$g_n(x)=\begin{cases} n^2x & 0\le x\le \frac{1}{n}\\ 2n-n^2x & \frac{1}{n}\le x\le\frac{2}{n}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

dann gilt: $\sup_n \|g_n\|_1 \le 2$ und für alle $n\in\mathbb{N}$ $\int_{\{|g_{2n}|>n\}}|g_{2n}| \geq \frac{1}{4}$.
(g_n) ist also eine Folge von Funktionen, die in L^1 gleichmäßig beschränkt ist, aber nicht gleichmäßig integrierbar ist.

Proposition 1.9: $\mathcal{K}(\subset L^1([0,1]))$ ist genau dann gleichmäßig integrierbar, wenn

i) für jedes $\epsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert, sodaß für jedes meßbare $A\subset[0,1]$ gilt: $\lambda(A)<\delta$ impliziert $\sup_{f\in\mathcal{K}}\int_A|f|d\lambda<\epsilon$.

ii) $\sup_{f\in\mathcal{K}}\|f\|_1<\infty$.

Beweis: Wir zeigen zuerst wie aus der gleichgradigen Integrierbarkeit i) und ii) folgen.

Dazu eine einfache Abschätzung: für $A \subset [0,1]$, $a > 0$, und $f \in \mathcal{K}$ gilt

$$\int_A |f| d\lambda = \int_{A \cap \{|f| < a\}} |f| d\lambda + \int_{A \cap \{|f| \geq a\}} |f| d\lambda$$
$$\leq a\lambda(A) + \int_{\{|f| > a\}} |f| d\lambda.$$

Diese Abschätzung wird nun ins eiserne Korsett der Quantoren gezwungen.

ad i) Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Laut Voraussetzung existiert $a > 0$, sodaß

$$\sup_{f \in \mathcal{K}} \int_{\{|f| > a\}} |f| d\lambda \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Sei $\delta := \frac{\epsilon}{2a}$, dann folgt für jedes $A \subset [0,1]$: $\lambda(A) < \delta$ impliziert

$$\sup_{f \in \mathcal{K}} \int_A |f| d\lambda \leq a\lambda(A) + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

ad ii) Sei $a > 0$ so gewählt, daß $\sup_{f \in \mathcal{K}} \int_{\{|f| > a\}} |f| d\lambda \leq 3$, dann gilt: $\sup_{f \in \mathcal{K}} \int_{[0,1]} |f| d\lambda = a.1 + 3 < \infty$.

Wir zeigen jetzt wie aus i) und ii) die gleichmäßige Integrierbarkeit folgt. Sei $M := \sup_{f \in \mathcal{K}} \|f\|_{L^1}$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir erhalten $\delta > 0$ mit der in ii) beschriebenen Eigenschaft $a := \frac{M}{\delta}$. Mit der Ungleichung von Tschebyschef gilt für $f \in \mathcal{K}$:

$$\lambda\{|f| > a\} \leq \frac{1}{a} \|f\| \leq \delta.$$

Folglich erfüllen die Mengen

$$\{|f| > a\} \quad f \in \mathcal{K}$$

die für die Anwendung von ii) erforderliche Prämisse. Somit gilt für $f \in \mathcal{K}$

$$\int_{\{|f| > a\}} |f| d\lambda \leq \epsilon.$$

In der Martingaletheorie, die wir in § 2 kennenlernen werden, bedient man sich oft des folgenden Satzes.

Satz 1.10: Sei (f_n) eine Folge in $L^1([0,1])$, sei f meßbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $f_n \to f$ im Maß und $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ ist gleichmäßig integrierbar.

ii) $f \in L^1([0,1])$ und $f_n \to f$ in L^1 Norm.

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) Aus i) folgt zunächst die Existenz einer Teilfolge $(n_k)_k$, sodaß $f_{n_k} \to f$ f.ü. (vgl. A III, § 4). Somit folgt aus dem Satz von Fatou:

$$\int_0^1 |f| d\lambda = \int_0^1 \liminf_k |f_{n_k}| d\lambda \leq \liminf_k \int_0^1 |f_{n_k}| d\lambda \leq M < \infty$$

also $f \in L^1$. Zu zeigen bleibt die L^1-Konvergenz.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt und sei $A_n^\epsilon := \{|f_n - f| > \epsilon\}$. i) impliziert die Existenz von $n_0 \in \mathbf{N}$, sodaß für $n > n_0$ gilt:

$$\int_{A_n^\epsilon} |f_n| d\lambda < \epsilon$$

und

$$\int_{A_n^\epsilon} |f| d\lambda < \epsilon$$

Folglich gilt für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &\leq \int_{[0,1]\setminus A_n^\epsilon} |f_n - f| d\lambda + \int_{A_n^\epsilon} |f_n - f| d\lambda \\ &\leq \epsilon + \int_{A_n^\epsilon} |f_n| d\lambda + \int_{A_n^\epsilon} |f| d\lambda \\ &\leq 3.\epsilon. \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ i) Daß $f_n \to f$ in L^1 die Konvergenz von $f_n \to f$ ein Maß erzwingt, ist klar. Sei nun $\epsilon > 0$, wähle $n_0 \in \mathbf{N}$, sodaß für $n > n_0$ gilt $\|f - f_n\|_{L^1} < \epsilon$. Da die endliche Menge $\{f_1, \ldots, f_{n_0}, f\}$ gleichmäßig integrierbar ist, existiert $\delta > 0$, sodaß für $A \in \mathcal{L}$ und $\lambda(A) < \delta$

$$\sup_{n \leq n_0} \int_A |f_n| d\lambda < \epsilon$$

und

$$\int_A |f| d\lambda < \epsilon.$$

Andererseits gilt:

$$\sup_{m > n_0} \int_A |f_m| d\lambda \leq \int_A |f| d\lambda + \sup_{m > n_0} \int_0^1 |f - f_m| d\lambda \leq \epsilon + \epsilon.$$

Somit ist gezeigt, daß $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ gleichmäßig integrierbar ist.

$\int_{I_n} f \frac{d\lambda}{\lambda(I_n)}$. Man erkennt also die "Merkregel" $\mathbf{E}(f|\mathcal{G})$ stimmt mit dem Mittelwerten von f auf Atomen von $\mathcal{G}$" überein. Diese Merkregel ist für alle endliche Algebren anwendbar.

b) Sei $\mathcal{G} = \{\emptyset, [0,1]\}$ dann gilt:

$$\mathbf{E}(f|\mathcal{G}) = \int_0^1 f d\lambda.$$

$\forall (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, $\mathcal{F}_3$ unabh. $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(f \mid \sigma(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)) = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_2)$

§ 2.2. Martingalungleichungen

Definition 2.3: Sei $(\mathcal{F}_n)$ eine wachsende Folge von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{L}$ in $[0,1]$. Eine Folge $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ von integrierbaren Funktionen heißt genau dann **Martingal**, wenn für jedes $n \in \mathbf{N}$

i) f_n ist $\mathcal{F}_n$ meßbar.

ii) $\mathbf{E}(f_{n+1}|\mathcal{F}_n) = f_n$.

Beispiel: Sei $(\mathcal{F}_n)$ wie oben. Sei $f \in L^1([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$, dann bildet die Folge der bedingten Erwartungen $\mathbf{E}(f|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbf{N}$ ein Martingal.

ΣX_n, X_i unabhängig

Bemerkung: In Paragraph 2.3 werden jene Martingale charakterisiert, welche sich in der oben gezeigten Form schreiben lassen. Jedes Martingal ist zunächst eine Folge von Funktionen. Wir stellen daher die Frage nach der Konvergenz. Über die Doob'sche Maximalfunktion und die Doob'sche "upcrossing" Ungleichung gelangt man zu einer Charakterisierung L^1 konvergenter Martingale durch gleichmäßige Integrierbarkeit. Diese Äquivalenz stellt einen Kreuzungspunkt vieler mathematischer Disziplinen dar (z.B.: Probalilistische Potentialtheorie, Theorie der vektorwertigen Maße, Martingal H^p Theorie).

