

# ANALYSIS II

J.B. Cooper

Sommersemester 2000

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Metrische Räume, Folgen, Stetigkeit, Kompaktheit.</b>	<b>1</b>
	Aufgaben . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Kurven und Flächen in <math>\mathbb{R}^n</math>, Kurvenintegrale.</b>	<b>7</b>
	Aufgaben . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Partielle Ableitungen</b>	<b>16</b>
	Aufgaben . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Integrale</b>	<b>31</b>
	Aufgaben . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Der Satz über inverse Funktionen</b>	<b>45</b>
	Aufgaben . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>61</b>
	Aufgaben . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>70</b>
	7.1 Übungsaufgaben mit Lösungsvorschlägen . . . . .	70
	7.1.1 Übungsaufgaben . . . . .	70
	7.1.2 Lösungsvorschläge . . . . .	82
	7.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen, Existenz und Eindeutigkeitssätze . . . . .	107
	Aufgaben . . . . .	113
	7.3 Topologische Räume . . . . .	114
	Aufgaben . . . . .	136

# 1 Metrische Räume, Folgen, Stetigkeit, Kompaktheit.

**Definition 1.1** Sei  $X$  eine Menge. Eine **Metrik** auf  $X$  ist eine Abbildung

$$d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$d(x, y) \geq 0 \text{ und } d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (x, y \in X);$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ für alle } x, y, z \in X \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

$d(x, y)$  ist der **Abstand** der Punkte  $x$  und  $y$ .

Ein **metrischer Raum** ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Metrik.

BEISPIELE.

I.  $\mathbf{R}$  ist ein metrischer Raum mit der Abbildung

$$d(x, y) = |x - y|.$$

II. Jede Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes ist selber ein metrischer Raum (man nimmt die Einschränkung der Metrik von  $X$  als **induzierte Metrik**).

**Definition 1.2 Normierte Räume.** Sei  $V$  ein (reeller) Vektorraum. Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbf{R}$ , so daß

$$\|x\| \geq 0 \text{ und } \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$\|lx\| = |l|\|x\| \quad (l \in \mathbf{R}, x \in V);$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in V).$$

Ein **normierter Vektorraum** ist ein Paar  $(V, \| \cdot \|)$ , wobei  $V$  ein Vektorraum ist und  $\| \cdot \|$  eine Norm darauf.

Wir bemerken gleich, daß jeder normierter Raum  $V$  ein metrischer Raum ist, und zwar mit der Metrik

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Damit sind die folgenden Räume auch weitere Beispiele von metrischen Räumen.

BEISPIELE.

I. Euklidische Räume: Wir wissen aus der "Linearen Algebra", daß ein euklidischer Raum ein Vektorraum  $V$  mit einem Skalarprodukt  $( \cdot | \cdot )$  ist. (Das Beispiel ist  $\mathbf{R}^n$  mit dem Skalarprodukt

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i).$$

Die Abbildung

$$\|x\| \mapsto \sqrt{(x|x)}$$

ist dann eine Norm auf  $V$ . Im obigen Fall ist diese Norm der euklidische Abstand auf  $\mathbf{R}^n$ .

II. Teilmengen von  $\mathbf{R}^n$ . Die Metrik von I. induziert die Struktur eines metrischen Raumes auf jeder Teilmenge von  $\mathbf{R}^n$ .

III. Die Supremums-Norm und die  $\ell^1$ -Norm auf  $\mathbf{R}^n$  werden wie folgt definiert:

$$\|x\|_\infty = \max_i \{|\xi_i|\};$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|.$$

IV. Die Supremums-Norm  $\|\cdot\|_\infty$  auf  $C([a, b])$ . Dies ist die Abbildung

$$f \mapsto \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

**Definition 1.3** Ist  $x$  ein Element eines metrischen Raumes und  $\epsilon > 0$ , dann ist die Menge

$$U(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$$

die  $\epsilon$ -**Umgebung** von  $x$  oder **offene Kugel mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $\epsilon$** . Allgemeiner heißt eine Menge  $N$  eine **Umgebung** von  $x$ , falls ein  $\epsilon > 0$  existiert, mit  $U(x, \epsilon) \subset N$ . Wir bezeichnen die Familie aller Umgebungen von  $x$  mit  $\mathcal{N}(x)$ .

Eine Teilmenge  $U$  von  $X$  heißt **offen**, falls  $U$  eine Umgebung von jedem Punkt  $x \in U$  ist (d.h.  $U$  ist eine Vereinigung von offenen Kugeln).

Eine Teilmenge  $A$  ist **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A$  offen ist. Diese Definition kann man wie folgt umschreiben: Ist  $U(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$  für jedes  $\epsilon > 0$ , dann gilt  $x \in A$ .

Eine weitere Charakterisierung von abgeschlossenen Mengen ist:  $A$  ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Für jede Folge aus  $A$ , die in  $X$  konvergiert, ist der Limes in  $A$ .

Man sieht leicht, daß die Familie  $\tau_d$  der offenen Mengen folgende Eigenschaften besitzt:

$\emptyset$  und  $X$  sind offen;

falls  $U$  und  $V$  offen, dann auch  $U \cap V$ ;

die Vereinigung einer Familie von offenen Mengen ist offen.

(Diese Eigenschaften sind die Motivation für die Definition von allgemeinen topologischen Räumen—siehe Anhang).

Eine Folge  $(x_n)$  in einem metrischen Raum  $X$  **konvergiert gegen**  $x \in X$ , falls zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbf{N}$  existiert, so daß  $d(x_n, x) < \epsilon$ , falls  $n > N$ . Eine Folge ist **Cauchy-Folge**, falls zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbf{N}$  existiert mit  $d(x_m, x_n) < \epsilon$  für  $m, n > N$ .

In Symbolen:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{n, N \in \mathbf{N}} \bigwedge_{m, n \geq N} d(x_m, x_n) \leq \epsilon.$$

Wie für  $\mathbf{R}$  zeigt man, daß jede konvergente Folge in einem metrischen Raum eine Cauchy-Folge ist. Das Umgekehrte gilt nicht für allgemeine metrische Räume (betrachte etwa die Folge  $(\frac{1}{n})$  in  $]0, 1[$ ). Daher die Definition:

**Definition 1.4** Ein metrischer Raum ist **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

Für unsere Zwecke reicht der folgende

**Satz 1.5** *Jede abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbf{R}^n$  ist vollständig.*

**Stetigkeit von Funktionen.** Wie im Fall von Funktionen auf  $\mathbf{R}$ , kann man die Metrik benutzen, um verschiedene Stetigkeitseigenschaften von Funktionen einzuführen.  $f : X \rightarrow Y$  (wobei  $X$  und  $Y$  metrische Räume sind) ist **stetig im Punkt**  $x \in X$ , falls  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ , wenn  $x_n \rightarrow x$ . (Äquivalent dazu: Für jedes  $\epsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$ , so daß  $d(f(y), f(x)) < \epsilon$ , falls  $d(x, y) < \delta$ ).  $f$  ist **auf  $X$  stetig**, falls es in jedem Punkt stetig ist.

In Symbolen:

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{y \in X} d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

$f$  ist ein **Homöomorphismus**, falls  $f$  bijektiv und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig sind. Zwei metrische Räume  $X$  und  $Y$  sind **homöomorph**, wenn ein Homöomorphismus von  $X$  auf  $Y$  existiert.

$f$  ist **gleichmäßig stetig**, falls zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta$  existiert, so daß für jedes Paar  $x, y \in X$ ,  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ , wenn  $d(x, y) < \delta$ , d.h.  $\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x, y \in X} d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

$f$  ist **Lipschitz-stetig**, falls ein  $K > 0$  existiert, so daß

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$$

für jedes Paar  $x, y \in X$ . Falls ein solches  $K$  mit  $K < 1$  existiert, dann ist  $f$  eine **Kontraktion**. In Symbolen:

$$\bigvee_{K < 1} \bigwedge_{x, y \in X} d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y).$$

Folgender Satz ist die Basis von vielen Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungen:

**Satz 1.6 Der Fixpunktsatz von Banach.** *Sei  $X$  ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum und sei  $f : X \rightarrow X$  eine Kontraktion. Wähle einen Startwert  $x_0$  und definiere eine Folge  $(x_n)$  rekursiv wie folgt:*

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

*Dann konvergiert  $(x_n)$  gegen einen Fixpunkt von  $f$ , d.h. gegen ein Element  $x$  mit  $f(x) = x$ . Außerdem ist  $x$  der einzige Fixpunkt von  $f$ .*

BEWEIS. Übung. ■

Ein metrischer Raum  $X$  ist **folgenkompakt**, falls jede Folge  $(x_n)$  eine konvergierende Teilfolge besitzt. Es ist klar, daß eine abgeschlossene Teilmenge eines folgenkompakten Raumes selber folgenkompakt ist. Daher kann man leicht folgende Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß ableiten:

**Satz 1.7** *Eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbf{R}^n$  ist genau dann folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

BEWEIS. Falls  $A$  nicht abgeschlossen oder nicht beschränkt ist, dann ist es leicht, eine Folge  $(x_n)$  aus  $A$  zu finden, sodaß keine Teilfolge gegen einen Punkt aus  $A$  konvergiert. Man wähle eine Folge, die gegen einen Punkt  $x_0 \notin A$  bzw. gegen  $\infty$  konvergiert. Für die Umkehrung genügt es, den Fall  $A = \prod_i [a_i, b_i]$  zu betrachten. Dies wird wie beim eindimensionalen Fall (vgl. Analysis I) bewiesen. ■

**Satz 1.8** *Seien  $X$  und  $Y$  folgenkompakte metrische Räume. Dann ist  $X \times Y$  folgenkompakt.*

BEWEIS. Sei  $((x_n, y_n))$  ein Folge aus  $X \times Y$ .  $(x_n)$  hat eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ .  $(y_{n_k})$  hat eine konvergente Teilfolge  $(y_{n_{k_r}})$ . Dann ist  $(x_{n_{k_r}}, y_{n_{k_r}})$  eine konvergente Teilfolge der ursprünglichen Folge. ■

**Satz 1.9** *Sei  $X$  folgenkompakt und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $f(X)$  folgenkompakt.*

BEWEIS. Sei  $(y_n)$  eine Folge aus  $f(X)$ . Jedes  $y_n$  hat die Gestalt  $f(x_n)$ , wobei  $(x_n)$  eine Folge aus  $X$  ist.  $(x_n)$  hat eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  in  $X$ . Dann ist  $(y_{n_k})$  eine konvergente Teilfolge von  $(y_n)$ . ■

**Satz 1.10** *Sei  $X$  ein folgenkompakter metrischer Raum. Dann ist ein Teilraum  $X_0$  von  $X$  genau dann folgenkompakt, wenn  $X_0$  in  $X$  abgeschlossen ist.*

BEWEIS. Übung. ■

**Satz 1.11** *Sei  $f$  eine stetige reellwertige Funktion auf einem folgenkompakten metrischen Raum  $X$  (insbesondere auf einer abgeschlossenen, beschränkten Teilmenge von  $\mathbf{R}^n$ ). Dann ist  $f$  beschränkt, und es existieren Punkte  $x_0$  und  $x_1$ , so daß*

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in X\} \quad f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

BEWEIS. Vgl. Analysis I (für den Fall  $X = [a, b]$ ). ■

**Satz 1.12** *Sei  $f$  eine stetige Funktion von einem folgenkompakten metrischen Raum  $X$  in einen metrischen Raum  $Y$ . Dann ist  $f$  gleichmäßig-stetig.*

BEWEIS. Vgl. Analysis I (für den Fall  $X = [a, b]$ ). ■

Für weitere topologische Begriffe und Ergebnisse siehe Anhang.

## Aufgaben

1. Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Zeige, daß  $\Gamma(f)$  und  $X$  homöomorph sind. ( $\Gamma(f)$  ist der Graph  $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ ).

In den folgenden vier Beispielen bezeichnet  $X$  einen separablen metrischen Raum. (Ein metrischer Raum ist separabel, wenn eine Folge  $(x_n)$  existiert, sodaß  $\{x_n\}$  dicht in  $X$  liegt, d.h. der Abschluß ist gleich  $X$ ).

2. a) Ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie paarweise disjunkter offener Mengen, so ist  $I$  höchstens abzählbar.  
 b) Die Menge der isolierten Punkte von  $X$  ist höchstens abzählbar. ( $x$  ist **isoliert** in  $X$ , falls  $\{x\}$  offen ist).
3. Jeder Teilraum  $Y$  von  $X$  ist separabel.
4. Jede offene Überdeckung von  $X$  besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.
5. Ist  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  eine beliebige Funktion, so ist die Menge

$$\{y \in X : \lim_{x \rightarrow y, x \neq y} f(x) \text{ existiert und ist von } f(y) \text{ verschieden} \}$$

höchstens abzählbar. (Für jedes Paar rationaler Zahlen  $p, q$  mit  $p < q$  besteht die Menge  $\{y \in X : f(y) \leq p < q \leq \lim_{x \rightarrow y, x \neq y} f(x)\}$  nur aus isolierten Punkten).

6. Bestimme eine Metrik  $d$  auf  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  derart, daß  $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, d)$  vollständig und separabel ist.
7. Zeige, daß  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|$  Normen auf  $\mathbf{R}^n$  sind.
8. Zeige: Die Abbildung

$$\|\cdot\|_p : x \mapsto \left( \sum_{i=1}^n |\xi_i|^p \right)^{1/p}$$

ist eine Norm auf  $\mathbf{R}^n$  ( $1 < p < \infty$ ).

9. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $A$  eine nichtleere Teilmenge. Zeige: Die Abbildung

$$d_A : x \mapsto \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

ist Lipschitz-stetig. Welche ist die entsprechende Lipschitz-Konstante? Welche ist die Nullmenge von  $d_A$ ?

10.  $X$  metrisch,  $A(\subseteq X)$  abgeschlossen. Dann gilt:

$$A = \bigcap_n [d_A < \frac{1}{n}] \quad ([d_A < \frac{1}{n}] := \{x \in X : d_A(x) < \frac{1}{n}\}).$$

11. Gilt in jedem metrischen Raum  $(X, d) : \overline{[d(x, \cdot) < 1]} = [d(x, \cdot) \leq 1]$ ?

12. Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $M := P(X)$ . Ist  $d(A, B) := \sup\{d_A(x) : x \in B\}$  eine Metrik auf  $M$ ?

13. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  eine stetig Funktion so daß

$$f(0) = 0 \quad f(x + y) \leq f(x) + f(y),$$

und  $f$  ist streng monoton wachsend. Zeige:  $\bar{d} = f \circ d$  ist auch eine Metrik auf  $X$ .

Zeige:  $x_n \rightarrow x$  für  $d \iff x_n \rightarrow x$  für  $\bar{d}$ .

(Wichtigstes Beispiel:  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ).

14. Seien  $V_1$  und  $V_2$  Vektorräume mit Normen  $\|\cdot\|_1$  bzw.  $\|\cdot\|_2$  und sei  $f : V_1 \rightarrow V_2$  linear. Zeige:  $f$  ist genau dann stetig, wenn  $f$  Lipschitz-stetig ist.

15. Seien  $X, Y, Z$  Teilmengen von  $\mathbf{R}^n$ . Zeige: Aus  $X \sim Y$  und  $Y \sim Z$  folgt:  $X \sim Z$ . ( $\sim$  bedeutet "sind homöomorph").

16. Zeige: Der Zylinder und das Möbius-Band sind nicht homöomorph (anschaulicher Beweis).

17. Betrachte folgende Teilmengen von  $\mathbf{R}$  bzw.  $\mathbf{R}^2$ : a)  $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ ; b)  $\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbf{N}\}$ ; c)  $\{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : m, n \in \mathbf{N}\}$ ; d)  $\{(t, \cos \frac{1}{t}) : t \in \mathbf{R}_+\}$ . Bestimme

(i) die Häufungspunkte;

(ii) die Kondensationspunkte;

(iii) die Randpunkte.

18. Welche der folgenden Beziehungen gelten?

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ;$$

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$$

19. Eine **Invers-Metrik** auf einer Menge  $X$  ist eine Abbildung  $d$  von  $X \times X$  in  $\mathbf{R}^+$ , sodaß

$$d(x, x) = 0;$$

$$d(x, y) = d(y, x);$$

$$d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z).$$

Gib ein Beispiel einer Invers-Metrik an.

20. Sei  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitzkonstante  $< 1$ .

Zeige:  $g = \text{Id} - f$  ist injektiv.

21. Zeige:  $g$  ist surjektiv, ( $g$  wie in 19.).



## 2 Kurven und Flächen in $\mathbf{R}^n$ , Kurvenintegrale.

**Definition 2.1** Eine **Kurve** in  $\mathbf{R}^n$  ist eine stetige Abbildung auf einem Intervall  $I$  mit Werten in  $\mathbf{R}^n$ .

Wir verwenden den Buchstaben  $c$  für Kurven und schreiben  $c = (c_1, \dots, c_n)$ , wobei  $c_i$  die **Komponenten** von  $c$  sind.

BEISPIELE.

I. Die Kreislinie in  $\mathbf{R}^2$  ist die Kurve

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

mit Definitionsbereich  $[0, 2\pi]$ . Hier ist  $r > 0$  der **Kreisradius**.

II. Eine **Gerade** in  $\mathbf{R}^n$  ist eine Kurve der Form

$$c(t) = a + tb,$$

wobei  $a, b \in \mathbf{R}^n$ ,  $b \neq 0$ .

III. Die Kurve mit Parametrisierung

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

heißt eine **Schraubenlinie** in  $\mathbf{R}^3$ .

**Definition 2.2** Falls  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , sagen wir, daß  $c$  **differenzierbar** bzw. **stetig differenzierbar** ist, wenn das Gleiche gilt für jedes  $c_i$ .

$$c' = (c'_1, \dots, c'_n)$$

ist dann die **Ableitung** von  $c$ .

Ähnlicherweise sagen wir, daß  $c$  **integrierbar** ist, falls dies für jedes  $c_i$  gilt und setzen dann

$$\int_a^b c(t) dt = \left( \int_a^b c_1(t) dt, \dots, \int_a^b c_n(t) dt \right).$$

In diesem Zusammenhang ist folgende Ungleichung wichtig:

$$\left\| \int_a^b c(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|c(t)\| dt.$$

( $\| \cdot \|$  bezeichnet irgendeine Norm auf  $\mathbf{R}^n$ ).

BEWEIS. Wir bemerken, daß das Integral  $\int_a^b c(t) dt$  der Limes der Riemann-Summen

$$\sum_k c(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$\left\| \sum_k c(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \right\| \leq \sum_k \|c(\xi_k)\|(t_k - t_{k-1}).$$

Die rechte Seite ist eine Riemann-Summe für  $\int_a^b \|c(t)\| dt$ .

■

BEISPIEL. Falls  $c$  und  $d$  differenzierbar sind, dann auch die skalare Funktion  $t \mapsto (c(t)|d(t))$ , und es gilt:

$$\frac{d}{dt}(c(t)|d(t)) = (c'(t)|d(t)) + (c(t)|d'(t)).$$

(Beweis wie bei der Produktregel in  $\mathbf{R}$ ).

**Bogenlänge.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  ein Kurve. Man definiert die **Bogenlänge** von  $c$  wie folgt: Betrachte zunächst eine Unterteilung  $\mathcal{P}$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

und bilde die Summe

$$L_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^n \|c(t_k) - c(t_{k-1})\|.$$

(Wir verwenden jetzt ausschließlich die euklidische Metrik.) Die Kurve heißt **rektifizierbar** (mit der Bogenlänge  $L$ ), falls zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so daß für jede Unterteilung mit  $\max |t_i - t_{i-1}| < \delta$  gilt

$$|L_{\mathcal{P}} - L| < \epsilon.$$

BEISPIEL. Falls die Kurve  $c$  stetig-differenzierbar ist (d.h. jede Komponente  $c_i$  ist stetig-differenzierbar), dann ist  $c$  rektifizierbar und es gilt:

$$L = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Als konkretes Beispiel berechnet man sofort, daß die Länge der Kreislinie mit Radius  $r$  gleich  $2\pi r$  ist.

**Der Tangentenvektor.** Sei  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine glatte Kurve. Falls  $c'(t_0) \neq 0$ , dann heißt  $t_0$  ein **regulärer Punkt** der Kurve. Sonst ist  $t_0$  ein **singulärer Punkt**. Z.B. Ist der Ursprung eine Singularität der Kurve  $c(t) = (t^2, t^3)$  (Neilsche Parabel).

Die Kurve heißt **glatt**, falls jedes  $t \in [a, b]$  ein regulärer Punkt ist.

Falls  $t_0$  ein regulärer Punkt ist, dann ist

$$\mathbf{T}_c(t_0) = \frac{c'(t_0)}{\|c'(t_0)\|}$$

ein **Tangenteneinheitsvektor** zur Kurve im Punkt  $t_0$ . Die Gerade

$$t \mapsto c(t_0) + tc'(t_0)$$

ist dann die **Tangentialgerade** zur Kurve an der Stelle  $t_0$ .

Falls  $c$  und  $d$  Kurven sind, so daß  $c(t_0) = d(t_1)$  (d.h. der entsprechende Punkt ist ein Schnittpunkt der Kurven), dann ist der **Schnittwinkel** von  $c$  und  $d$  an dieser Stelle der Winkel  $\theta$ , wobei

$$\cos \theta = \frac{(c'(t_0)|d'(t_1))}{\|c'(t_0)\| \|d'(t_1)\|}.$$

**Definition 2.3 Parametertransformationen.** Seien  $c : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  und  $d : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  zwei Kurven. Eine Parametertransformation zwischen  $c$  und  $d$  ist eine stetig-differenzierbare, bijektive Abbildung

$$\phi : [a, b] \rightarrow [a_1, b_1]$$

mit  $\phi'(t) \neq 0$  für jedes  $t$ , so daß  $c = d \circ \phi$ . (Dann ist  $\phi^{-1}$  auch stetig differenzierbar—siehe Analysis I).

Falls  $\phi'(t) > 0$  für jedes  $t$ , dann heißt  $\phi$  **orientierungserhaltend**, sonst ist  $\phi$  **orientierungsumkehrend**.

BEMERKUNG.

I. Falls  $\phi$  orientierungserhaltend ist, dann gilt

$$\mathbf{T}_c(t) = \mathbf{T}_d(\phi(t)) \quad (t \in [a, b]).$$

(Für orientierungsumkehrende Abbildungen gilt:

$$\mathbf{T}_c(t) = -\mathbf{T}_d(\phi(t)).$$

II. Bogenlänge: Es gilt:  $L(c) = L(d)$ .

**Bogenlängenparametrisierung.** Sei  $c$  eine glatte stetig-differenzierbare Kurve. Wir schreiben

$$s = \phi(t) = \int_a^t \|\dot{c}'(u)\| du.$$

$\phi$  ist eine Umparametrisierung und wir setzen  $\gamma = c \circ \phi^{-1}$ . Es gilt also  $\gamma(s) = c(t)$ .  $\gamma$  heißt die **Bogenlängenparametrisierung** von  $c$ . Für Kurven  $\gamma$  mit Bogenlängenparametrisierung gilt die einfache Formel  $\mathbf{T}_\gamma(s) = \gamma'(s)$  für den Tangentenvektor.

**Kurvenintegrale.** Seien  $a_1, \dots, a_n$  stetige Funktionen auf einer Teilmenge  $U$  von  $\mathbf{R}^n$ ,  $c$  eine stetig-differenzierbare Kurve in  $U$ . Wir definieren das **Kurvenintegral der ersten Art**  $\int_c a_1(x) dx_1 + \dots + a_n(x) dx_n$  als das Riemann-Integral:

$$\int_a^b [a_1(c(t))c_1'(t) + \dots + a_n(c(t))c_n'(t)] dt.$$

(Andere Schreibweise:  $\int_c \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}$ , wobei  $X$  das Vektorfeld  $(a_1, \dots, a_n)$  ist).

Der Integrand

$$a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$$

des obigen Integrals heißt eine **Pfaffsche Differentialform**. Wir betrachten solche Formen hier als formale Ausdrücke, die über Kurven integriert werden. (Physikalische Veranschaulichung: Die Differentialform stellt etwa ein Kraftfeld dar, das Kurvenintegral ist die von einem Teilchen geleistete Arbeit, wenn es die Kurve durchläuft—für eine saubere begriffliche Erklärung siehe die Vorlesung “Differentialgeometrie”).

**Ebene Kurven:** Sei  $c : I = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  eine ebene Kurve. In diesem Spezialfall ist

$$s = \int_a^t \sqrt{(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2} dt$$

die Bogenlänge von  $c$ ,

$$L = \int_a^b \sqrt{(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2} dt$$

die Gesamtlänge.

Falls  $(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2 = 1$ , dann hat die Kurve **Bogenlängenparametrisierung**. Wir benutzen wie oben den Buchstaben  $s$  für die unabhängige Variable und  $\gamma$  für die Parametrisierung. In diesem Fall ist

$$\mathbf{T}(s) = (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s))$$

der **Tangentenvektor** zu  $\gamma$  im Punkt  $s$ . Es gilt  $\|\mathbf{T}\| = 1$ . Sei  $\mathbf{N} = D_{\frac{\pi}{2}}\mathbf{T}$ .  $\mathbf{N}$  heißt der **Normalvektor** an  $\gamma$  und  $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$  bildet eine orthogonale Basis für  $\mathbf{R}^2$  (das **begleitende Zweibein**). ( $D_{\frac{\pi}{2}}$  ist der Operator der Drehung um  $90^\circ$ , d.h.  $D_{\pi}((\xi, \eta)) = (-\eta, \xi)$ .)

Es gibt eine Funktion  $\kappa$ , sodaß

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa(s)\mathbf{N}(s), \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{T}(s).$$

$\kappa$  heißt die **Krümmung** von  $\gamma$  an der Stelle  $s$ .  $\rho = \frac{1}{|\kappa|}$  heißt der **Krümmungsradius**,  $C = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{N}(s)$  das **Krümmungszentrum**, falls  $\kappa$  keine Nullstellen hat.

**Kurvenintegrale, 2. Art:** Für eine skalarwertige Funktion  $f$  definieren wir

$$\int_c f ds = \int_a^b f(c_1(t), c_2(t)) \sqrt{(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2} dt.$$

**BEMERKUNG.**

I. Fall  $c$  eine geschlossene Kurve ohne Durchkreuzungen ist, dann ist das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2} \int_c (y dx - x dy)$$

der Inhalt der von  $c$  eingeschlossenen Fläche.

II. Falls  $\mathbf{X} = \text{grad } f$  das Gradientenfeld einer skalaren Funktion  $f$  ist (siehe Kapitel 3), dann gilt

$$\int_c \mathbf{X} \cdot ds = f(b) - f(a)$$

wobei  $a, b$  die Endpunkte von  $c$  sind. In diesem Falls ist das Kurvenintegral **wegunabhängig**. Dies ist der Fall, wenn  $\frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial x}$  (falls der Definitionsbereich von  $X$  "keine Löcher" hat).

BEISPIEL. Berechne  $\int_c X_1 dx + X_2 dy$  wobei

$X(x, y) = (y, -\sin x)$ ,  $c$  die Kurve  $t \mapsto (t, t^2)$  ( $t \in [0, 1]$ )

$X(x, y) = (x + y, x - y)$ ,  $c$  die Kurve  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ).

(1) Das Integral =

$$\int_0^1 (t^2 \cdot 1 + (-\sin t) \cdot 2t) dt = \int_0^1 (t^2 - 2t \sin t) dt$$

(2) Das Integral =

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} ((\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t) \cos t) dt \\ = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt. \end{aligned}$$

**Raumkurven:** Sei  $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$  eine Kurve in  $\mathbf{R}^3$ . Wiederum definieren wir

$$\begin{aligned} s &= \int_a^t \sqrt{(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2 + (\dot{c}_3)^2} dt \\ L &= \int_a^b \sqrt{(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2 + (\dot{c}_3)^2} dt. \end{aligned}$$

$c$  hat **Bogenlängenparametrisierung**, falls

$$\frac{ds}{dt} = (\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2 + (\dot{c}_3)^2 = 1.$$

Dann gilt:  $\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$  ist ein Einheitsvektor — der **Tangentenvektor**.