Von grundlegender Bedeutung ist der

Satz 2.4: (Doob) Sei (f_n) ein $(\mathcal{F}_n)$ Martingal. Sei $f_n^* := \sup_{m \leq n} |f_m|$ die assoziierte Maximalfunktion, dann gilt:

1) Für jedes $n \in \mathbf{N}$ und $t \in \mathbf{R}^+$:

$$t.\lambda(\{f_n^* \geq t\}) \leq \int_0^1 |f_n|.\chi_{\{f_n^* \geq t\}} d\lambda$$

2) Für $n \in \mathbf{N}$ und $1 < p < \infty$:

$$\|f_n^*\|_p. \leq \frac{p}{p-1} \|f_n\|_p.$$

Beweis:

ad 1): Definieren wir für $w \in [0,1]$. Seien $t \in \mathbf{R}^+$ $n \in \mathbf{N}$ beliebig aber fest. $T_n(w) := \inf\{k \leq n : |f_k|(w) \geq t\}$. (Es ist klar, daß T_n eine Funktion von $[0,1]$ nach $\mathbf{N}$ definiert.) Und $\{w : T_N(w) = k\}$ ist $\mathcal{F}_k$-meßbar, denn $\{T_N = k\}$ stimmt mit der Menge

n n

$$\{f_1 < \lambda\} \cap \ldots \cap \{f_{k-1} < \lambda\} \cap \{f_k \geq \lambda\}$$

überein, und wir wissen ja, daß die Funktionen f_i bezüglich $\mathcal{F}_i$ meßbar sind. Weiters gilt: $\{f_n^* \geq t\} = \{T_n \leq n\}$. (Denn

t

$$\begin{aligned} w \in \{f_n^* > f\} &\Leftrightarrow \bigvee_{k \leq n} |f_n^*(w)| \geq t \\ &\Leftrightarrow \inf\{k \leq n : |f_k(w)| \geq t\} \leq n \\ &\Leftrightarrow w \in \{T_n \leq n\}.) \end{aligned}$$

Folglich:

$$\begin{aligned} \int |f_n|\chi_{\{f_n^* \geq t\}} = \int_0^1 |f_n|\chi_{\{T_n \leq n\}} d\lambda &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 |f_n|\chi_{\{T_n = k\}} d\lambda \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \mathbf{E}(|f_n||\mathcal{F}_k).\chi_{\{T_n = k\}} d\lambda \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int |\mathbf{E}(f_n|\mathcal{F}_k)|\chi_{\{T_n = k\}} d\lambda \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int t\chi_{\{T_n = k\}} d\lambda \\ &= t\lambda(\{T_n \leq n\}.) \end{aligned}$$

Zwischenbemerkung: Frage: Warum waren wir erfolgreich? **Antwort:** Weil wir das interessierende Ereignis $\{f_n^* > t\}$ in **disjunkte** Ereignisse $\{T_n = k\}$ zerlegen konnten und die zusätzlich gewonnene Information (nämlich $\{T_n = k\}$ ist $\mathcal{F}_k$ meßbar) in der zweiten Umformulierung "clever" ausgenutzt hatten. Allgemein bezeichnet man Funktionen $\tau : [0,1] \to \mathbf{N}$ für die $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ gilt, als $(\mathcal{F}_n)$ Stoppzeit.

ad 2):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n^{*p} &= \int_0^\infty pt^{p-1}\lambda(\{f_n^* > t\})dt \\
\text{wegen (1)} &\leq \int_0^\infty pt^{p-2}(\int_0^1 \chi_{\{f_n^*>t\}}|f_n(w)|dw)dt \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty pt^{p-2}|f_n(w)|\chi_{\{f_n^*>t\}}dtdw \\
\text{(Fubini)} &= \int_0^1 (\int_0^{f_n^*(w)} pt^{p-2}dt)|f_n(w)|dw \\
&= \int_0^1 \frac{p}{p-1} f_n^*(w)^{p-1}|f_n(w)|dw \\
\text{(TRICK)} \quad \text{(Hölder)} &\leq \frac{p}{p-1}(\int_0^1 (\int_0^1 |f_n(w)|^p)^{\frac{1}{p}}(\int_0^1 f_n^*(w)^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p \|f_n^*\|_p^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

oder:

$$\|f_n^*\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p$$

da aber $p - \frac{p}{q} = p - p(1 - \frac{1}{p}) = 1$, folgt die Behauptung.

Der nächste Satz zeigt eine typische Anwendung des Doob'schen Satzes:

Satz 2.5: Sei (f_n) ein Martingal, dann gilt:

(f_n) konvergiert in $L^1[0,1]$ impliziert (f_n) konvergiert fast überall.

Bemerkung: Die Folge der charakteristischen Funktionen von dyadischen Intervallen zeigt, daß die Konklusion von Satz 2.5 ohne einschränkende Bedingungen an f_n nicht gilt.

(Siehe auch UE A III). Weiters sei bemerkt, daß man selbst für Martingale **nicht** von der f.ü. Konvergenz auf L^1 Konvergenz schließen kann!

Beweis: Seien a, b rationale Zahlen und $D_{a,b} = \{w : \liminf f_n(w) < a < b < \limsup f_n(w)\}$. Wir zeigen zunächst:

$$\bigwedge_{a,b \in Q} \lambda(D_{a,b}) = 0.$$

Zu jedem $w \in D_{a,b}$ existieren Teilfolgen (n_k), (m_l), sodaß $\lim_{n_k \to \infty} f_{n_k}(w) < a$ und $\lim_{m_l \to \infty} f_{m_l}(w) > b$. Folglich gilt für alle n_0 und m_0 $\sup_{m > n_0} |f_n(w) - f_{m_0}(w)| > \frac{b-a}{2}$.

Seien n_0 und m_0 beliebig fest. Dann gilt:

$$D_{a,b} \subset \{ \sup_{n > n_0} |f_n - f_{m_0}| > \frac{b-a}{2} \}.$$

$$\begin{aligned} \lambda(D_{a,b}) &\leq \lambda\{ \sup_{n > n_0} |f_n - f_{m_0}| > \frac{b-a}{2} \} \\ &\leq \frac{2}{b-a} \sup_{n > n_0} \|f_n - f_{m_0}\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Da n_0 und m_0 beliebig waren, gilt für alle $\epsilon > 0$ $\lambda(D_{a,b}) < \epsilon$ und somit $\lambda(D_{a,b}) = 0$.

Wir zeigen weiters, daß sich das Ereignis auf dem (f_n) (möglicherweise) divergiert, als abzählbare Vereinigung von Nullmengen schreiben läßt: **Tatsächlich:**

$$D := \{w : \liminf f_n(w) < \limsup f_n(w)\} = \bigcup_{a,b \in Q} D_{a,b}.$$

2.3 Martingalkonvergenzsätze

Im Laufe dieses Paragraphen soll der folgende grundlegende Konvergenzsatz bewiesen werden. Er wird in der Folge verwendet [illegible] "starke Gesetz der großen Zahlen" [illegible] herzuleiten.