$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}$  ist der **Normalvektor**

$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$  ist die **Binormale**.

**Satz 2.4** Es gibt eine positive Funktion  $\kappa$  und eine reelle Funktion  $\tau$ , sodaß

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= && \kappa \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa \mathbf{T} && + \tau \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= && -\tau \mathbf{N} \end{aligned} .$$

$\kappa(s)$  heißt die **Krümmung** von  $c$ ,  $\tau(s)$  die **Windung**,  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  ist der **Krümmungsradius**,  $C = c(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s)$  das **Krümmungszentrum** ( $\tau$  ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von der Ebene, der **Schmiegebene**, die von  $\mathbf{T}, \mathbf{N}$  aufgespannt wird).

BEISPIEL. Die Schraubenlinie  $c(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$ . Es gilt:

$$(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2 + (\dot{c}_3)^2 = 1$$

d.h. die Kurve hat Bogenlängenparametrisierung:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) &= \dot{c}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, \cos s, 1) \\ \mathbf{T}'(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, -\sin s, 0) \\ \mathbf{N}(s) &= (\cos s, -\sin s, 0) \\ \mathbf{B}(s) &= \mathbf{N}(s) \times \mathbf{T}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1).\end{aligned}$$

Aus  $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$  sieht man, daß  $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Aus  $\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s)$  und  $\mathbf{N}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0)$  sieht man, daß  $\tau(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Für eine allgemeine Kurve  $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ , d.h. nicht notwendigerweise mit Bogenlängenparametrisierung, gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}, & \mathbf{B} &= \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{B} \times \mathbf{T} \\ \kappa &= \frac{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|}{\|\dot{c}\|^3} & \tau &= \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}}]}{\|\dot{c} \times \ddot{c}^2\|}\end{aligned}$$

BEISPIEL. Für  $c(t) = (1 + t^2, t, t^3)$  gilt

$$\begin{aligned}\dot{c} &= (2t, 1, 3t^2), \ddot{c} = (2, 0, 6t), \ddot{\ddot{c}} = (0, 0, 6) \\ \dot{c} \times \ddot{c} &= (-6t, -6t^2, -2), [\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}}] = -12.\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{(36t^2 + 36t^4 + 4)^{\frac{1}{2}}}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} \\ \tau &= \frac{-12}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{\frac{2}{3}}} \\ \mathbf{T} &= \frac{(2t, 1, 3t^2)}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}} \\ \mathbf{B} &= \frac{(16t, -6t^2, -2)}{36t^2 + 36t^4 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}} \\ \mathbf{N} &= \frac{(-18t^4 + 2, -4t - 18t^3, 6t + 12t^3)}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}(36t^2 + 36t^4 + 4)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

BEISPIEL. Die Kugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  entspricht dem Würfel

$$c(s, t) = (R \sin s \cos t, R \sin s \sin t, R \cos s) \quad (0 \leq s \leq \pi, 0 \leq t \leq 2\pi).$$

Die Kugeloberfläche besitzt keinen Rand (genauer, der Rand ist gewissermaßen trivial).

Der Zylinder  $x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq h$  entspricht dem Würfel

$$c(s, t) = (r \cos s, r \sin s, t) \quad 0 \leq s \leq 2\pi, 0 \leq t \leq h.$$

Der Rand des Zylinders besteht aus den Kreisen

$$s \mapsto (r \cos s, r \sin s, 0)$$

und

$$s \mapsto (r \cos s, r \sin s, h)$$

(mit geeigneter Orientierung).

**$k$ -Würfel, Ketten:** Wir können den Begriff einer Kurve wie folgt verallgemeinern:

**Definition 2.5** Ein  $k$ -Würfel in  $\mathbf{R}^n$  ist eine glatte (etwa stetig-differenzierbare) Abbildung  $c : [0, 1]^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Eine **Kette** von  $k$ -Würfeln ist eine formale Kombination

$$n_1 c_1 + \cdots + n_r c_r$$

von  $k$ -Würfeln, wobei die Koeffizienten  $n_i$  ganze Zahlen sind. Falls  $c$  ein  $k$ -Würfel ist, dann ist der Rand  $\partial c$  von  $c$  die  $k - 1$ -Kette

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\partial_{0^i} c - \partial_{1^i} c),$$

wobei

$$\partial_{0^i} c : (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto c(t_0, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_k)$$

bzw.

$$\partial_{1^i} c : (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto c(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_k).$$

## Aufgaben

1. Integriere  $(x^2 + y) dx + (-x + 2z) dy + yz dz$  entlang der Strecke von  $(0, 3, 2)$  nach  $(-5, 2, 0)$ .

2. Berechne

$$\int_c x dy - y dx$$

bzw.

$$\int_c \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

über der Kreislinie  $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$ .

3. Betrachte die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wobei  $0 < b < a$ , mit Parametrisierung

$$(a \cos \theta, b \sin \theta).$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned} P &= (a \cos \theta, b \sin \theta), \\ P' &= -P, \\ Q &= (a \cos(\theta + \frac{\pi}{2}), b \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-a \sin \theta, b \cos \theta), \\ Q' &= -Q. \end{aligned}$$

$QQ'$  ist der zu  $PP'$  konjugierte Durchmesser.

Zeige:

Der Tangentenvektor zur Ellipse an der Stelle  $P$  ist zu  $QQ'$  parallel;

$PP'$  halbiert jede Sekante zur Ellipse, die zum Tangentenvektor an der Stelle  $P$  parallel ist;

falls die Sekante  $GG'$  zum Tangentenvektor an der Stelle  $P$  parallel ist, und  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $GG'$ , dann gilt:

$$\frac{|GM|^2}{|OQ|^2} = \frac{|PM||P'M|}{|OP|^2};$$

(Zeige, daß ein  $\phi$  existiert, sodaß

$$G = (a \cos(\theta + \phi), b \sin(\theta + \phi)), G' = (a \cos(\theta - \phi), b \sin(\theta - \phi))$$

der Inhalt des Parallelograms  $PQP'Q'$  ist  $2ab$ ;

falls  $F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$  bzw.  $F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$  die Brennpunkte der Ellipse sind, dann gilt:  $|F_1P| + |F_2P| = 2a$ ;

der Winkelhalbierer von  $\angle F_1PF_2$  steht senkrecht auf den Tangentenvektor an der Stelle  $P$ ;

sei  $E$  der Schnittpunkt der Strecken  $F_1P$  und  $QQ'$ . Zeige:  $|EP| = a$ .

4. Sei  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$  eine Kurve in der Ebene, mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  und Beschleunigung  $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ . Setze:

$$\mathbf{u}_r(t) = \frac{\mathbf{x}(t)}{r(t)}, \quad \mathbf{u}_\theta(t) = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)).$$

Zeige:

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta;$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r; \quad \mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta; \quad \mathbf{a} = \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{u}_\theta.$$

5. Die Beschleunigung eines Teilchens ist genau dann radial, wenn  $r^2 \frac{d\theta}{dt}$  konstant ist. (Bemerkung: Aus der Formel

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t r(t)^2 \theta'(t) dt$$

für den Inhalt folgt dann:  $\frac{dA}{dt}$  ist konstant).



6. Zeige: Die Kurve mit Darstellung  $r(1 + \epsilon \cos \theta) = c$  ( $|\epsilon| < 1, c > 0$ ) in Polarkoordinaten ist eine Ellipse mit 0 als Brennpunkt und der Koordinatenachsen als Hauptachsen. (Die Halbachsen sind dann  $\frac{c}{(1 - \epsilon^2)}$  bzw.  $\frac{c}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$ ).
7. Ein Teilchen bewegt sich auf der obigen Ellipse mit radialer Beschleunigung. Zeige:  $\mathbf{a}(t) = -\frac{k^2}{cr^2} \mathbf{u}_r$ , wobei  $k = 2\frac{dA}{dt}$ .
8. Bestimme die Beschleunigung (als Funktion von  $r$ ) eines Teilchens, das auf einer Ellipse mit  $O$  als Mittelpunkt und mit radialer Beschleunigung sich bewegt.
9. Seien  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  vektorwertige Funktionen: Zeige:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}|\mathbf{y}\right) + \left(\mathbf{x}|\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right), \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{y}\right) + \left(\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{y}}{dt}\right).$$

Zeige: Falls  $|\mathbf{x}|$  konstant ist, dann gilt:  $\mathbf{x}' \perp \mathbf{x}$ .

10. Sei  $\mathbf{x}$  die Lage eines Teilchens im Raum. Zeige: Falls die Beschleunigung radial ist, dann ist  $\mathbf{x} \times \mathbf{v}$  ein konstanter Vektor  $\mathbf{K}$ , wobei  $K = |\mathbf{K}| = 2\frac{dA}{dt}$ .
11. Sei  $\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{u}_r$  und  $\frac{dA}{dt} = \frac{K}{2}$ . Dann existiert ein konstanter Vektor  $\mathbf{e}$ , sodaß  $r + (\mathbf{x}|\mathbf{e}) = \frac{K^2}{GM}$  (d.h. die Gleichung von  $\mathbf{x}$  in Polarkoordinaten ist  $r(1 + e \cos \theta) = \frac{K^2}{GM}$ ).

### 3 Partielle Ableitungen, Differenzierbarkeit, Taylor-Formel, Lokale Extrema

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Ableitung von Funktionen  $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Allein die Schreibweise liefert Probleme in diesem Fall. Betrachten wir z.B. ein Polynom in zwei Variablen, etwa

$$p(x, y) = 13 + 5xy + 3xy^3 - x^7y$$

oder in drei Variablen:

$$7 + 2z + 3xy + yz + xz - 17x^2yz.$$

Wie soll man aber das *allgemeine* Polynom in zwei Variablen schreiben? Versuche wie

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \dots$$

sind offensichtlich unbrauchbar. Besser ist

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots$$

oder

$$\sum_{k,l} a_{kl}x^k y^l.$$

Falls aber die Zahl der unabhängigen Variablen groß ist, dann ist diese Schreibweise auch unbrauchbar. Wir verwenden eine, die von L. Schwartz eingeführt wurde, wobei er den Begriff eines Multi-Index verwendete.

**Schreibweise.** Wir schreiben  $x = (x_1, \dots, x_n)$  für ein Element von  $\mathbf{R}^n$ . Ein **Multi-Index** ist ein  $n$ -Tupel  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , wobei jedes  $p_i \in \mathbf{N}_0$ .  $x^p$  bedeutet dann  $x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ . Wir schreiben auch

$$\begin{aligned} p! &= p_1! \dots p_n! \\ |p| &= p_1 + \dots + p_n \\ \binom{p}{k} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{p_1}{k_1} \dots \binom{p_n}{k_n} \\ p \leq q &\iff p_i \leq q_i \text{ für jedes } i. \end{aligned}$$

Das allgemeine Polynom läßt sich also wie folgt schreiben:

$$\sum_{|p| \leq k} a_p x^p.$$

Als ein Beispiel der Eleganz dieser Schreibweise formulieren wir den binomischen Lehrsatz wie folgt:

Seien  $x, y \in \mathbf{R}^n$ ,  $p \in (\mathbf{N}_0)^n$  ein Multi-Index. Dann gilt

$$(x + y)^p = \sum_{0 \leq k \leq p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}.$$

Versuche, diesen Lehrsatz mit einer anderen Schreibweise zu formulieren, werden den Leser bald von der Unentbehrlichkeit der Multi-Indizes überzeugen.

#### Beispiele von Funktionen mehrerer Variablen

## I. Lineare Funktionale:

$$m = 2, n = 1 : f(x, y) = ax + by + c$$

$$m = 3, n = 1 : f(x, y) = ax + by + cz + d.$$

$$\text{allg.: } f(x_1, \dots, x_m) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m + d.$$

## II. Quadratische Funktionale:

$$m = 2 : f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ (insbesondere: } x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy, x^2)$$

$$m = 3 : f(x, y) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + ezx + fxy.$$

$$\text{allg.: } f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_ix_j.$$

## III. Funktionen, die als Kombinationen von elementaren Funktionen gebildet werden:

$$f(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin(x + y), \sin(x^2 + xy + y^2) \right)$$

$$f(x, y, z) = (\ln(x^2 + y^2 + z^2), e^{x+y} \sin(|y + z|))$$

usw.

**Definition 3.1** Sei  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ , wobei  $U$  offen in  $\mathbf{R}^n$  ist. Dann ist  $f$  im Punkt  $x_0$  **partiell-differenzierbar bzgl. der  $i$ -ten Koordinatenrichtung**, falls

$$D_i f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

existiert. ( $e_i$  ist das  $i$ -te Basiselement  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , wobei die 1 in der  $i$ -ten Stelle ist). Der Limes ist dann die  **$i$ -te partielle Ableitung** von  $f$  im Punkt  $x$ . Falls jede partielle Ableitung  $D_i f$  in jeden Punkt aus  $U$  existiert, dann ist  $f$  **partiell differenzierbar** und die Funktionen

$$x \mapsto D_i f(x)$$

sind die **partiellen Ableitungen** von  $f$ . Falls diese Ableitungen stetig sind, dann heißt  $f$  **stetig partiell differenzierbar**. Andere Schreibweise  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Für eine Funktion  $f$  von zwei bzw.

drei Variablen als  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  bzw.  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ .

Falls  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  so ist, daß jedes  $f_i$  (stetig) partiell differenzierbar ist, dann sagen wir, daß  $f$  (stetig) partiell differenzierbar ist.

**Definition 3.2** Sei  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  partiell differenzierbar. Der Vektor

$$\text{grad } f(x) = (D_1 f(x), \dots, D_n f(x))$$

heißt der **Gradient** von  $f$  in  $x$ . (In Dimensionen 2 bzw. 3,  $\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  bzw.  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ ).

**Richtungsableitung:** Falls  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  stetig partiell-differenzierbar ist und  $v$  ein Vektor aus  $\mathbf{R}^n$ , dann ist

$$D_v f(x) = (\text{grad } f(x)|v)$$

die **Richtungsableitung** von  $f$  in Richtung  $v$ . Die Bezeichnung stammt von der Tatsache, daß  $D_v f(x)$  die Ableitung der Funktion

$$t \mapsto f(x + tv)$$

einer Variable an der Stelle 0 ist. Das folgt aus dem nächsten Satz:

**Satz 3.3** Sei  $c$  eine glatte Kurve in  $U$  und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = (c'(t)|\text{grad } f(c(t))).$$

Dies folgt aus der Kettenregel (siehe unten).

Daraus sieht man (mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung), daß der Gradientenvektor  $\text{grad } f(x)$  folgende geometrische Bedeutung hat: Er ist die Richtung des *steilsten Zuwachses* der Funktion  $f$ .

**Satz 3.4** Sei  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  stetig partiell differenzierbar, wobei  $U$  eine Umgebung von  $x$  ist. Dann gilt für  $h \in \mathbf{R}^n$  mit  $\|h\| < \epsilon$ , wobei  $U(x, \epsilon) \subset U$ ,

$$f(x + h) = f(x) + (\text{grad } f(x)|h) + \rho(h),$$

wobei  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ .

Der folgende Begriff ist eine direkte Übertragung der entsprechenden Definition für den eindimensionalen Fall.

**Definition 3.5** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  eine Abbildung.  $f$  heißt in  $x \in U$  (total) **differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung

$$A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$$

gibt, so daß

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \|h\|\varphi(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0.$$

Wir schreiben  $(Df)_x$  für  $A$ —die **Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $x$ . Falls  $(Df)_x$  existiert für jedes  $x \in U$ , dann heißt  $f$  **auf  $U$  differenzierbar**. Die Abbildung  $Df : x \mapsto (Df)_x$  (von  $U$  in  $M_{m,n}$ , die Familie aller  $m \times n$  Matrizen) ist dann die **Ableitung** von  $f$ . Falls  $Df$  stetig ist, dann ist  $f$  **stetig differenzierbar**.

**BEMERKUNG.** Ist  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ , dann ist  $f$  genau dann differenzierbar, wenn alle  $f_i : U \rightarrow \mathbf{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) differenzierbar sind, wobei  $f = (f_1, \dots, f_m)$ .

Im folgenden Satz untersuchen wir die Beziehung zwischen Differenzierbarkeit und der Existenz von partiellen Ableitungen.

**Satz 3.6** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ .

i)  $f$  sei differenzierbar in  $x \in U$ . Dann gilt: Alle  $f_i$  sind in  $x$  partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

wobei  $[a_{ij}]$  die Matrix von  $(Df)_x$  ist;

ii) Seien die  $f_i$  stetig partiell differenzierbar in einer Umgebung von  $x$  und

$$a_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \text{ f\"ur } i = 1, \dots, m \text{ und } j = 1, \dots, n.$$

Dann ist  $f$  in  $x$  differenzierbar und es gilt

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \|h\|\varphi(h),$$

wobei

$$A = (a_{ij}) \text{ und } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0.$$

**Bezeichnung.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  differenzierbar in  $x$ . Dann heißt die  $(m \times n)$ -Matrix

$$(Df)(x) = J_f(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)$$

die **Funktionalmatrix** oder **Jacobi-Matrix** von  $f$  in  $x$ .

BEWEIS.

i) Aus der Voraussetzung folgt

$$f_i(x+h) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij}h_j + \|h\|\varphi_i(h)$$

mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_i(h) = 0$  für  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Für  $j = 1, 2, \dots, n$  und  $h \in \mathbf{R}$  mit  $x + te_j \in U$  gilt dann:

$$f_i(x + te_j) = f_i(x) + a_{ij}t + |t|\varphi_i(te_j)$$

mit  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_i(te_j) = 0$ .

Daraus folgt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} = a_{ij} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \varphi_i(te_j) = a_{ij}, \text{ q.e.d.}$$

ii) Es gilt für  $i = 1, 2, \dots, m$

$$f_i(x+h) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) h_j + \|h\| \varphi_i(h)$$

mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_i(h) = 0$ .

Dann ist

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \|h\| \varphi(h),$$

wobei

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi(h) = \begin{bmatrix} \varphi_1(h) \\ \vdots \\ \varphi_m(h) \end{bmatrix}$$

mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ , q.e.d. ■

**Satz 3.7 (Kettenregel):** Seien  $U \subset \mathbf{R}^n$  und  $V \subset \mathbf{R}^m$  offen und  $g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $f : V \rightarrow \mathbf{R}^k$  Abbildungen mit  $g(U) \subset V$ . Ist  $g$  in  $x \in U$  differenzierbar und  $f$  in  $y := g(x) \in V$  differenzierbar, dann ist die zusammengesetzte Abbildung

$$f \circ g : U \rightarrow \mathbf{R}^k$$

in  $x$  differenzierbar, und es gilt:

$$D(f \circ g)_x = (Df)_y \circ (Dg)_x \quad \text{bzw.} \quad J_{f \circ g}(x) = J_f(g(x)) J_g(x).$$

BEWEIS. Sei  $A := J_g(x)$  und  $B := J_f(y)$ . Dann ist

$$g(x+h) = g(x) + Ah + \|h\| \varphi(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0,$$

$$f(y+k) = f(y) + Bk + \|k\| \psi(k) \quad \text{mit} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \psi(k) = 0.$$

Wählt man speziell

$$k = Ah + \|h\| \varphi(h),$$

dann ist

$$\|k\| \leq \|Ah\| + \|h\| \|\varphi(h)\| \leq (\|A\| + \|\varphi(h)\|) \|h\|.$$

Insbesondere gilt  $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ .

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) &= f(g(x) + k) \\ &= f(g(x)) + BAh + B\|h\| \varphi(h) + \|k\| \psi(k). \end{aligned}$$

Mit

$$\chi(h) := B\varphi(h) + \frac{\|k\|}{\|h\|} \psi(k) \quad \text{für } h \neq 0, \chi(0) := 0,$$

ist  $\|\chi(h)\| \leq \|B\| \|\varphi(h)\| + (\|A\| + \|\varphi(h)\|) \|\psi(k)\|$ , also  $\lim_{h \rightarrow 0} \chi(h) = 0$ , und

$$(f \circ g)(x+h) = f(g(x)) + BAh + \|h\| \chi(h).$$

Also ist  $J_{f \circ g}(x) = BA$ , q.e.d. ■

In Koordinaten schaut das so aus:

**Satz 3.8** Seien  $V \subset \mathbf{R}^m$ ,  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen und  $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  differenzierbare Abbildungen mit  $g(U) \subset V$ . Dann ist

$$h := f \circ g : U \rightarrow \mathbf{R}$$

partiell differenzierbar und es gilt für  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g_1(x), \dots, g_m(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

BEWEIS.

$$J_{f \circ g}(x) = J_h(x) = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(x) \right) = \text{grad } h(x).$$

$$J_f(g(x)) = \left( \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(x)) \right) = \text{grad } f(g(x)).$$

$$J_g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Die Behauptung ergibt sich aus  $J_{f \circ g}(x) = J_f(g(x))J_g(x)$ . ■

BEISPIEL. Sei  $f$  die Funktion  $(x, y) \mapsto (3 \sin xy, e^{x^2+y^2}, 2x - 6)$ ,  $g$  die Funktion  $(u, v, w) \mapsto u^2 + v^2 + w^2$ .

$$J_f(x, y) = \begin{bmatrix} 3y \cos xy & 3x \cos xy \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$J_g(u, v, w) = \begin{bmatrix} 2u \\ 2v \\ 2w \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} J_{g \circ f}(x, y) &= J_g(f(x, y))J_f(x, y) \\ &= \begin{bmatrix} 2(3 \sin xy) \\ 2(e^{x^2+y^2}) \\ 2(2x - 6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3y \cos xy & 3x \cos xy \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

BEISPIEL. Die wichtigsten Anwendungen der Kettenregel sind die Koordinatentransformationen: Z.B.

in  $\mathbf{R}^2$ :

$$\phi_1 : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ (Polarkoordinaten)}$$

in  $\mathbf{R}^3$ :

$$\phi_2 : (r, \theta, \zeta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, \zeta) \text{ (Zylinder-Koordinaten)}$$

$$\phi_3 : (r, \theta, \phi) \mapsto (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) \text{ (sphärische Koordinaten)}.$$

Es gilt etwa:

$$J_{\phi_3}(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{bmatrix}.$$

**Definition 3.9** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen. Dann wird durch vollständige Induktion definiert: Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  heißt  **$k$ -mal stetig partiell differenzierbar**, wenn  $f$   $(k-1)$ -mal stetig partiell differenzierbar ist und alle  $(k-1)$ -ten partiellen Ableitungen

$$D_{i_{k-1}} \dots D_{i_2} D_{i_1} f : U \rightarrow \mathbf{R} \quad (1 \leq i_\ell \leq n \text{ für } \ell = 1, \dots, k-1)$$

stetig partiell differenzierbar sind.

**Satz 3.10** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für jedes  $x \in U$  und für alle  $i, j = 1, \dots, n$

$$D_j D_i f(x) = D_i D_j f(x).$$

BEWEIS. Die Behauptung ist klar für  $i = j$ . Sei also  $i \neq j$  und  $x \in U$  fest. Wir definieren

$$\varphi(s, t) = f(x + se_i + te_j)$$

$\varphi$  ist eine in einer Umgebung  $V$  des Nullpunktes  $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$  definierte Funktion. Aus der Definition folgt

$$\begin{aligned} D_1 \varphi(s, t) &= D_i f(x + se_i + te_j), \\ D_2 \varphi(s, t) &= D_j f(x + se_i + te_j). \end{aligned}$$

Damit erhält man weiter:

$$\begin{aligned} D_2 D_1 \varphi(s, t) &= D_j D_i f(x + se_i + te_j), \\ D_1 D_2 \varphi(s, t) &= D_i D_j f(x + se_i + te_j). \end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen:  $D_2 D_1 \varphi(0, 0) = D_1 D_2 \varphi(0, 0)$ .

1) Sei  $t \neq 0$  fest und

$$\phi(s) := \varphi(s, t) - \varphi(s, 0).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist

$$\phi(s) - \phi(0) = s\phi'(s_1),$$

wo  $s_1$  ein fester Wert zwischen 0 und  $s$  ist, und

$$\phi'(s_1) = D_1 \varphi(s_1, t) - D_1 \varphi(s_1, 0) = t D_2 D_1 \varphi(s_1, t_1),$$

wo  $t_1$  ein fester Wert zwischen 0 und  $t$  ist. Also ist

$$\varphi(s, t) - \varphi(s, 0) - \varphi(0, t) + \varphi(0, 0) = st D_2 D_1 \varphi(s_1, t_1).$$

2) Ähnlicherweise gilt

$$\varphi(s, t) - \varphi(s, 0) - \varphi(0, t) + \varphi(0, 0) = st D_1 D_2 \varphi(s_2, t_2)$$



mit  $s_2$  (bzw.  $t_2$ ) zwischen 0 und  $s$  (bzw. 0 und  $t$ ).

Nach 1) und 2) ist

$$D_2 D_1 \varphi(s_1, t_1) = D_1 D_2 \varphi(s_2, t_2)$$

und

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} (s_i, t_i) = (0, 0) \text{ für } i = 1, 2.$$

Da  $D_2 D_1 \varphi$  und  $D_1 D_2 \varphi$  stetige Funktionen sind, ist

$$\begin{aligned} D_2 D_1 \varphi(0, 0) &= \lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} D_2 D_1 \varphi(s_1, t_1) = \lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} D_1 D_2 \varphi(s_2, t_2) \\ &= D_1 D_2 \varphi(0, 0), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

■

**Korollar 3.11** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar. Dann ist

$$D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} \dots D_{i_{\pi(2)}} D_{i_{\pi(1)}} f$$

für jede Permutation  $\pi$  der Zahlen  $1, \dots, k$  und  $1 \leq i_\ell \leq n$  für  $\ell = 1, \dots, k$ .

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über  $k$  unter Verwendung der Tatsache, daß sich jede Permutation aus Vertauschungen benachbarter Glieder zusammensetzen läßt.

Damit können wir  $D^p f$  eindeutig definieren, falls  $p$  ein Multi-Index ist und  $f$  hinreichend glatt.

**Satz 3.12** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar,  $x \in U, h \in \mathbf{R}^n$ . Dann ist die Funktion

$$t \mapsto g(t) := f(x + th)$$

in einem Intervall  $]-\epsilon, \epsilon[ \subset \mathbf{R}$  ( $\epsilon > 0$ ) definiert und  $k$ -mal stetig differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + th) h^\alpha.$$

BEWEIS.

(1) Behauptung:

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \dots D_{i_1} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_k}.$$

Beweis durch vollständige Induktion über  $k$ :  $k = 1$  :

$$\frac{dg}{dt}(t) = (\text{grad } f(x + th) | h) = \sum_{i=1}^n D_i f(x + th) h_i.$$

$k - 1 \rightarrow k$  :

$$\begin{aligned} \frac{d^k g}{dt^k}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{j=1}^n D_j \left( \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} \right) h_j \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n D_{i_k} \dots D_{i_1} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_k}. \end{aligned}$$

- (2) Kommt unter den Indizes  $(i_1, \dots, i_k)$  der Index 1 genau  $\alpha_1$ -mal, der Index 2 genau  $\alpha_2$ -mal, ..., der Index  $n$  genau  $\alpha_n$ -mal vor, so ist

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f(x + th) h_{i_1} = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(x + th) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}.$$

Da es  $\frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$   $k$ -tupel  $(i_1, \dots, i_k)$  von Zahlen  $1 \leq i_\ell \leq n$  gibt, bei denen die Zahl  $\nu$  genau  $\alpha_\nu$ -mal vorkommt ( $\nu = 1, \dots, n; \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ ), folgt

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1} D_{i_k} \dots D_{i_1} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(x + th) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n},$$

und damit ist nach (1)

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + th) h^\alpha, \text{ q.e.d.}$$

■

**Satz 3.13** (Taylorsche Formel): Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen,  $x \in U$  und  $h \in \mathbf{R}^n$ , so daß  $x + th \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  eine  $(k + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert ein  $\theta \in [0, 1]$ , so daß

$$f(x + h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta h)}{\alpha!} h^\alpha.$$

BEWEIS. Die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ , wobei  $t \mapsto f(x + th)$  ist  $(k + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Nach der Taylor-Formel für Funktionen einer reellen Veränderlichen, existiert ein  $\theta \in [0, 1]$ , so daß

$$g(1) = \sum_{i=0}^k \frac{g^{(i)}(0)}{i!} 1^i + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} 1^{k+1}.$$

Es gilt für  $i = 0, 1, \dots, k$

$$\frac{g^{(i)}(0)}{i!} = \sum_{|\alpha|=i} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha$$

und

$$\frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta h)}{\alpha!} h^\alpha,$$

woraus die Behauptung folgt.