Satz 2.5: Für jedes Martingal (f_n) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) Die Menge $\{f_n\}$ ist gleichmäßig integrierbar.

ii) Die Folge (f_n) konvergiert fast überall und in der L^1-Norm.

iii) Es existiert $f \in L^1$, sodaß für $n \in \mathbf{N}$ gilt: $\mathbf{E}(f|\mathcal{F}_n) = f_n$. •

Bemerkung

Um jedoch soweit zu kommen, müssen einige Hilfsmittel bereitgestellt werden. Das wichtigste ist ein "kombinatorisches Lemma", das überlicherweise unter dem Namen Doob'sche "upcrossing" Ungleichung zitiert wird. Letztere benötigt einige Vorbereitung: Wir betrachten ein Martingal (f_n) und bilden $g_n := |f_n|$. g_n ist eine nicht negative, $\mathcal{F}_n$ meßbare Funktion, die der Relation

$$\mathbf{E}(g_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq g_{n-1}$$

genügt. Wir wählen $b > 0$, $n \in \mathbf{N}$ und bilden eine Folge von Stoppzeiten wie folgt:

$$T_0 := 0$$
$$T_{2m-1}(w) := \inf(N, \inf(k : k > T_{2m-2}(w) \wedge g_k = 0))$$
$$T_{2m}(w) := \inf(N, \inf(k : k > T_{2m-\cancel{2}1}(w) \wedge g_k > b)).$$

1

Sei weiters $U_0^b(w)$ die größte natürliche Zahl m, für welche $T_{2m}(w)$ definiert wurde. $U_0^b(N,w)$ ist die Anzahl der Überquerungen des Intervalls $(0,b)$ (von "unten nach oben"), die die Folge (von Zahlen) $g_n(w)$, $n \in \mathbf{N}$ durchgeführt hat. Es ist klar, daß wir für $U_0^b(N,w)$ eine Abschätzung nach oben finden müssen, die nur die Voraussetzungen $\sup_n \int_0^1 |f_n| d\lambda < \infty$ verwendet. Genau das geschieht in

Satz 2.6: (Doob'sche "upcrossing" Ungleichung) Mit obiger Bezeichnungsweise gilt:

$$b \int_0^1 U_0^b(N,w) d\lambda(w) < \int_0^1 |f_N| d\lambda.$$

Beweis: Sei $V_0 \equiv 1$ und sei

$$V_k(w) = \begin{cases} 1 \text{ falls} & T_{2m-1}(w) < k \leq T_{2m}(w) \text{ für ein } m \in \mathbf{N} \\ 0 \text{ falls} & T_{2m}(w) < k \leq T_{2m+1}(w) \text{ für ein } m \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Zunächst sei bemerkt, daß die Funktion V_k, $\mathcal{F}_{k-1}$ meßbar ist (Betonung auf $k-1$.) (Denn $V_k = 1 \Leftrightarrow \exists \ell \geqslant \overset{2}{\cancel{0}}$, sodaß $(0 < g_{k-1} < b)$ und ... und $(0 < g_{k-(\ell-1)} < b)$ und $(0 = g_{k-\ell})$).

oder $\exists \ell \geq 2$ sodaß $g_{k-1} = 0$ und ... und $g_{k-(\ell-1)} = 0$ und $g_{k-\ell} > 0$.

Weiters sieht man, daß

$$Z(w) := (g_0.V_0)(w) + \sum_{i=1}^{N} V_i(w)(g_i - g_{i-1})(w)$$

mit der Funktion

$$g_0 + \sum_{m=1}^{U_a^b(N,w)} g_{T_{2m}(w)}(w) - g_{T_{2m-1}(w)}(w)$$

fast überall übereinstimmt. Aus dieser Darstellung von Z folgt sofort, daß für fast alle $w \in [0,1]$

$$bU_0^b(N,w) \leq Z(w).$$

Bis jetzt war alles Kombinatorik. Nun wird $Z(.)$ abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 Z(w)d\lambda = \int_0^1 g_0 + \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 V_i(g_i - g_{i-1}) \\
V_i \text{ ist } \{0,1\} \text{ wertig} \quad & = \int_0^1 g_0 + \sum_{i=1}^{N} \int_{\{V_i=1\}} (g_i - g_{i-1}) \\
(V_i \text{ ist } \mathcal{F}_{i-1} \text{ meßbar}) \quad & = \int g_0 d\lambda + \sum_{i=1}^{N} \int_{\{V_i=1\}} \mathbf{E}(g_i - g_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1})d\lambda \\
E(g_i|\mathcal{F}_{i-1}) \geq g_{i-1} \quad & \leq \int_0^1 g_0 d\lambda + \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \mathbf{E}(g_i - g_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1})d\lambda \\
& \leq \int g_N d\lambda.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also:

$$b.\int_0^1 U_0^b(N,w)d\lambda \leq \int_0^1 g_N d\lambda = \int_0^1 |f_N|d\lambda.$$

Wir hatten $U_0^b(N,.)$ der (nicht negativen) Funktionenfolge g_n, $n \in \mathbf{N}$ zugeordnet. Machen wir diese Abhängigkeit (vorübergehend) erkenntlich, und schreiben wir $U_0^b((g_n),N,.)$. Sei nun $a > b$ gegeben, dann definieren wir

$$U_a^b((f_n),N,.) := U_0^b((f_n - a)^+,N,.)$$

$U_a^b((f_n),N,w)$ zählt die Überschreitungen des Intervalls $]a,b[$ durch die Zahlenfolge $f_n(w)$, $n \in \mathbf{N}$. Für jedes $a > 0$ und $n \in \mathbf{N}$

i) $(f_n - a)^+$ ist $\mathcal{F}_n$ meßbar.

ii) $\mathbf{E}((f_n - a)^+ | \mathcal{F}_{n-1}) \geq (f_{n-1} - a)^+$ mit dem selben Beweis wie oben folgt.

Satz 2.7:

$$(b-a). \int_0^1 U_a^b((f_n), N, w) d\lambda(w) = \int_0^1 (f_N - a)^+ d\lambda.$$

Die notwendigen Hilfsmittel sind nun bereitgestellt. Es folgt der

Beweis von Satz 2.5:

i) $\Rightarrow$ ii): Die Voraussetzung impliziert $\sup_n \int_0^1 |f_n| d\lambda < \infty$. Seien $N \in \mathbf{N}$, $a < b$ beliebig gewählt. Sei $D_{a,b} = \{w : \liminf f_n(w) < a < b < \limsup f_n(w)\}$. Wir verwenden die Doob'sche upcrossing Ungleichung um zu zeigen, daß $D_{a,b}$ vom Maß Null ist. Sei $U_a^b(N, .)$ die Anzahl der Überschreitungen des Intervalls $]a, b[$ durch die Zahlenfolge $f_n(w)$, $n \leq N$

$$\int_0^1 U_a^b(N, .) d\lambda \leq \frac{\sup_n \|f_n\|_1 + a}{(b-a)}.$$

Sei $U_a^b(.) := \sup_N U_a^b(N, .)$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt:

$$\int_0^1 U_a^b(w) d\lambda < \frac{(\sup_n \|f_n\|_1) + a}{(b-a)}.$$

Daraus folgt wiederum $\lambda(\{w : U_a^b = \infty\}) = 0$. Somit $\lambda(D_{a,b}) = 0$. Aus der Beziehung

$$\{w : \liminf f_n(w) < \limsup f_n(w)\} = \bigcup_{a,b \in Q} D_{a,b}$$

folgt, daß (f_n) fast überall konvergiert. Sei $f(w) := \lim_n f_n(w)$ fast überall. Laut Voraussetung ist aber $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ gleichmäßig integrierbar und somit folgt aus Konvergenz f.ü. die Konvergenz in L^1 und weiters folgt $f \in L^1$ (Satz 1.10).

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $A \in \mathcal{F}_n$ und sei $m > n$. Dann gilt (Martingaleigenschaft!) $\int_A f_m d\lambda = \int_A f_n d\lambda$. Somit:

$$\int_A f = \lim_{m \to \infty} \int_A f_m d\lambda = \int_A f_n d\lambda.$$

iii) $\Rightarrow$ i): Mit der Tschebyschef Ungleichung gilt für $n \in \mathbf{N}$ und $a > 0$

$$\begin{aligned}
\lambda(\{|f_n| > a\}) &< \frac{1}{a}\int_0^1 |f_n| d\lambda \\
&= \frac{1}{a}\int_0^1 |\mathbf{E}(f|\mathcal{F}_n)| d\lambda \leq \frac{1}{a}\int_0^1 \mathbf{E}(|f||\mathcal{F}_n) d\lambda \\
&= \frac{1}{a}\int_0^1 |f| d\lambda.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun: $B_n := \{|f_n| > a\}$. B_n ist stets $\mathcal{F}_n$ meßbar, folglich

$$\begin{aligned}
\int_{B_n} |f_n| d\lambda &= \int_{B_n} |\mathbf{E}(f|\mathcal{F}_n)| d\lambda \leq \int_{B_n} \mathbf{E}(|f||\mathcal{F}_n) d\lambda \\
&= \int_{B_n} |f| d\lambda.
\end{aligned}$$

Aus der obigen Betrachtung schließen wir: Für fixes n gilt $\lim_{a\to\infty} \lambda(B_n) = 0$. Dies und die Voraussetzung $f \in L^1([0,1])$ implizieren

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n \int_{B_n} |f_n| d\lambda \leq \lim_{a\to\infty} \sup_n \int_{B_n} |f| d\lambda = 0.$$

Also ist $\{f_n : n \in \mathrm{N}\}$ gleichgradig integrierbar.

2.4 Abweichungen vom Mittelwert

Im folgenden betrachten wir die Abweichung einer Funktion $f \in L^\infty([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$ von ihrem Mittelwert $\int f d\lambda$. Wir verwenden zunächst die Martingaltheorie dazu um eine "starke" und nützliche Abschätzung der Funktion

$$(t \to \lambda\{|f - \int f| > t\})$$

zu erhalten.

Lemma 2.8: Seien $\{\emptyset, [0,1]\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n = \mathcal{L}$ gegeben. Sei weiters $f \in L^\infty([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$ gegeben. Setzt man $d_i = \mathbf{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbf{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt für alle $t > 0$

$$\lambda\{|f - \int f| > t\} \leq 2exp(-t^2/4\sum_{i=1}^{n} \|d_i\|_\infty^2).$$

Bemerkung:

a) Die Signifikanz dieser Aussage besteht im "quadratisch-negativ-exponentiellen" Abfall von $\lambda\{|f - \int f| > t\}$. Dieser Abfall wird aber erst wirksam, wenn

$$\frac{t^2}{4\sum_{i=1}^{n} \|d_i\|_\infty^2} > 1.$$

b) Aus $f - \int_0^1 f = \sum_{i=1}^{n} d_i$ folgt intuitiv, daß die Martingaldifferenzen d_i herangezogen werden können, um zwischen f und $\int f$ zu vermitteln.

Beweis 2.8: Wir benützen die Ungleichung

alles klar.

$$e^x \leq x + e^{x^2}; \quad x \in \overset{+}{\mathbf{R}}\ (UE).$$

$x > 0$

$x < 0 \iff e^{t^2} - t \geq e^{-t}, t \geq 0$

$t = 0$ ist gleichheit

$(2t e^{t^2} \geq -e^{-t})$ ok

Damit folgt für $t \in \mathbf{R}$ und $i \leq n$:

$$\mathbf{E}(e^{td_i}|\mathcal{F}_{i-1}) \leq \underbrace{\mathbf{E}(td_i|\mathcal{F}_{i-1})} + \mathbf{E}(e^{t^2 d_i^2}|\mathcal{F}_{i-1}) \leq e^{t^2\|d_i\|_\infty^2}.$$

Ableitung der Ungleich.

Und nun gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 exp(t(\sum_{j=1}^{i} d_j))d\lambda &= \int_0^1 \mathbf{E}(exp(t(\sum_{j=1}^{i} d_j))|\mathcal{F}_{i-1})d\lambda \\
&= \int_0^1 exp(t(\sum_{j=1}^{i-1} d_j)).\mathbf{E}(exp(td_i)|\mathcal{F}_{i-1}))d\lambda \\
&\leq \int_0^1 exp(t(\sum_{j=1}^{i-1} d_j))d\lambda . exp(t^2\|d_i\|_\infty^2).
\end{aligned}$$

Wir sehen, daß sich dieselben Abschätzungen auf den Ausdruck

$$\int_0^1 exp(t(\sum_{j=1}^{i-1} d_j)d\lambda$$

anwenden lassen und erhalten nach insgesamt i-maliger Ausführung für $i \leq n$:

$$\int_0^1 exp(t\sum_{j=1}^{i} d_j)d\lambda \leq exp(t^2(\sum_{j=1}^{i}\|d_j\|_\infty^2)).$$

Um diese Abschätzung richtig ins Spiel zu bringen, schreiben wir artifiziell, für jedes $c > 0$ und $t > 0$

$$\lambda(\{\sum_{j=1}^{n} d_j > c\}) = \lambda(\{exp(t(\sum_{j=1}^{n} d_j) - tc) \geq 1\}).$$

Also für $c > 0$

$$\begin{aligned}
\lambda(\{f - \int f \geq c\}) &= \lambda(\{\sum_{j=1}^{n} d_j \geq c\}) \\
&= \lambda(\{exp(t(\sum_{j=1}^{n} d_j) - tc) \geq 1\}) \leq \int exp(t(\sum_{j=1}^{n} d_j - tc))d\lambda \\
&\leq exp(t^2.(\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2) - ct).
\end{aligned}$$

Der nächste Trick besteht in der Wahl von t. Wir setzen $t := c.(2.\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2)^{-1}$ und erhalten

$$\lambda(\{f - \int f > c\}) \leq exp(\frac{-c^2}{4\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2})$$

analog:

$$\lambda(\{\int f - f > c\}) \leq exp(\frac{-c^2}{4\sum_{j=1}^{n} \|d_j\|_\infty^2}).$$

Beide Ungleichungen zusammen ergeben:

$$\begin{aligned}\lambda(\{|f - \int f| > c\} &\leq \lambda(\{f - \int f > c\}) + \lambda(\{\int f - f > c\}) \\ &\leq 2exp(\frac{-c^2}{4\sum_{j=1}^{n} \|d_j\|_\infty^2}).\end{aligned}$$

3. Khintchine Ungleichung

Betrachten wir die Freiheitsgrade, die sich bei der Verwendung von Lemma 2.8 ergeben. Jede Wahl von Teil-σ-Algebren ist zuläßig; allerdings sind nur jene Wahlen sinnvoll, die den Ausdruck $\sum \|d_i\|_\infty^2$ (der ja von der Wahl der Folge $\mathcal{F}_n$) abhängt) minimieren. Diese Bemerkungen bilden die "Leitlinien" bei einer erfolgreichen Anwendung dieses Lemmas.

3.1 Die Rademacher Funktionen

Definition 3.1: Für $k \in \mathbf{N}$ und für $t \in [0,1]$ heißt

$$r_k(t) := sign.sin(\pi 2^k t)$$

die "k-te" Rademacherfunktion.

Beispiel:

$$r_1(t) = \begin{cases} 1 \ldots & t < \frac{1}{2} \\ -1 \ldots & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$r_2(t) = \begin{cases} 1 \ldots & (t < \frac{1}{4}) \vee (\frac{1}{2} < t < \frac{3}{4}) \\ -1 \ldots & (\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}) \vee (\frac{3}{4} < t) \end{cases}$$

Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt:

Lemma 3.2:

a) Für jedes $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq k < 2^n$, gilt:

$$r_n\big|_{]\frac{k}{2^n}, \frac{(k+1)}{2^n}[}$$

ist eine konstante Funktion.

b) Für jedes $n, m \in \mathbf{N}$ gilt

$$m \neq n \Rightarrow \int_0^1 r_n . r_m = 0$$

$$m = n \Rightarrow \int_0^1 r_n . r_m = 1.$$

c) Sei $n \in \mathbf{N}$, dann gilt: Die σ-Algebra $\mathcal{F}_n$, die von den Funktionen $r_1, \ldots, r_m$ erzeugt wird, ist die kleinste σ-Algebra in $[0,1]$, welche die Mengen

$$\{]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}], \quad 0 \leq k \leq 2^n\}$$

enthält.