■

**Korollar 3.14** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen,  $x \in U, h \in \mathbf{R}^n$  mit  $x + th \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Dann ist

$$f(x + h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \varphi(h) \|h\|^k,$$

wobei  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ .

BEWEIS. Es existiert ein  $\theta \in [0, 1]$ , so daß

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha(h) h^\alpha$$

mit  $r_\alpha(h) = \frac{D^\alpha f(x+\theta h) - D^\alpha f(x)}{\alpha!}$ . Wegen der Stetigkeit von  $D^\alpha f$  ist  $\lim_{h \rightarrow 0} r_\alpha(h) = 0$ .

Mit

$$\varphi(h) := \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha(h) \frac{h^\alpha}{\|h\|^k}$$

folgt die Behauptung, da

$$\frac{|h^\alpha|}{\|h\|^k} = \frac{|h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}|}{\|h\|^{\alpha_1} \dots \|h\|^{\alpha_n}} \leq 1 \text{ für } |\alpha| = k.$$

■

BEISPIEL. Für  $f = f(x, y)$  hat die Taylorreihe die Gestalt

$$\sum_{m,n} \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} f}{\partial^m x \partial^n y} \Big|_{x=0} x^m y^n$$

z.B.

$$\sin(xy) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+1} y^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

**Definition 3.15** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  eine Funktion. Ein Punkt  $x \in U$  heißt **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**) von  $f$ , falls eine Umgebung  $V \subset U$  von  $x$  existiert, so daß  $f(x) \geq f(y)$  (bzw.  $f(x) \leq f(y)$ ) für alle  $y \in V$ .

Tritt in dieser Definition der Fall  $f(x) = f(y)$  nur für  $x = y$  ein, so spricht man von einem **isolierten** oder **strengen** lokalen Maximum bzw. Minimum. Ein **lokales Extremum** ist ein lokales Maximum oder Minimum.

**Satz 3.16** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion. Besitzt  $f$  in  $x \in U$  ein lokales Extremum, so gilt:

$$\text{grad } f(x) = 0.$$

BEWEIS. Für  $k = 1, \dots, n$  sei

$$g_k(t) := f(x + te_k)$$

$g_k$  ist definiert auf einem Intervall  $[-\epsilon, \epsilon] \subset \mathbf{R}$  mit  $\epsilon > 0$  und dort differenzierbar.

Hat  $f$  in  $x$  ein lokales Extremum, so hat  $g_k$  in 0 ein lokales Extremum und es ist  $g'_k(0) = 0$ .

Wegen

$$g'_k(0) = (\text{grad } f(x) | e_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

ist

$$\text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = 0, \text{ q.e.d.}$$

■

**Definition 3.17** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Unter der **Hesseschen Matrix** von  $f$  im Punkt  $x \in U$  versteht man die  $n \times n$ -Matrix

$$\text{Hess}(f)(x) := \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right]$$

$\text{Hess}(f)(x)$  ist symmetrisch, da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x).$$

**Definition 3.18** Eine symmetrische Matrix  $A \in M_n$  heißt **positiv (negativ) definit**, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv (negativ) sind.

Die Matrix heißt **indefinit**, wenn sie mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt. (Bekanntlich sind alle Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix reell.)

Wir verwenden folgende Tatsache (vgl. Vorlesung "Lineare Algebra"): Sei  $A \in M_n$  eine symmetrische, positiv definite Matrix mit den Eigenwerten  $l_1, \dots, l_n$  und  $l := \min(l_1, \dots, l_n)$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbf{R}^n$

$$(Ax|x) \geq l \|x\|^2.$$

**Satz 3.19** Sei  $U \subset \mathbf{R}^n$  offen,  $f \in U \rightarrow \mathbf{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar. Sei  $x \in U$  und  $\text{grad } f(x) = 0$ .

- i) Ist  $\text{Hess}(f)(x)$  positiv definit, so hat  $f$  in  $x$  ein isoliertes lokales Minimum.
- ii) Ist  $\text{Hess}(f)(x)$  negativ definit, so hat  $f$  in  $x$  ein isoliertes lokales Maximum.
- iii) Ist  $\text{Hess}(f)(x)$  indefinit, so hat  $f$  in  $x$  weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum.

BEWEIS. Die Taylorentwicklung von  $f$  um  $x$  liefert

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \varphi(h) \|h\|^2,$$

wobei  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ .

Es gilt:

$$Q(h) := \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(x) h^\alpha}{\alpha!} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(x) h_i h_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} h_i h_j = \frac{1}{2} (Ah|h),$$

mit

$$h = (h_1, \dots, h_n) \text{ und } (\alpha_{ij}) = A = \text{Hess}(f)(x).$$

Also ist

$$f(x+h) - f(x) = Q(h) + \varphi(h) \|h\|^2.$$

i) Ist  $A$  positiv definit und  $l$  der kleinste Eigenwert von  $A$ , dann ist

$$Q(h) \geq \frac{1}{2}l\|h\|^2.$$

Es gibt ein  $\epsilon > 0$ , so daß  $|\varphi(h)| \leq \frac{l}{4}$  für  $\|h\| < \epsilon$ .

$$f(x+h) - f(x) = Q(h) + \varphi(h)\|h\|^2 \geq \frac{1}{4}l\|h\|^2 > 0$$

für alle  $h$  mit  $0 < \|h\| < \epsilon$ , d.h.  $x$  ist isoliertes lokales Minimum von  $f$ .

ii) Ist die Hessesche Matrix negativ definit, so geht man zur Funktion  $-f$  über und hat dadurch Fall ii) auf den Fall i) zurückgeführt.

iii) Sei  $A$  indefinit. Wir müssen zeigen, daß in jeder Umgebung von  $x$  Punkte  $x'$  existieren mit  $f(x') > f(x)$ , als auch Punkte  $x''$  mit  $f(x'') < f(x)$ .

Sei  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  zu einem Eigenwert  $l > 0$ . Wir können annehmen, daß  $\|v\| = 1$ . Für  $h := tv, t > 0$ , gilt dann

$$(Ah|h) = t^2(Av|v) = t^2l = l\|h\|^2,$$

also

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2}l\|h\|^2 + \varphi(h)\|h\|^2 \geq \frac{1}{4}l\|h\|^2 > 0,$$

falls nur  $t$  genügend klein ist.

Ist  $w$  ein Eigenvektor von  $A$  zu einem Eigenwert  $\mu < 0$  mit  $\|w\| = 1$ , so gilt für  $h := tw, t > 0$ , analog wie oben

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2}\mu\|h\|^2 + \varphi(h)\|h\|^2 \leq \frac{1}{4}\mu\|h\|^2 < 0$$

für genügend kleines  $t$ . ■

**BEISPIELE.** Wir betrachten einige typische Beispiele von Funktionen  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

a)  $f(x, y) = a + x^2 + y^2$ . Die Funktion  $f$  hat im Nullpunkt  $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$  ein isoliertes lokales Minimum, da

$$\frac{1}{2} \text{Hess } (f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Der Graph von  $f$ ,

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = a + x^2 + y^2\}$$

ist ein nach oben geöffnetes Paraboloid (wenn man sich die  $z$ -Achse als nach oben gerichtet denkt).

b)  $f(x, y) = a - x^2 - y^2$ . Hier liegt im Nullpunkt ein isoliertes lokales Maximum vor, es gilt

$$\frac{1}{2} \text{Hess } (f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Der Graph von  $f$ ,

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = a - x^2 - y^2\}$$

ist ein nach unten geöffnetes Paraboloid.

c)  $f(x, y) = a + x^2 - y^2$ . Der Gradient von  $f$  im Nullpunkt verschwindet, und es gilt

$$\frac{1}{2} \text{Hess}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Hessesche Matrix ist also indefinit, es liegt weder ein lokales Maximum noch Minimum vor.

Der Graph von  $f$ ,

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = a + x^2 - y^2\},$$

ist eine sog. **Sattelfläche**. Längs der Achse  $x = 0$  fallen die Werte von  $f$  vom Nullpunkt aus ab, längs der Achse  $y = 0$  nehmen die Werte von  $f$  vom Nullpunkt aus zu.

d) Ist die Hessesche Matrix in einer Nullstelle des Gradienten semi-definit, so lassen sich keine allgemeinen Aussagen machen, wie folgende Beispiele zeigen:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + y^4 \\ f_2(x, y) &= x^2 \\ f_3(x, y) &= x^2 + y^3. \end{aligned}$$

Für alle drei Funktionen verschwindet der Gradient im Nullpunkt und es gilt

$$\text{Hess}(f_k)(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3),$$

die Hessesche Matrix ist also positiv semi-definit.

Die Funktion  $f_1$  hat im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum. Die Funktion  $f_2$  hat im Nullpunkt ein lokales Minimum, das aber nicht isoliert ist (alle Punkte auf der Achse  $x = 0$  sind ebenfalls lokale Minima).

Die Funktion  $f_3$  hat im Nullpunkt weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

## Aufgaben

1. An welchen Stellen ist die Funktion  $f : (x, y) \mapsto y\sqrt{2x^2 + y^2}$  (einmal) partiell differenzierbar? Berechne dort ihre partiellen Ableitungen.
2. Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f : (x, y, z) \mapsto (\cos(xy + z), \sin(x^2y)).$$

3. Sei  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbf{R}^n$ . Für eine partiell differenzierbare Abbildung

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}^n, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

sei

$$\text{div } f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad (\text{Divergenz von } f).$$

Beweise:

a) Sind  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  und  $v : U \rightarrow \mathbf{R}$  partiell differenzierbar, so gilt

$$\operatorname{div}(vf) = (\operatorname{grad} v|f) + v \operatorname{div} f.$$

b) Sind  $v, w : U \rightarrow \mathbf{R}$  partiell differenzierbar, so gilt

$$\operatorname{grad}(vw) = v \operatorname{grad} w + w \operatorname{grad} v.$$

4.  $r$  sei die Funktion  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  von  $\mathbf{R}^n$  in  $\mathbf{R}$ . Zeige für  $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ :

a)  $(\operatorname{grad} r)(x) = \frac{x}{r(x)}.$

b)  $(\operatorname{grad} r^\alpha)(x) = \alpha[r(x)]_x^{\alpha-2}.$

5. Durch

$$u(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist eine Funktion  $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definiert.

a) In welchen Punkten ist  $u$  stetig?

b) In welchen Punkten ist  $u$  partiell differenzierbar?

c) Zeige, daß  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  und  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$  im Nullpunkt existieren und verschieden sind.

6. Sei  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbf{R}^n$  und  $v : U \rightarrow \mathbf{R}$  eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Der **Laplace-Operator**  $\Delta$  ist wie folgt definiert:

$$\Delta v = \operatorname{div}(\operatorname{grad} v).$$

Man zeige

a)

$$\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

b) Sind  $v, w : U \rightarrow \mathbf{R}$  zweimal partiell differenzierbar, so gilt

$$\Delta(vw) = (\Delta v)w + 2(\operatorname{grad} v | \operatorname{grad} w) + v(\Delta w).$$

c) Für die Funktion

$$r : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \|x\|,$$

und  $\alpha \in \mathbf{R}$  gilt:

$$\Delta r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2}(\alpha - 2 + n).$$

d) Ist  $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  zweimal partiell differenzierbar, so gilt

$$\Delta(u \circ r)(x) = u''(r(x)) + \frac{n-1}{r(x)} u'(r(x)).$$

7. (Umrechnung des Laplace-Operators auf Polarkoordinaten) Sei  $p$  die Abbildung

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

auf  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$  mit Werten in  $\mathbf{R}^2$ , wobei  $\mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ . Für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion

$$u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

beweise:

$$(\Delta u) \circ p = \frac{\partial^2(u \circ p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u \circ p)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(u \circ p)}{\partial \varphi^2}.$$

8. Für natürliche Zahlen  $n, m$  mit  $0 < n, m \leq N$  sei die Funktion  $u_{nm}$  definiert durch

$$\begin{aligned} u_{nm} : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto \sin nx \sin my. \end{aligned}$$

$V_N$  sei der von den Funktionen  $u_{nm}, 0 < n, m \leq N$ , erzeugte Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ .

- Zeige, daß jedes Element von  $V_N$  beliebig oft partiell differenzierbar ist.
  - Beweise, daß der Laplace-Operator  $\Delta$  eine lineare Abbildung von  $V_N$  in sich definiert.
  - Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\Delta : V_N \rightarrow V_N$ .
9. Bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x - y}{x + y},$$

auf  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$  im Punkt  $(1, 1)$  bis einschließlich Gliedern zweiter Ordnung.

10. In welchen Punkten hat die Funktion

$$f : (x, y) \mapsto (4x^2 + y^2) \exp(-x^2 - 4y^2)$$

auf  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  lokale Extrema?

11. Berechne die stationären Punkte der folgenden Funktionen:

$$x^2 - 2xy - y^2 + 4x - 2y;$$

$$x^2 + 4xy + y^2 - 3x + y;$$

$$\sin x \cos y;$$

$$y^2 - \sin^2 x;$$

$$(x^2 - y^2)e^{-(x^2 - y^2)};$$

$$y^2 - x^2y - yz^2 + x^2z^2.$$

12. Bestimme die Art der stationären Punkten des obigen Beispiels.
13. Seien  $x_1, \dots, x_n$   $n$  verschiedene Punkte aus  $\mathbf{R}$  und  $y_1, \dots, y_n$  reelle Zahlen. Betrachte folgende Funktion

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Für welchen Wert von  $a, b$  wird  $E(a, b)$  minimiert?



## 4 Integrale, die von einem Parameter abhängen, Integrale von Funktionen auf Teilmengen von $\mathbf{R}^n$

Wir erinnern daran, daß eine Funktion  $h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine Treppenfunktion ist, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

des Intervalls  $[a, b]$  gibt, so daß  $h$  auf  $]x_{k-1}, x_k[$  konstant ist für jedes  $k$ .