Die Khintchine Ungleichung gestattet die geschlossene Auswertung der L^p-Norm von Linearkombinationen von Rademacherfunktionen. Diese Eigenschaft macht die Khintchine Ungleichung zu einer der am häufigsten verwendeten Ungleichungen der (modernen) Funktionalanalysis (vgl. Beweis von Satz 7.4).

Satz 3.3: Für $1 \leq p < \infty$ existieren $A_p > 0$, $B_p > 0$, sodaß für jedes $n \in \mathbf{N}$ und für jede Wahl von $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ gilt: 1/p

$$A_p(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2} \leq (\int_0^1 |\sum_{i=1}^n a_i r_i|^p d\lambda)^{\cancel{1/2}} \leq B_p(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}.$$

Beweis: Seien $n \in \mathbf{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ beliebig aber fest gewählt, sodaß $(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2} = 1$. (Aus Homogenitätsgründen bedeutet dies keine Einschränkung der Allgemeinheit.) Weiters gilt, daß die "Folge" von Funktionen $(f_k)_{k=1}^n := (\sum_{n=1}^k a_i r_i)_{k=1}^n$ ein Martingal bezüglich der Teil-σ-Algebren

$$(\mathcal{F}_k)_{k=1}^n := (\mathcal{A}(\{r_1, \ldots, r_k\}))_{k=1}^n$$

bilden. Folglich gilt

$$\|d_i\|_\infty = \|a_i r_i\|_\infty = |a_i|.$$

Satz 2.8 besagt nun, daß für jedes $t \geq 0$

$$\lambda(|\sum a_i r_i| > t) \leq 2exp(-\frac{t^2}{4}).$$

Daraus folgt mit Lemma 1.6: für jedes $1 \leq p < \infty$

$$\int_0^1 |\sum_{i=1}^n a_i r_i|^p d\lambda = p \int_0^\infty t^{p-1}.\lambda(|\sum_{i=1}^n a_i r_i| > t)dt$$
$$\leq 2p \int_0^\infty t^{p-1} exp(-\frac{t^2}{4})dt =: B_p.$$

Eine kurze Nebenrechnung zeigt uns, daß $B_p < \infty$. Da für $p \geq 2$

$$1 = (\int_0^1 |\sum_{i=1}^n a_i r_i|^2)^{1/2} \leq (\int_0^1 |\sum_{i=1}^n a_i r_i|^p)^{1/p} \leq B_p,$$

haben wir die Khintchine Ungleichung für $p \geq 2$ gezeigt. Sei nun $p \leq 2$. Wir wählen $\frac{1}{3} = \vartheta$, somit $\frac{1}{2} = \frac{\vartheta}{1} + \frac{1-\vartheta}{4}$. Folglich gilt mit der Hölderschen Ungleichung für jedes $f \in L^4$:

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_1^{1/3} \cdot \|f\|_4^{2/3}.$$

Wir wenden dies nun auf die Funktion $f = \sum_{i=1}^n a_i r_i$ an.

$$1 = (\sum a_i^2)^{1/2} = (\int |\sum_{i=1}^n a_i r_k|^2)^{1/2} \leq [\int |\sum_{i=1}^n a_i r_i|]^{1/3}[(\int |\sum_{i=1}^n a_i r_i|^4)^{1/4}]^{2/3}$$
$$\leq [\int |\sum a_i r_i|]^{1/3}[B_4]^{2/3}.$$

oder

$$B_4^{-2} < \int |\sum_{i=1}^n a_i r_i| \leq (\int |\sum_{i=1}^n a_i r_i|^p)^{1/2} \leq (\int |\sum a_i r_i|^2)^{1/2} = 1.$$

Womit wir die Khintchine Ungleichung für die restlichen Werte von p gezeigt haben.

§ 7 Unbedingte Schauderbasen

7.1 Allgemeine Theorie

Definition 7.1: Sei E ein Banachraum. Sei $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Schauderbasis in E. $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ heißt genau dann **unbedingte Schauderbasis**, wenn **jede konvergente Reihe** $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n x_n$, $a_n \in \mathbf{R}$, auch **unbedingt konvergiert**.

Das Konvergenzverhalten unbedingt konvergierender Reihen bleibt selbst dann erhalten, wenn man an den Summanden "rücksichtslos" manipuliert. Es gilt folgender

Satz 7.2: Sei E ein Banachraum. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

i) $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ist eine unbedingte Schauderbasis.

ii) Mit jeder konvergenten Reihe $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n x_n$ und jeder Folge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ $|\epsilon_n| = 1$, konvergiert auch $\sum_{n \in \mathbf{N}} \epsilon_n a_n x_n$.

iii) Mit jeder konvergenten Reihe $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n x_n$ und jeder (strikt wachsenden) Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$ konvergiert auch $\sum_{k \in \mathbf{N}} a_{n_k} x_{n_k}$.

iv) Mit jeder konvergenten Reihe $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n x_n$ und jeder Folge $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mit $|b_n| \leq |a_n|$, $n \in \mathbf{N}$ konvergiert auch $\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n x_n$.

v) Zu $\epsilon > 0$ und zu jeder konvergenten Reihe $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n x_n = x$ existiert $A_0 (\subseteq \mathbf{N})$ endlich, sodaß für jedes $B (\subseteq \mathbf{N})$, $B \supset A_0$ und B endlich, gilt:

$$\| \sum_{i \in B} a_i e_i - x \|_E < \epsilon.$$

vi) Es existiert $K > 0$, sodaß für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ und für alle Teilmengen $A \subseteq \mathbf{N}$, $B \subseteq \mathbf{N}$ mit $A \subseteq B$ gilt:

$$\| \sum_{n \in A} a_n x_n \|_E \leq K \| \sum_{n \in B} a_n x_n \|.$$

Beweis: Wir zeigen die folgenden Implikationen:

i)$\Rightarrow$ v): Nehmen wir an v) gelte nicht, d.h. es existiert $\epsilon > 0$, **sodaß man zu jedem endlichen** A_0 ein $A \supset A_0$ findet, sodaß $\|\sum_{i\in A} a_i x_i - x\|_E > \epsilon$. Wir finden (induktiv) eine Folge (A_n) von Teilmengen von $\mathbf{N}$, sodaß

$$A_n \supset A_{n-1} \cup \{1,\dots,n\}$$

und

$$\|\sum_{i\in A_n} a_i x_i - x\|_E > \epsilon, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Die Menge $\{1,\dots,n\}$ wurde oben angehängt damit eine Numerierung der Elemente von

$$A_1, \qquad A_2 \setminus A_1, \qquad A_3 \setminus A_2, \dots$$

eine Permutation π ergibt. Für diese Permutation π gilt aber:

$$\sum_{i\in\mathbf{N}} a_{\pi(i)} x_{\pi(i)}$$

konvergiert **nicht!** Also gilt i) nicht.

v) $\Rightarrow$ vi): Sei $A \subseteq \mathbf{N}$ endlich. Sei P_A auf E wie folgt definiert:

$$P_A(x_\ell) = \begin{cases} x_\ell & \ell \in A. \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

vi) ist äquivalent zu

$$\sup_{A\subseteq\mathbf{N}, A \text{ endlich}} \|P_A\| \le M < \infty$$

oder mit Satz 4.2 (Banach-Steinhaus) äquivalent zu

$$\sup_{A\subseteq\mathbf{N}, A \text{ endlich}} \|P_A x\| \le M_x < \infty, \quad x \in E.$$