Es ist klar, wie man Treppenfunktionen auf  $\mathbf{R}^n$  definiert (Die Konstanzmengen sind jetzt "Rechtecke" d.h. Produkte von Intervallen). Man kann damit den Begriff einer Riemann-integrierbaren Funktion geeignete Funktionen mehrerer Variablen übertragen, indem man Ober- und Unterintegrale völlig analog definiert. Da ein viel allgemeinerer und effizienterer Integralbegriff (das Lebesgue-Integral) in der Vorlesung "Analysis III" behandelt wird, verzichten wir hier auf eine detaillierte Diskussion. Stattdessen werden wir iterierte Integrale behandeln. Dies genügt, um konkrete Integrale, die von praktischer Bedeutung sind, zu berechnen.

### Integrale, die von einem Parameter abhängen

**Lemma 4.1** Sei  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  und  $Q$  ein abgeschlossener Quader (d.h. ein Produkt von kompakten Intervallen) im  $\mathbf{R}^n$ .  $f : [a, b] \times Q \rightarrow \mathbf{R}$  sei stetig.  $(y_i)_{i \in \mathbf{N}}$  sei eine Folge in  $Q$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = c \in Q$ . Dann konvergieren die Funktionen  $F_i : x \mapsto f(x, y_i)$  gleichmäßig gegen die Funktion  $F : x \mapsto f(x, c)$ .

BEWEIS. Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $[a, b] \times Q$  kompakt ist, ist  $f$  gleichmäßig stetig, d.h. es gibt ein  $\delta > 0$ , so daß

$$\|(x, y) - (x', y')\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon.$$

Zu  $\delta$  existiert ein  $N$ , so daß  $\|c - y_i\| < \delta$  für  $i \geq N$ . Dann ist aber für  $i \geq N$

$$|f(x, c) - f(x, y_i)| < \epsilon \text{ für alle } x \in [a, b],$$

d.h.  $\|F - F_i\| = \sup\{|f(x, c) - f(x, y_i)| : x \in [a, b]\} \leq \epsilon$ , q.e.d. ■

**Satz 4.2** Sei  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ,  $Q$  ein abgeschlossener Quader in  $\mathbf{R}^n$  und  $f : [a, b] \times Q \rightarrow \mathbf{R}$  stetig. Dann ist die Funktion  $\varphi : Q \rightarrow \mathbf{R}$ , wobei  $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , stetig.

BEWEIS. Sei  $(y_i)_{i \in \mathbf{N}}$  eine Folge in  $Q$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = c \in Q$ . Es gilt:

$$\varphi(y_i) = \int_a^b F_i(x) dx \text{ und } \varphi(c) = \int_a^b F(x) dx.$$

Da  $(F_i)_{i \in \mathbf{N}}$  gleichmäßig gegen  $F$  konvergiert, ist

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b F_i(x) dx = \int_a^b F(x) dx,$$

also  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(y_i) = \varphi(c)$ , q.e.d. ■

**Lemma 4.3** Seien  $I, I' \subset \mathbf{R}$  kompakte Intervalle.  $(y_i)_{i \in \mathbf{N}}$  sei eine Folge in  $I'$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = c \in I'$  und  $y_i \neq c$  für alle  $i \in \mathbf{N}$ .  $f : I \times I' \rightarrow \mathbf{R}$  sei stetig und stetig partiell nach der zweiten Variablen differenzierbar. Dann konvergieren die Funktionen  $F_i : I \rightarrow \mathbf{R}$ , definiert durch

$$F_i(x) = \frac{f(x, y_i) - f(x, c)}{y_i - c} \quad (i \in \mathbf{N}),$$

gleichmäßig gegen die Funktion  $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ , wobei

$$F(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c).$$

BEWEIS. Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $D_2 f$  nach Voraussetzung gleichmäßig stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$ , so daß

$$(*) \quad |y' - y''| < \delta \Rightarrow |D_2 f(x, y') - D_2 f(x, y'')| < \epsilon.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes  $i \in \mathbf{N}$  ein  $\eta_i$  zwischen  $y_i$  und  $c$  mit  $F_i(x) = D_2 f(x, \eta_i)$ . Wählt man  $N$  so groß, daß  $|y_i - c| < \delta$  für  $i \geq N$ , dann ist  $|\eta_i - c| < \delta$ , also nach (\*)

$$|F_i(x) - F(x)| = |D_2 f(x, \eta_i) - D_2 f(x, c)| < \epsilon \text{ für } i \geq N$$

und für alle  $x \in I$ , q.e.d. ■

**Satz 4.4** Seien  $I, I' \subset \mathbf{R}$  kompakte Intervalle und  $f : I \times I' \rightarrow \mathbf{R}$  stetig und stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen. Dann ist die Funktion  $\varphi : I' \rightarrow \mathbf{R}$ , definiert durch

$$\varphi(y) := \int_I f(x, y) dx,$$

stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = \int_I \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

BEWEIS. Sei  $c \in I'$  und  $(h_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$  eine reelle Nullfolge mit  $c + h_\nu \in I'$  und  $h_\nu \neq 0$  für alle  $\nu \in \mathbf{N}$ . Dann konvergieren die Funktionen  $F_\nu : I \rightarrow \mathbf{R}$ , definiert durch

$$F_\nu(x) = \frac{f(x, c + h_\nu) - f(x, c)}{h_\nu},$$

gleichmäßig gegen die Funktion  $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ , wobei  $F(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c)$ . Also ist

$$\lim_{h_\nu \rightarrow 0} \frac{\varphi(c + h_\nu) - \varphi(c)}{h_\nu} = \lim_{h_\nu \rightarrow 0} \int_I \frac{f(x, c + h_\nu) - f(x, c)}{h_\nu} dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, c) dx.$$

Damit existiert  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  für alle  $y \in I'$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  ist stetig, da  $\frac{\partial f}{\partial y}$  nach Voraussetzung stetig ist, q.e.d. ■

**Eulersche Differentialgleichungen der Variationsrechnung**

Sei  $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ . Die Funktion  $L : (t, y, p) \mapsto L(t, y, p)$  von  $I \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  in  $\mathbf{R}$  sei zweimal stetig partiell differenzierbar,  $\mathcal{R}$  bezeichne die Familie der Funktionen  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , sodaß  $\varphi$  zweimal stetig differenzierbar ist und  $\varphi(a) = c_1, \varphi(b) = c_2$ . Die Abbildung

$$S : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

sei definiert durch

$$S(\varphi) = \int_a^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t)) dt.$$

Gesucht ist nun ein  $\varphi \in \mathcal{R}$ , so daß  $S(\varphi)$  minimal ist, d.h.  $S(\varphi) \leq S(\psi)$  für alle  $\psi \in \mathcal{R}$ .

**Satz 4.5** *Eine notwendige Bedingung dafür, daß  $S(\varphi)$  minimal ist für ein  $\varphi \in \mathcal{R}$ , ist die Gültigkeit der Eulerschen Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0.$$

BEWEIS. Sei  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  zweimal stetig differenzierbar mit

$$(*) \quad \psi(a) = \psi(b) = 0.$$

Sei  $\varphi \in \mathcal{R}$  so, daß  $S(\varphi) = \min_{\chi \in \mathcal{R}} S(\chi)$ . Für beliebiges  $\epsilon \in \mathbf{R}$  ist  $\varphi + \epsilon\psi \in \mathcal{R}$  und damit

$$S(\varphi) \leq S(\varphi + \epsilon\psi).$$

Die Funktion  $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sei definiert durch

$$\phi(\epsilon) := S(\varphi + \epsilon\psi).$$

$\phi$  besitzt für  $\epsilon = 0$  ein Minimum, also ist

$$(**) \quad \frac{d\phi}{d\epsilon}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\epsilon)}{d\epsilon} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(t, \varphi(t) + \epsilon\psi(t), \varphi'(t) + \epsilon\psi'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial y} L(\dots) \psi(t) + \frac{\partial}{\partial p} L(\dots) \psi'(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Wegen (\*) ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial p} \psi'(t) dt &= \left. \frac{\partial L}{\partial p} \psi(t) \right|_a^b - \int_a^b \psi(t) \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p} \right) dt \\ &= - \int_a^b \psi(t) \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p} \right) dt. \end{aligned}$$

Damit erhält man schlielich mit (\*\*)

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\phi}{d\epsilon}(0) &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi, \varphi') \psi + \frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi, \varphi') \psi' \right\} dt \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi, \varphi') - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi, \varphi') \right\} \psi dt. \end{aligned}$$

(Wir haben zur Vereinfachung nur  $\varphi, \varphi', \dots$  statt  $\varphi(t), \varphi'(t), \dots$  geschrieben.)  
Mit dem anschließend bewiesenen Lemma folgt daraus

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0, \text{ q.e.d.}$$

■

**Lemma 4.6** Sei  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  mit  $a < b$  ein abgeschlossenes Intervall und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Funktion. Falls für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$\psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \text{ mit } \psi(a) = \psi(b) = 0$$

gilt:

$$\int_a^b f(t)\psi(t)dt = 0,$$

dann ist  $f(t) = 0$  für alle  $t \in [a, b]$ .

BEWEIS. Wegen der Stetigkeit von  $f$  genügt es zu zeigen, daß  $f(t) = 0$  für alle  $t \in ]a, b[$ . Angenommen  $f(x) \neq 0$  für ein  $c \in ]a, b[$ . O.B.d.A. sei  $f(c) > 0$ . Dann existiert ein  $\epsilon > 0$  mit

$$[c - \epsilon, c + \epsilon] \subset [a, b[$$

und

$$f(t) > 0 \text{ für alle } t \in [c - \epsilon, c + \epsilon].$$

Es gibt aber eine zweimal stetig differenzierbare nicht negative Funktion

$$\psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

mit  $\psi(c) > 0$  und  $\psi(t) = 0$  für alle  $t \notin [c - \epsilon, c + \epsilon]$ .

Da  $f\psi$  stetig ist, gibt es wegen  $f(c\psi(c)) > 0$  ein  $\delta$  mit  $0 < \delta < \epsilon$ , so daß

$$f(t)\psi(t) > 0 \text{ für alle } t \in [c - \delta, c + \delta].$$

Da  $f\psi$  nicht negativ ist, gilt

$$\int_a^b f(t)\psi(t)dt = \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(t)\psi(t)dt \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \psi(t)dt > 0.$$

Aus diesem Widerspruch zur Voraussetzung folgt  $f(t) = 0$  für alle  $t \in [a, b]$ , q.e.d.

■

### Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen

Sei  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  ein abgeschlossenes Intervall,  $c = (c_1, \dots, c_n), d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbf{R}^n$ .  $\mathcal{R} = \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n : \varphi \text{ zweimal stetig differenzierbar mit } \varphi(a) = c, \varphi(b) = d\}$ .  $L : (t, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n) \mapsto L(t, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$  von  $[a, b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Ein reelles Funktional  $S : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sei definiert durch

$$S(\varphi) = \int_a^b L(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))dt.$$

Man kann auch hier zeigen: Ist für ein  $\varphi \in \mathcal{R}$

$$S(\varphi) \leq S(\psi) \text{ für alle } \psi \in \mathcal{R},$$

dann gelten die "Eulerschen Differentialgleichungen"

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p_i}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y_i}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$$

für  $i = 1, \dots, n$ .

### Das Integral von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger

Sei jetzt  $f$  eine stetige Funktion von zwei Variablen, die auf einer Menge  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  definiert ist. Man definiert dann

$$\int f(x, y) dx dy = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy.$$

Ähnlicherweise definiert man

$$\int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

als ein iteriertes Integral.

Wir werden unten zeigen, daß diese Definition unabhängig von der Reihe der Integrationen ist d.h. es gilt (für  $n = 2$ )

$$\int \left( \int f(x, y) dx \right) dy = \int \left( \int f(x, y) dy \right) dx.$$

$\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  bezeichne die Menge der stetigen Funktionen  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , sodaß  $K > 0$  existiert mit  $f(x) = 0$ , falls  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $\|x\| > K$ . Ist  $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ , dann liegt  $\int f(x_1, \dots, x_n) dx_n \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-1})$ .

BEWEIS. Zunächst ist klar, daß das Integral existiert, da die Abbildung  $x_n \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  bei jeder Wahl von  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  in  $\mathcal{K}(\mathbf{R})$  liegt. Die Abbildung  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \int f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$  hat natürlich kompakten Träger. Nach den obigen Sätzen ist sie auch stetig. ■

Da die Funktion

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \int f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$$

in  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-1})$  liegt, kann man das Integral

$$\int \left( \int f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n \right) dx_{n-1}$$

bilden und erhält wieder eine Funktion aus  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-2})$ , usw. Also kann man jeder Funktion  $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  die Zahl

$$I(f) = \int \left( \dots \left( \left( \int f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) dx_{n-1} \right) \dots \right) dx_1$$

zuordnen, die man durch iterierte Integration aus  $f$  erhält.

**Satz 4.7** Das Funktional  $I$  hat auf  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  die folgenden Eigenschaften:

$$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$$

$$I(\alpha f) = \alpha I(f) \text{ für } \alpha \in \mathbf{R}$$

$$I(f) \geq 0 \text{ für } f \geq 0$$

$$I(E^t f) = I(f) \text{ für } t \in \mathbf{R}^n, \text{ wobei } E^t f \text{ die Funktion } x \mapsto f(x + t) \text{ bezeichnet}$$

$$|I(f)| \leq \prod (b_i - a_i) \|f\|, \text{ wenn } \text{Tr} f \subseteq \prod [a_i, b_i] \text{ ist (d.h. } f(x) = 0, \text{ falls } x \notin \prod [a_i, b_i].)$$

( $\|f\|$  bezeichnet die Supremumsnorm von  $f$ ).

BEWEIS. Das folgt unmittelbar aus den Eigenschaften des eindimensionalen Integrals für stückweise stetige Funktionen. ■

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß das Funktional  $I$  durch diese Eigenschaften bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt ist. Da man von einem Integral alle diese Eigenschaften erwartet, haben wir somit den richtigen Integralbegriff gefunden. Der einzige Nachteil besteht darin, daß  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  eine für die Anwendungen zu enge Funktionenklasse ist. Wir müssen daher zunächst  $I$  auf eine größere Funktionenklasse erweitern.