Nehmen wir an, daß die letzte Bedingung **nicht** erfüllt sei, d.h. es existiert $x = \sum a_n x_n$ $A_k(\subseteq \mathbf{N})$ endlich, $k \in \mathbf{N}$, sodaß

$$\|P_{A_k} x\| > k.$$

Nehmen wir weiters an, daß v) erfüllt sei. Dann existiert $A_0(\subseteq \mathbf{N})$ endlich, sodaß für jedes $k \in \mathbf{N}$: $\|\sum_{i\in A_0\cup A_k} a_i x_i - x\|_E \le 1$. Das widerspricht jedoch der folgenden Beobachtung

$$\begin{aligned} \|\sum_{i\in A_0\cup A_k} a_i x_i\| &\ge \|\sum_{i\in A_k} a_i x_i\| - \|\sum_{i\in A_0} a_i x_i\| \\ &\ge k - \|\sum_{i\in A_0} a_i x_i\| \to \infty. \end{aligned}$$

vi) $\Rightarrow$ iii): Sei $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x_n$ konvergent. Sei $p \leq q$ und sei $A = \{n_i : p < i < q\}$. Sei $B = \{n : n > n_{p+1}\}$. Dann folgt mit vi)

$$\| \sum_{i=p+1}^{q} a_{n_i} x_{n_i} \|_E \leq K \| \sum_{i=n_{p+1}}^{\infty} a_{n_i} x_{n_i} \|_E.$$

Also ist $(\sum_{i=1}^{q} a_{n_i} x_{n_i})$ eine Cauchyfolge in E (somit konvergent).

vi) $\Rightarrow$ i): Konvergiere $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x_n$ gegen x. Sei π eine Permutation. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $p_0 \in \mathbf{N}$, $N_0 \in \mathbf{N}$, sodaß $\| \sum_{n\geq p_0} a_n x_n \| \leq \frac{\epsilon}{K}$ und

$$A := \{\pi(1), \ldots, \pi(N_0)\} \supset \{1, \ldots, p_0\}.$$

Somit gilt für $N > N_0$:

$$\begin{aligned}\| \sum_{i\leq N} a_{\pi(i)} x_{\pi(i)} - x \| &\leq \| \sum_{n\leq p_0} a_n x_n - x \| + \| \sum_{i\leq N, \pi(i)>p_0} a_{\pi(i)} x_{\pi(i)} \| \\ &\leq (\frac{\epsilon}{K} + \epsilon).\end{aligned}$$

Somit konvergiert $\sum_{i\in\mathbf{N}} a_{\pi(i)} x_{\pi(i)}$.

iii) $\Rightarrow$ ii): Konvergiere $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x_n$ gegen x. Sei ϵ_i aus $\{-1, 1\}$. Seien $m \leq n \in \mathbf{N}$ beliebig, fest. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} I_1(m,n) &:= \{i \in [m,n] : \epsilon_i = 1\} \\ I_{-1}(m,n) &:= \{i \in [m,n] : \epsilon_i = -1\}. \end{aligned}$$

Somit

$$\| \sum_{i=n}^{m} \epsilon_i a_i x_i \|_E \leq \| \sum_{i\in I_1(m,n)} a_i x_i \| + \| \sum_{i\in I_{-1}(m,n)} a_i x_i \|$$

(Frage: Wo sind denn die "ϵ_i" geblieben?) Da aber

$$\sum_{\substack{i\in I_1(m,n)\\ 0,\infty}} a_i x_i \text{ und } \sum_{i\in I_{-1}(0,\infty)} a_i x_i$$

konvergieren, ist klar, daß

$$\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i a_i x_i$$

eine Cauchyfolge ist.

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $\sum_{n\in\mathrm{N}} a_n x_n$ konvergiert. Sei $(n_i)_{i\in\mathrm{N}}$ eine Teilfolge in **N**. Wir definieren

$$e_j = \begin{cases} -1 & j \in \{n_i : i \in \mathrm{N}\} \qquad -1 \\ \cancel{0} & j \notin \{n_i : i \in \mathrm{N}\}. \qquad +1 \end{cases}$$

Dann gilt die folgende Identität

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} x_{n_i} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k - \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k a_k x_k\right)$$

weil die Reihen auf der rechten Seite konvergieren. Somit konvergiert aber auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} x_{n_i}$.

iii) $\Rightarrow$ v): Konvergiere $\sum a_i x_i$ gegen x. Angenommen v) wäre nicht erfüllt, dann existiert $\epsilon > 0$, sodaß zu jedem $A_0(\subseteq \mathrm{N})$ eine Menge $A(\supset A_0)$ existiert, sodaß

$$\|\sum_{i\in \complement A} a_i x_i\|_E = \|\sum_{i\in A} a_i x_i - x\|_E > \epsilon.$$

Folglich findet man (induktiv) zu $k \in \mathrm{N}$ ein endliches $B_k(\subseteq \mathrm{N})$, sodaß $min B_k \geq k$ und

$$\|\sum_{i\in B_k} a_i x_i\| \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir wählen nun eine Teilfolge (C_n) der (B_k) die überdies paarweise disjunkt ist. Sei nun (n_j) eine Abzählung von $c_1, c_2, \ldots$, so sieht man, daß $\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} x_{n_j}$ nicht konvergieren kann.

iv) $\Rightarrow$ iii): klar.

vi) $\Rightarrow$ iv): Aus vi) folgt zunächst: für $|\epsilon_n| = 1$ und $N \in \mathrm{N}$

$$\|\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n a_n x_n\|_E \leq 2K \|\sum_{n\in\mathrm{N}} a_n x_n\|_E$$

wobei wir annehmen, daß $\sum_{n\in\mathrm{N}} a_n x_n = x$ konvergiert. Denn sei $I_+ := \{n \leq N : \epsilon_n = 1\}$, $I_- := \{n \leq N : \epsilon_n = -1\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n a_n x_n\|_E &\leq \|\sum_{i\in I_+} a_n x_n\|_E + \|\sum_{n\in I_-} a_n x_n\|_E \\ &\leq K\|x\|_E + K\|x\|_E. \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, daß für jedes $N \in \mathrm{N}$ und für jede **Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathrm{N}}$ in ℓ^∞ gilt:**

$$\|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n x_n\|_E \leq 2K \sup_{n\in\mathrm{N}} |\lambda_n| \| \sum a_n x_n \|_E.$$

Sei $x^* \in E^*$, $\|x^*\|_{E^*} = 1$ so gewählt, daß

$$\|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n x_n\|_E = x^*(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n x_n) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n x^*(x_n).$$

(dies ist mit A III, § 10, Satz v. Hahn Banach möglich!) Wir definieren nun $\vartheta_n := sign(a_n x^*(x_n))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n x_n\|_E &\leq \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| . |a_n x^*(x_n)| \\
&\leq \sup_{n\in\mathrm{N}} |\lambda_n| . x^*(\sum_{n=1}^{N} \vartheta_n a_n \cancel{x^*}(x_n)) \\
&\leq \sup_{n\in\mathrm{N}} |\lambda_n| . \|x^*\|_{E^*} \| \sum_{n=1}^{N} \vartheta_n a_n x_n \|_E \\
&\leq 2K . \sup_{n\in\mathrm{N}} |\lambda_n| . \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \|_E .
\end{aligned}$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{n\in\mathrm{N}} a_n x_n$ können wir nunmehr folgern, daß

$$(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n x_n)_{N\in\mathrm{N}} \text{ und } (\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n a_n x_n)_{n\in\mathrm{N}}$$

Cauchyfolgen sind. Jedes b_n, mit $|b_n| \leq |a_n|$ läßt sich klarerweise als $b_n = \lambda_n . a_n$, $|\lambda_n| \leq 1$, schreiben. Somit ist auch

$$(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n x_n)_{N\in\mathrm{N}}$$

eine Cauchyfolge.

7.2 Beispiele

1) Wie man sofort bemerkt, ist für $p \in [\cancel{0}\,1, \infty[$ die Einheitsvektorbasis von $\ell^{\cancel{\infty}\,p}$ eine unbedingte Schauderbasis.

2) Viel wichtiger und auch viel schwieriger ist die Frage, ob $L^p([0,1])$ eine unbedingte Schauderbasis besitzt. Wir werden hier zeigen, daß sich diese Frage für $1 < p < \infty$ positiv beantworten läßt: denn für $1 < p < \infty$ ist das Haar-System eine unbedingte Schauderbasis in $L^p([0,1])$. In L^1 ist das Haar-System zwar Schauderbasis (Satz 6.6) aber keine unbedingte Schauderbasis. Man kann darüberhinaus nämlich zeigen, daß der Banachraum L^1 keine unbedingte Schauderbasis besitzen kann (vgl. Lindenstrauss/Tzafriri I).

Bemerkung: Wir haben (implizit) gezeigt, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

i) $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist unbedingte Schauderbasis in E.

ii) Es existiert $K > 0$, sodaß zu jedem $p \in \mathbf{N}$, $a_1, \dots, a_p \in \mathbf{R}$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ aus $\{-1, 1\}$ gilt:

$$\frac{1}{K}\|\sum_{i=1}^{p} \epsilon_i a_i x_i\|_E \leq \|\sum_{i=1}^{p} a_i x_i\|_E \leq K.\|\sum_{i=1}^{p} \epsilon_i a_i x_i\|_E.$$

Definition 7.3.: Sei $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ das in § 6 definierte Haarsystem. Seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{R}$ und sei $f_k = \sum_{n=1}^{k} a_n h_n$. Dann heißt

$$S(f_k) := (\sum_{n=1}^{k} a_n^2 h_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

die Quadratfunktion von f_k. Weiters sei

$$f_k^* := \sup_{m \leq k} |\sum_{n=1}^{m} a_n h_n|.$$

die assoziierte Maximalfunktion (vgl. § 2.2).

Bemerkung: Wir haben bereits in § 6 gesehen, daß

$$\mathbf{E}(f_k|\mathcal{B}_m) = \sum_{n=1}^{m} a_n h_n.$$

Somit ist $(\sum_{n=1}^{m} a_n h_n)_{m\leq k}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{B}_m)_{m\leq k}$ und f_k^* stimmt mit der in § 2 betrachteten Maximalfunktion überein. Weiters sei bemerkt, daß $\mathbf{E}(f_k|\mathcal{B}_n) - \mathbf{E}(f_k|\mathcal{B}_{n-1})$ mit $a_n h_n$ überein.

Die Relevanz der Quadratfunktion ergibt sich aus

Satz 7.4: Sei $1 < p < \infty$. Das Haarsystem $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist genau dann eine unbedingte Schauderbasis in $L^p([0,1])$, wenn $K \in \mathbf{R}^+$ existiert, sodaß für jedes $k \in \mathbf{N}$, und jedes f_k (wie in Definition 7.3) gilt,

$$\frac{1}{K}\|f_k\|_{L^p} \leq \|S(f_k)\|_{L^p} \leq K\|f_k\|_{L^p}.$$

Beweis: Sei $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in L^p eine unbedingte Schauderbasis. Dann existiert $K > 0$, sodaß für jedes $t \in [0,1]$

$$\frac{1}{K^p}\|f_k\|_{L^p}^p \leq \|\sum r_n(t)a_n h_n\|_{L^p}^p \leq K^p\|f_k\|_{L^p}^p.$$

Somit gilt insbesonders:

$$\frac{1}{K^p}\|f_k\|_{L^p}^p \leq \int_0^1 \|\sum r_n(t)a_n h_n\|_{L^p}^p \leq K^p\|f_k\|_{L^p}^p.$$

Betrachten wir den mittleren Ausdruck

$$\int_0^1 [\int_0^1 |\sum r_n(t)a_n h_n(s)|^p ds]dt = \text{(Fubini)}$$
$$= \int_0^1 [\int_0^1 |\sum r_n(t)a_n h_n(s)|^p dt]ds$$

Jetzt wenden wir die Khintchine Ungleichung mit den Koeffizienten $(a_n h_n(s))_{n\in\mathbf{N}}$ an und erhalten

$$A_p^p \int_0^1 |\sum r_n(t)a_n h_n(s)|^p dt \leq (\sum a_n^2 h_n^2(s))^{\frac{p}{2}}$$
$$\leq B_p^p \int |\sum r_n(t)a_n h_n(s)|^p dt$$

Sei andererseits die Bedingung aus Satz 7.4 erfüllt. Seien $f_k = \sum_{n=1}^{k} a_n h_n$, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ aus $\{-1, 1\}$ gegeben. Wir bilden $g_k = \sum_{n=1}^{k} a_n h_n . \epsilon_n$, bemerken, daß für $s \in [0,1] : S(g_k)(s) = S(f_k)(s)$ und schätzen ab:

$$\|g_k\|_{L^p} \leq K\|S(g_k)\|_{L^p} = K\|S(f_k)\|_{L^p} \leq K^2\|f_k\|_{L^p}$$

und

$$\|g_k\|_{L^p} \geq \frac{1}{K}\|S(g_k)\|_{L^p} = \frac{1}{K}\|S(f_k)\|_{L^p} \geq \frac{1}{K^2}\|f_k\|_{L^p}.$$

Mit dem Satz von Doob folgt daraus unmittelbar

Satz 7.5: Sei $1 < p < \infty$. Das Haarsystem $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ist genau dann eine unbedingte Schauderbasis in $L^p([0,1])$, wenn $K \in \mathbf{R}^+$ existiert, sodaß für jedes $k \in \mathbf{N}$ und jedes f_k (wie in Definition 7.3) gilt:

$$\frac{1}{K}\|f_k^*\|_{L^p} \leq \|S(f_k)\|_{L^p} \leq K\|f_k^*\|_{L^p}.$$

~~**Bemerkung:**~~ ~~Satz 7.5~~ ~~werden~~ wir beweisen, indem ~~wir die Verteilungs~~funktionen

$$\lambda(\{S(f_k) > t\}$$

$$\lambda(\{f^* > t\})$$

analysieren. Vorher jedoch zeigen wir folgendes

Lemma 7.6: Seien $f \geq 0$, $g \geq 0$, auf $[0,1]$ meßbare Funktionen. Seien $\beta > 1$, $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ gegeben, sodaß

$$\beta^p \epsilon < 1$$

und für jedes $t \in \mathbf{R}^+$

$$\lambda(\{g > \beta t\} \cap \{f < \delta t\}) \leq \epsilon \lambda(\{g > t\}).$$

Dann gilt:

$$\|g\|_p^p \leq \frac{\beta^p \delta^{-p}}{(1 - \beta^p \epsilon)} . \|f\|_p^p.$$

Beweis: (von Lemma 7.6)

$$\begin{aligned}\lambda\{\frac{g}{\beta} > t\} &= \lambda\{g > \beta t\}\\ &\leq \lambda(\{g > \beta t\} \cap \{f < \delta t\}) + \lambda(\{f \geq \delta t\})\\ &\leq \epsilon\lambda(\{g > t\}) + \lambda(\{f \geq \delta t\})\end{aligned}$$

Somit folgt (mit Lemma 1.6):

$$\int_0^1 (\frac{g}{\beta})^p d\lambda \leq \epsilon. \int_0^1 g^p d\lambda + \frac{1}{\delta^p}\int_0^1 f^p d\lambda$$

oder

$$\|g\|_p^p(\frac{1}{\beta^p} - \epsilon) \leq \frac{1}{\delta^p}\|f\|_p^p.$$

Mit

$$(\frac{1}{\beta^p} - \epsilon)^{-1} = \frac{(1-\beta^p\epsilon)}{\beta^p}$$

folgt die Behauptung.

Der Beweis von Satz 7.5 ist also erbracht, wenn wir folgendes Lemma bewiesen haben.

Lemma 7.7: Seien $\beta > \cancel{0}\,1$, $\delta > 0$, und $f = f_k$ wie in Definition 7.3 gegeben. Dann gilt für alle $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\lambda(\{S(f) > \beta t\} \cap \{f^* < \frac{\delta.t}{2}\}) \leq \frac{10\delta^2}{(\beta^2 - 1 - \delta^2)}\lambda(\{S(f) > t\})$$

und

$$\lambda(\{f^* > \beta t\} \cap \{S(f) < \delta t\}) \leq \frac{2.\delta^2}{(\beta-1)^2}\lambda(\{f^* > t\}).$$

Beweis: f_k habe die Form $\sum_{i=1}^{k} a_i h_i$. Sei für $n \leq k$, v_n als charakteristische Funktion folgender Menge definiert:

$$\begin{aligned}\{w : t^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 h_i^2 \leq \beta^2 t^2 \text{ und } &\sup_{m \leq n-1} |\sum_{i=1}^{m} a_i h_i| < \delta t\\ \text{und } &\sup_{m \leq n} |a_m h_m| \leq \delta t\}\end{aligned}$$

Wie aus der Definition bereits ersichtlich, ist

$$v_n \text{ eine } \mathcal{B}_{n-1} \text{ meßbare Funktion!}$$

Dies aber impliziert, daß

$$g_m = \sum_{n=1}^{m} a_n . h_n . v_n, \quad m \leq k$$

ebenfalls ein $(\mathcal{B}_m)_{m \leq k}$-Martingal ist, für welches (mit $g := g_k$) die folgenden Bedingungen gelten:

i) $S^2(g) = \sum_{n=1}^{k} a_n^2 h_n^2 v_n$.

ii) $S(f)(w) < t$ impliziert $g^*(w) = 0$.

iii) $\{S(f) > \beta t\} \cap \{(f^* < \delta t)\} \cap \{\sup_{n \leq k} |a_n h_n| < \delta t\} \subseteq \{S(g) > \beta^2 t^2 - (t^2 + \delta^2 t^2)\}$

iv) $g^*(w) \leq 3\delta t$.

Wir setzen $\xi := (\beta^2 - \delta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ und nehmen an, daß $\delta > 0$ so klein gewählt ist, daß $\underline{\xi > 0}$. Aus

$$\|g\|_2 = \|S(g)\|_2$$

den Ungleichungen von Doob (Satz 2.4) und Tschebyschef folgt für $t \geq 0$

v) $\underline{\lambda(\{S(g) \geq \xi t\}) \leq \|g^*\|_2^2 \frac{1}{t^2 \xi^2}}$.

Aus i) ~~bis~~ + iv) folgt aber: ii + iv

vi) $\|g^*\|_2^2 \leq 9\delta^2 t^2 \lambda(\{S(f) > t\})$.

iii), v) und vi) zusammengefaßt ergeben folgendes Zwischenergebnis:

$$\lambda(\{S(f) > \beta t\} \cap \{f^* < \delta t\} \cap \{\sup |a_n h_n| < \delta t\}) \leq \frac{9\delta^2}{(\beta^2 - \delta^2 - 1)} . \lambda(\{S(f) > t\}).$$

Sei $1 < n \leq k$, dann gilt

$$a_n h_n = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i h_i.$$

Somit

$$|a_n h_n| \leq 2.f^* \quad \text{oder} \quad \sup_{n \leq k} |a_n h_n| \leq 2.f^*.$$

Dies setzen wir ein und erhalten als Endergebnis:

$$\lambda(\{S(f) > \beta t\} \cap \{f^* < \frac{\delta t}{2}\})$$
$$\leq \frac{9\delta^2}{\beta^2 - \delta^2 - 1}.\lambda(\{S(f) > t\}).$$

Somit ist der **erste Teil** des Lemmas vollständig bewiesen! Vertauscht man nun die Rollen von $S(f)$ und f^* und erhält man so einen Beweis für den **zweiten Teil** des Lemmas:

Sei für $n \leq k$, v_n definiert als charakteristische Funktion folgender Menge:

$$\{w : (t < f_{n-1}^* \leq \beta t \text{ und } \sum_{i=1}^{n} h_i^2 a_i^2 \leq \delta^2 t^2\}$$

Wiederum stellt man leicht fest, daß v_n eine $\mathcal{B}_{n-1}$ meßbare Funktion ist. Somit ist

$$\Psi_m = \sum_{n=1}^{m} a_n h_n . v_n, \; m \leq k$$

ein $(\mathcal{B}_m)_{m \leq k}$ Martingal. (Sei $\Psi := \Psi_k$).

Es gilt für Ψ:

i) $S^2(\Psi) = \sum_{n=1}^{k} a_n^2 h_n^2 v_n$.

ii) $f^*(w) \leq t \Rightarrow S(\Psi)(w) = 0$.

iii) $S^2(\Psi) \leq \delta^2 t^2$.

iv) $\lambda\{f^* > \beta t\} \cap \{S(f) < \delta t\} \subset \{\Psi^* \geq (\beta - \delta - 1)t\}$.

Aus i) bis iii) folgt

$$\|\Psi\|_2^2 = \|S(\Psi)\|_2^2 < 2\delta^2 t^2 \lambda(\{f^* > t\}).$$

Zusammen mit iv) ergibt das

$$\lambda(\{f^* > \beta t\} \cap \{S(f) < \delta t\}) \leq \lambda(\{\Psi^* > (\beta - 1 - \delta)t\})$$
$$\leq \frac{1}{(\beta - \delta - 1)^2 t^2}.\|\Psi\|_2^2 \leq \frac{2.\delta^2}{(\beta - \delta - 1)^2}.\lambda(\{f^* > t\}).$$

Bemerkung: Im Gegensatz zu L^p, $p > 1$ sind die Haarfunktionen in $L^1([0,1])$ **keine** unbedingten Schauderbasen. Da für jedes $\ell \in \mathbb{N}$

$$\|h_1 + \sum_{k=1}^{\ell} h_{2^k+1} 2^k\|_{L^1} = 1$$

und

$$\lim_{\ell\to\infty} \|h_1 + \sum_{k=1}^{\ell} h_{2^{2k+1}+1} . 2^{2k+1}\|_{L^1} \to \infty$$

folgt mit Satz 7.2, daß $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1([0,1])$ keine unbedingte Schauderbasis ist.

Literaturverzeichnis

Beauzamy, B.: Introduction to Banach spaces and their Geometry. North Holland, 1985 (2nd Edition).

Burkholder, D.L.: Distribution Function Inequalities for Martingales. The Annals of Probability (1) 1973.

Goffmann, C./Pedrick, G.: First Course in Funktional Analysis. Prentice Hall, 1965.

Lindenstrauss, J./Tzafriri, L.: Classical Banach spaces I, II. Springer Verlag 1979.

Milman, V.D./Schechtman, G.: Asymtotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces. Lecture Notes in Math. 1200 Springer Verlag 1986.

Stein, E.M.: Topics in Harmonic Analysis. Annals of Math. Studies (63) 1970.

Also lautet der Beschluß,

daß der Mensch was lernen muß!

Wilhelm Busch

[illegible]

Bauer H.

Chang H. L.