**Definition 4.8** Sei  $f$  eine nichtnegative beschränkte Funktion mit kompaktem Träger auf  $\mathbf{R}^n$ . Wir nennen  $f$  **integrierbar** auf  $\mathbf{R}^n$ , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  Funktionen  $g, h \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  existieren mit  $0 \leq g \leq f \leq h$  und  $I(h - g) < \epsilon$ . Für eine integrierbare Funktion  $f$  versteht man unter dem Integral  $I(f)$  die Zahl

$$I(f) = \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)}} I(g) = \inf_{\substack{f \leq h \\ h \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)}} I(h).$$

Wenn  $f$  integrierbar ist, gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  Funktionen  $g_\epsilon, h_\epsilon \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  mit  $0 \leq g_\epsilon \leq f \leq h_\epsilon$  und  $I(h_\epsilon) - I(g_\epsilon) < \epsilon$ . Dann ist

$$I(g_\epsilon) \leq \sup_{g \leq f} I(g) \leq \inf_{f \leq h} I(h) \leq I(h_\epsilon)$$

und somit tatsächlich  $\sup I(g) = \inf I(h)$ , womit gezeigt ist, daß die Definition sinnvoll ist.

BEMERKUNG. Diese Definition ist im wesentlichen die Archimedische Exhaustionsmethode zur Bestimmung des Inhalts eines Körpers. Man approximiert die Funktion  $f$  von oben und unten durch Funktionen, für welche das Integral bereits definiert ist.

**Definition 4.9** Eine beschränkte reellwertige Funktion  $f$  heißt integrierbar, wenn  $f^+ = \max(f, 0)$  und  $f^- = \max(-f, 0)$  integrierbar sind. Man definiert dann das Integral durch  $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$ .

**Satz 4.10** Mit  $f_1$  und  $f_2$  sind auch  $f_1 + f_2$ ,  $\alpha f_1$ ,  $f_1 f_2$ ,  $\max(f_1, f_2)$ ,  $\min(f_1, f_2)$  und  $|f_1|$  integrierbar.

BEWEIS. Wir können uns auf nichtnegative Funktionen beschränken. Zu jedem  $\epsilon > 0$  existieren  $g_1, h_1, g_2, h_2 \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  mit  $0 \leq g_1 \leq f_1 \leq h_1$ ,  $0 \leq g_2 \leq f_2 \leq h_2$ ,  $h_1 \leq \|f_1\| + 1$ ,  $h_2 \leq \|f_2\| + 1$  und  $I(h_i - g_i) < \epsilon$ .

Damit gilt:  $g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2 \leq h_1 + h_2$  und

$$I((h_1 + h_2) - (g_1 + g_2)) = I(h_1 - g_1) + I(h_2 - g_2) < 2\epsilon.$$

Weiters ist  $g_1, g_2 \leq f_1, f_2 \leq h_1, h_2$  und

$$I(h_1 h_2 - g_1 g_2) = I((h_1 - g_1)h_2) + I(g_1(h_2 - g_2)) \leq (\|f_2\| + 1)I(h_1 - g_1) + (\|f_1\| + 1)I(h_2 - g_2),$$

woraus die Behauptung für das Produkt folgt. Schließlich ist

$$|f| = f^+ + f^-, \max(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2}$$

und

$$\min(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|}{2}.$$

■

**Satz 4.11** Für integrierbare Funktionen  $f, f_1, f_2$  gilt

$$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$$

$$I(\alpha f) = \alpha I(f), \alpha \in \mathbf{R}$$

$$I(f) \geq 0 \text{ für } f \geq 0$$

$$I(E^t f) = I(f), t \in \mathbf{R}^n$$

$$|I(f)| \leq \prod (b_i - a_i) \|f\|, \text{ falls } \text{Tr} f \subseteq \prod [a_i, b_i].$$

BEWEIS. Für  $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$  ergibt sich 1) sofort aus der Definition. Für beliebige  $f_1, f_2$  ist  $f_1 + f_2 = (f_1 + f_2)^+ - (f_1 + f_2)^-$  und daher  $I(f_1 + f_2) = I((f_1 + f_2)^+) - I((f_1 + f_2)^-)$ . Andererseits ist  $f_1 + f_2 = f_1^+ + f_2^+ - (f_1^- + f_2^-)$  und daher gilt auch

$$(f_1^+ + f_2^+) + (f_1 + f_2)^- = (f_1 + f_2)^+ + (f_1^- + f_2^-).$$

Da hier nur nichtnegative Funktionen vorkommen, gilt also

$$I(f_1^+ + f_2^+) + I((f_1 + f_2)^-) = I((f_1 + f_2)^+) + I(f_1^- + f_2^-).$$

$$\Rightarrow I((f_1 + f_2)^+) - I((f_1 + f_2)^-) = I(f_1^+) + I(f_2^+) - I(f_1^-) - I(f_2^-) = I(f_1) + I(f_2).$$

Die anderen Eigenschaften ergeben sich analog.

■

**Satz 4.12** Sei  $J : \mathcal{K}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$  eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

$$J(f_1 + f_2) = J(f_1) + J(f_2)$$

$$J(\alpha f) = \alpha J(f), \alpha \in \mathbf{R}$$

$$J(f) \geq 0 \text{ für } f \geq 0$$

$$J(E^t f) = J(f), t \in \mathbf{R}^n$$

$$|J(f)| \leq K \prod (b_i - a_i) \|f\| \text{ für jedes } f \text{ mit } \text{Tr} f \subseteq \prod [a_i, b_i] \text{ mit einer von } f \text{ und } \text{Tr} f \text{ unabhängigen Konstanten } K > 0.$$

Dann existiert ein  $l \geq 0$  mit  $J(f) = lI(f)$  für alle  $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ .

BEWEIS. Sei  $J$  ein derartiges Funktional und  $M = \prod [a_i, b_i]$  ein kompaktes Intervall. Dann existieren für jedes  $\epsilon > 0$  Funktionen  $g, h \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  mit  $g \leq \chi_M \leq h$  und  $J(h - g) < \epsilon$ . Daher ist  $J(E^t \chi_M) = J(\chi_M)$ , weil auch  $E^t g \leq E^t \chi_M \leq E^t h$  und  $J(E^t h - E^t g) = J(h - g) < \epsilon$  gilt. Ist insbesondere  $W^1$  der Einheitswürfel  $0 \leq x_i < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  und  $W$  ein Würfel der Gestalt  $a^i \leq x_i < a^i + \frac{1}{k}$ , dann gilt

$$J(\chi_W) = \frac{1}{k^n} J(\chi_{W^1}),$$

da alle diese Würfel gleiches Integral besitzen und  $k^n$  davon ganz  $W^1$  überdecken. Wir zerlegen nun den Raum  $\mathbf{R}^n$  in achsenparallele Würfel  $W_i$  der Kantenlänge  $\frac{1}{k}$ . Ist  $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ , dann ist  $f$  gleichmäßig stetig. Für genügend großes  $k$  folgt dann aus  $|x - y| < \frac{1}{k}$  auch  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Sei nun  $M = \prod [a_i, b_i]$  ein kompaktes Intervall mit ganzzahligen  $a_i, b_i$ , welches  $\text{Tr } f$  enthält. Dann wird  $M$  von endlich vielen  $W_i$ 's überdeckt. Sei

$$l_i = \inf_{x \in W_i} f(x) \text{ und } \mu_i = \sup_{x \in W_i} f(x).$$

Es gilt dann

$$\sum l_i \chi_{W_i} \leq f \leq \sum \mu_i \chi_{W_i}$$

und

$$I\left(\sum \mu_i \chi_{W_i}\right) \leq 2\epsilon \prod (b_i - a_i).$$

Sei  $J(\chi_{W^1}) = l$ . Dann ist  $J(\chi_{W_i}) = \frac{l}{k^n}$ . Aus 3) folgt

$$J\left(\sum l_i \chi_{W_i}\right) \leq J(f) \leq J\left(\sum \mu_i \chi_{W_i}\right)$$

und daher

$$\frac{l}{k^n} \sum l_i \leq J(f) \leq \frac{l}{k^n} \sum \mu_i$$

oder  $lI(\sum l_i \chi_{W_i}) \leq J(f) \leq lI(\sum \mu_i \chi_{W_i})$ . Andererseits ist auch

$$I\left(\sum l_i \chi_{W_i}\right) \leq I(f) \leq I\left(\sum \mu_i \chi_{W_i}\right)$$

und daher

$$|J(f) - lI(f)| \leq 2l\epsilon \prod (b_i - a_i).$$

Damit gilt  $J(f) = lI(f)$  mit  $l = J(\chi_{W^1})$ . ■

Als einfache Folgerung aus diesem Satz ergibt sich, daß es in der Definition von  $I(f)$  auf die Reihenfolge der Integrationen nicht ankommt.

**Satz 4.13** Sei  $J(f) = \int \dots (\int f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1}) dx_{i_2} \dots dx_{i_n}$ , wobei  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  irgendeine Permutation von  $\{1, 2, \dots, n\}$  ist. Dann gilt  $J(f) = I(f)$ .

BEWEIS.  $J(f)$  erfüllt 1) — 5) und  $J(\chi_{W^1}) = 1$ . ■



Wir schreiben daher kurz  $I(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx$ , wobei  $dx = dx_1 \dots dx_n$  bedeutet.

Nun sind wir in der Lage, den bis jetzt nur vage umschriebenen Begriff des Flächeninhalts oder Volumens exakt zu definieren.

**Definition 4.14** Ist  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  und die Indikatorfunktion  $\chi_A$  integrierbar im  $\mathbf{R}^n$ , dann nennt man die Zahl  $m(A) = I(\chi_A)$  das ( $n$ -dimensionale) **Maß** oder den **Inhalt** von  $A$  und nennt  $A$  eine **integrierbare Menge**. (Für  $n = 2$  spricht man von Flächeninhalt, für  $n = 3$  von Volumen.)

BEMERKUNG. Man erhält auf diese Weise eine Klasse von integrierbaren Mengen, die alle jene Mengen umfaßt, welchen man üblicherweise einen Inhalt zuschreiben möchte. Mit Hilfe des Lebesgueschen Integralbegriffs kann man diese Klasse aber noch bedeutend erweitern (siehe Vorlesung "Analysis III").

### Die Transformationsregel

**Satz 4.15** Sei  $g = (g_1, \dots, g_n)$  ein  $C^1$  Funktion auf  $U$  (offen in  $\mathbf{R}^n$ ). Wir nehmen an,  $g$  ist injektiv und  $\det J_g(x) \neq 0$  auf  $U$ . Sei  $f$  stetig auf  $g(U)$ . Dann gilt:

$$\int_{g(U)} f(x) dx = \int_U f \circ g(u) |\det J_g(u)| du$$

für jede stetige Funktion  $f$  auf  $g(U)$ .

BEWEIS. (Beweisskizze) Wir betrachten das Funktional

$$f \mapsto \int_U f \circ g(u) |\det J_g(u)| du.$$

Man prüft nach, daß dieses Funktional den Bedingungen von oben genügt. Daraus folgt die Aussage des Satzes. ■

BEISPIEL. Berechne  $\int_V x^2 z dx dy dz$  wobei

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

Wir benutzen zylindrische Koordinaten d.h. die Abbildung

$$\phi : (r, \theta, \zeta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, \zeta)$$

$\phi(V') = V$  wobei

$$V' = \{(r, \theta, \zeta) : 0 \leq r \leq a, \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq \zeta \leq h\}.$$

Daher gilt:

$$\int_V x^2 z dx dy dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (r \cos \theta)^2 r \zeta dr d\theta d\zeta = \frac{\pi a^4 h^2}{8}.$$

BEISPIEL. Wir berechnen eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers  $0 \leq x^2 + y^2 \leq (\phi(z))^2$ : Es gilt:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \iint_{0 \leq (x^2+y^2) \leq \phi(z)^2} dx dy dz \\ &= \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\phi(z)} r dr \quad (\text{in zylindrische Koordinaten}) \\ &= \pi \int_a^b \phi(z)^2 dz. \end{aligned}$$

### Anwendungen des Integrals:

1. Falls  $\rho(x, y, z)$  die Dichte an der Stelle  $(x, y, z)$  ist, dann ist

$$\iiint_G \rho(x, y, z) dx dy dz$$

die Gesamtmasse von  $G$ .

2. Statisches Moment: Die Größen

$$\begin{aligned} T_x &= \iiint_G x \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ T_y &= \iiint_G y \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ T_z &= \iiint_G z \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

sind die statischen Momente der Masse.

3. Der Schwerpunkt von  $G$  ist der Punkt  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , wobei

$$\bar{x} = \frac{\iiint x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint \rho(x, y, z) dx dy dz} = \frac{T_x}{V} \text{ usw.}$$

4. Die Trägheitsmomente  $I_x, I_y, I_z$  im Bezug auf die  $x$ - (bzw.  $y$ -,  $z$ -) Achse ist:

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad - \text{ usw.}$$

5. Das Potential der Massenanziehung eines Körpers  $G$  mit Dichte  $\rho$  ist

$$f(x, y, z) = \iiint_G \frac{\rho(x, y, z)}{\sqrt{(x-h)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dh d\eta d\zeta.$$

(Das entsprechende Kraftfeld ist  $\text{grad } f$ ).

BEISPIEL. Berechne  $T_x, T_y, T_z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  für die homogene Halbkugel  $\{(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ ,  $T_x = T_y = 0$  (aus Symmetriegründen)

$$\begin{aligned} T_z &= \iiint_V z \, dx dy dz = \int_0^1 z dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1-z^2}{2} z dz = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Da die Gesamtmasse  $= \frac{2\pi}{3}$  gilt

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{3}{8}.$$

BEISPIEL. Berechne  $I_x$  für die Kugel mit Massendichte 1. Es gilt:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint (y^2 + z^2) \, dx dy dz = I_y = I_z \text{ wegen der Symmetrie} \\ &= \frac{1}{3} \iiint (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin v \, dr dv du = \frac{8\pi}{15}. \end{aligned}$$

## Aufgaben

1. Zeige: Mit  $A$  und  $B$  sind auch  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  und für  $B \subseteq A$  auch  $A \setminus B$  integrierbar. Ist  $A \cap B = \emptyset$ , dann gilt  $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ .

2. Zeige, daß die durch

$$F(y) := \int_1^2 \ln(xy) dx, \quad y \in \mathbf{R}_+^*,$$

definierte Funktion  $F : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  stetig differenzierbar ist und berechne  $F'$ .

3. Eine Funktion  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  sei definiert durch

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeige, daß durch

$$f(x) := \int_0^1 g(x, t) dt \text{ und } f^*(x) := \int_0^1 (D_1 g)(x, t) dt.$$

Funktionen  $f, f^* : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definiert sind, daß  $f$  im Nullpunkt differenzierbar ist, und daß  $f'(0) \neq f^*(0)$  gilt.

4. Sei  $I \subseteq \mathbf{R}$  ein offenes Intervall,  $a \in I$  und  $f : I \times I \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Zeige, daß die durch

$$F(y) := \int_a^y f(x, y) dx, \quad y \in I,$$

definierte Funktion  $F : I \rightarrow \mathbf{R}$  differenzierbar ist, und daß für alle  $y \in I$  gilt

$$F'(y) = f(y, y) + \int_a^y (D_2 f)(x, y) dx.$$

Anleitung: Beweise, daß die durch

$$g(y, z) := \int_a^z f(x, y) dx, \quad (y, z) \in I \times I,$$

definierte Funktion  $G : I \times I \rightarrow \mathbf{R}$  stetig partiell differenzierbar ist und wende die Kettenregel an.

5. Seien  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$  und  $\mathcal{R} := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ zweimal stetig differenzierbar, } f(a) = c, f(b) = d\}$ . Mit  $\ell(f)$  werde die Bogenlänge der Kurve

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^1, t \mapsto (t, f(t)),$$

bezeichnet. Bestimme die Eulersche Differentialgleichung des Variationsproblems

$$\ell(f) = \min \quad (f \in \mathcal{R})$$

und zeige, daß die Gerade durch  $(a, c)$  und  $(b, d)$  ihre einzige Lösung ist.

6. Berechne das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

7. Berechne

$$\int_A \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$$

über dem Gebiet  $A$ , das von den Koordinatenebenen und der Ebene  $x + y + z = 1$  begrenzt wird.

8. Berechne

$$\int_R (3x^2 y + 2y \sin z) dx dy dz$$

wobei  $R = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$ .

9. Sei  $\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$ . Zeige:

$\operatorname{erf}^2(x) = \int_R e^{-u^2 - v^2} du dv$ , wobei  $R$  ein geeignetes Rechteck ist;

$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_R e^{-u^2 - v^2} du dv = \pi$ ;

$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

10. Bestimme die besondere Gestalt der Transformationsregel für folgende Koordinatentransformationen: Polarkoordinaten in  $\mathbf{R}^2$ , zylindrische Koordinaten in  $\mathbf{R}^3$ , sphärische Koordinaten in  $\mathbf{R}^3$ .

11. Berechne folgende Integrale:

$$\int_R (x^2 + y^2) dx dy, \quad \text{wobei } R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\};$$

$$\int_R x \sin y dx dy, \quad \text{wobei } R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x^2\};$$

$$\int_R (xy + 2) dx dy, \quad \text{wobei } R = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y^3\};$$

$$\int_R x \cos y dx dy, \quad \text{wobei } R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \sin y\};$$

$$\int_R xy dx dy \quad \text{wobei } R \text{ das Dreieck mit Eckpunkten } (1, 0), (2, 2) \text{ und } (1, 2) \text{ ist.}$$

$$\int_R e^{xy} dx dy, \quad \text{wobei } R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 + \frac{\log y}{y}, 2 \leq y \leq 3\};$$

$$\int_R (x^3 + 2xy) dx dy \quad \text{wobei } R \text{ das Parallelogram mit den Eckpunkten}$$

(1, 3), (3, 4), (4, 6) und (2, 5) ist.

12. Berechne

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x \sqrt{1 - y^2} dy dx.$$

13. Berechne

$$\int_1^2 \int_1^x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dx.$$

14. Berechne

$$\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{xy^{-1}}}{y^5} dy dx.$$

15. Berechne den Flächeninhalt zwischen den Kurven  $y = 2x^2$  und  $x = 4y^2$ .

16. Berechne den Flächeninhalt, Gewicht und Schwerpunkt des Gebietes zwischen den Kurven  $x^2 - y^2 = 1$  und  $x = 4$  mit Dichte  $\rho(x, y) = x$ .

17. Berechne folgende Integrale:

$$\int_R (x + xz - y^2) dx dy dz, \quad \text{wobei } R = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 0, 3 \leq z \leq 5\};$$

$$\int_R (x + z) dx dy dz, \quad \text{wobei } R = \{(x, y, z) : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x + y + 2z \leq 3\};$$

$$\int_R xyz dx dy dz, \quad \text{wobei } R = \{(x, y, z) : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

18. Berechne das Volumen des Gebietes

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$$

19. Berechne die eulersche Differentialgleichungen für folgende Variationsprobleme:

$$L = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2}.$$

$$L = \mu(t, y_1, y_2) \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2}.$$

$$L = y \sqrt{1 + p^2}.$$

$$L = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(y) p_i p_j}, \text{ wobei } [g_{ij}] \text{ positiv definit ist.}$$

## 5 Der Satz über inverse Funktionen und der Satz über implizite Funktionen

**Definition 5.1** Eine  $C^1$ -Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $U$  offen in  $\mathbf{R}^n$ , heißt  $C^1$ -Isomorphismus von  $U$  auf  $f(U)$ , wenn  $f(U)$  wieder offen in  $\mathbf{R}^m$  ist und eine  $C^1$ -Abbildung  $g : f(U) \rightarrow \mathbf{R}^n$  existiert mit  $g \circ f = \text{Id}$  und  $f \circ g = \text{Id}$ .

**BEMERKUNG.** Bei einem  $C^1$ -Isomorphismus ist also speziell  $f : U \rightarrow f(U)$  eine bijektive Abbildung von  $U$  auf  $f(U)$ . Die Abbildung  $g$  ist die zu  $f$  inverse Abbildung,  $f^{-1}$ . Es wird nun verlangt, daß sowohl  $f$  als auch  $g$  stetig differenzierbar sind, d.h. daß beide Abbildungen  $C^1$ -Abbildungen sind. Es gibt  $C^1$ -Abbildungen  $f$ , die invertierbar sind, wobei aber  $g = f^{-1}$  keine  $C^1$ -Abbildung ist. Ein Beispiel ist die Abbildung  $f$  auf  $] - 1, 1[$  gegeben durch  $f(x) = x^3$ . Hier ist  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ , und  $g$  ist in  $x = 0$  nicht differenzierbar.

**Satz 5.2** Ist  $f$  ein  $C^1$ -Isomorphismus zwischen den offenen Mengen  $U \subseteq \mathbf{R}^n$  und  $f(U) \subseteq \mathbf{R}^m$ , dann ist  $m = n$  und  $(Df)_x$  ist für jedes  $x \in U$  eine invertierbare lineare Abbildung des  $\mathbf{R}^n$  in sich.

**BEWEIS.** Nach Voraussetzung gibt es  $g : f(U) \rightarrow \mathbf{R}^n$  mit  $g \circ f = \text{Id}$  und  $f \circ g = \text{Id}$ . Daher ist nach der Kettenregel für jedes  $x \in U$

$$(Dg)_{f(x)}(Df)_x = \text{Id}$$

d.h.

$$(Df)_x(Dg)_{f(x)} = \text{Id}.$$

Die lineare Abbildung  $(Df)_x$  besitzt also eine inverse Abbildung und das ist nur möglich, wenn  $m = n$  ist. ■

**Hilfssatz 5.3** Sei  $U$  offen in  $\mathbf{R}^n$  und die Punkte  $x, y$  sowie deren Verbindungsstrecke in  $U$  enthalten. Sei  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  eine  $C^1$ -Funktion. Dann gilt

$$|f(y) - f(x)| \leq |y - x| \sup_v \|(Df)_v\|,$$

wobei  $v$  die Verbindungsstrecke zwischen  $x$  und  $y$  durchläuft.

**BEWEIS.**

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (Df)_{x+th}(h) dt \right| &\leq \int_0^1 |(Df)_{x+th}(h)| dt \\ &\leq \int_0^1 \|(Df)_{x+th}\| |h| dt \leq \sup_t \|(Df)_{x+th}\| |h|. \end{aligned}$$
■

**Hilfssatz 5.4** Sei  $U$  offen in  $\mathbf{R}^n$  und seien  $x, y, x_0 \in U$ . Wenn die Verbindungsstrecke zwischen  $x$  und  $y$  in  $U$  liegt, dann gilt für eine  $C^1$ -Funktion  $f$

$$|f(y) - f(x) - (Df)_{x_0}(y - x)| \leq |y - x| \sup_v \|(Df)_v - (Df)_{x_0}\|.$$

BEWEIS. Setze  $g(x) = f(x) - (Df)_{x_0}(x)$ . ■

**Definition 5.5** Eine Abbildung  $f$  heißt **lokaler  $C^1$ -Isomorphismus** in einem Punkt  $x$ , wenn eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  existiert, so daß die Restriktion von  $f$  auf  $U$  ein  $C^1$ -Isomorphismus von  $U$  auf  $f(U)$  ist.

Es ist klar, daß  $f \circ g$  ein lokaler  $C^1$ -Isomorphismus in  $x$  ist, wenn  $g$  ein lokaler  $C^1$ -Isomorphismus in  $x$  und  $f$  ein lokaler  $C^1$ -Isomorphismus in  $g(x)$  ist.

**Satz 5.6** (Satz über inverse Funktionen): Sei  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbf{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine  $C^1$ -Abbildung. Sei  $x_0 \in U$  und  $(Df)_{x_0} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  invertierbar. Dann ist  $f$  ein lokaler  $C^1$ -Isomorphismus in  $x_0$ , d.h.  $f$  bildet eine hinreichend kleine offene Menge  $U$  um  $x_0$   $C^1$ -Isomorph auf eine offene Menge  $f(U)$  ab.

BEWEIS. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $(Df)_{x_0} = \text{Id}$  ist. Weiters, daß  $x_0 = f(x_0) = 0$ . Wir führen nun die Hilfsfunktion  $g(x) = x - f(x)$  ein. Dann ist  $g(0) = 0$  und  $(Dg)_0 = 0$ . Da  $\text{Id}$  und  $f$   $C^1$ -Abbildungen sind, ist  $x \mapsto (Dg)_x$  und daher auch  $x \mapsto \|(Dg)_x\|$  stetig. Wegen  $(Dg)_0 = 0$  existiert also ein  $r > 0$ , so daß für alle  $x$  mit  $|x| < 2r$  gilt  $\|(Dg)_x\| < \frac{1}{2}$ . Aus dem Mittelwertsatz folgt dann

$$|g(x)| = |g(x) - g(0)| < |x| \sup_{|x| \leq 2r} \|(Dg)_x\| < \frac{|x|}{2}.$$

Insbesondere bildet  $g$  die abgeschlossene Kugel  $\bar{B}(0, r)$  in die abgeschlossene Kugel  $\bar{B}(0, \frac{r}{2})$  ab. Wir behaupten nun: Für jedes  $y \in \bar{B}(0, \frac{r}{2})$  gibt es genau ein  $x \in \bar{B}(0, r)$  mit  $f(x) = y$ , d.h.  $f$  ist lokal invertierbar als Abbildung. Dazu betrachten wir für jedes feste  $y \in \bar{B}(0, \frac{r}{2})$  die Abbildung  $g_y$ , definiert durch

$$g_y(x) = y + x - f(x).$$

Ist  $|x| \leq r$ , dann ist

$$|g_y(x)| \leq |y| + |x - f(x)| \leq |y| + |g(x)| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Die Abbildung  $g_y$  bildet also die abgeschlossene Menge  $\bar{B}(0, r)$  in sich ab. Außerdem gilt:

$$|g_y(x_1) - g_y(x_2)| = |g(x_1) - g(x_2)| = \left| \int_0^1 (Dg)_{x_1+t(x_2-x_1)}(x_2 - x_1) dt \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}$$

nach dem Mittelwertsatz.

Aus dem Fixpunktsatz folgt somit, daß  $g_y$  einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $x$  mit  $|x| \leq r$  besitzt. Aber aus  $g_y(x) = x$  folgt  $f(x) = y$ .

Wir können daher auf  $\bar{B}(0, \frac{r}{2})$  eine Abbildung  $f^{-1}$  definieren durch  $f^{-1}(y) = x$ , wobei  $x$  das eindeutig bestimmte Element mit  $f(x) = y$  bedeutet. Als nächstes zeigen wir, daß die so



definierte Abbildung  $f^{-1}$  stetig ist: Schreibt man nämlich  $x = x - f(x) + f(x) = g(x) + f(x)$ , dann folgt

$$|x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| + \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

d.h.

$$|x_1 - x_2| \leq 2|f(x_1) - f(x_2)|$$

also

$$|f^{-1}(f(x_1)) - f^{-1}(f(x_2))| = |x_1 - x_2| \leq 2|f(x_1) - f(x_2)|,$$

womit die Stetigkeit nachgewiesen ist.

Nun zur Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$ : Sei  $U = B(0, \frac{r}{2})$  und  $y, y_1 \in U$ ,  $x = f^{-1}(y)_1$ ,  $x_1 = f^{-1}(y_1)$ .

Dann ist  $|x| < r$ ,  $|x_1| < r$ . Also ist  $\|(Dg)_{x_1}\| \leq \frac{1}{2}$ , d.h.  $\|\text{Id} - (Df)_{x_1}\| \leq \frac{1}{2} < 1$ . Daher existiert

$$(Df)_{x_1}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{Id} - (Df)_{x_1})^k.$$

Wenn  $f^{-1}$  differenzierbar ist, muß gelten  $(Df^{-1})_{y_1} = (Df)_{x_1}^{-1}$ . Wir bilden daher den Ausdruck

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) - (Df)_{x_1}^{-1}(y - y_1)| = |x - x_1 - (Df)_{x_1}^{-1}(f(x) - f(x_1))|.$$

Da  $f$  in  $x_1$  differenzierbar ist, gilt

$$f(x) = f(x_1) + (Df)_{x_1}(x - x_1) + R(x, x_1) \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{|R(x, x_1)|}{|x - x_1|} = 0.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} |x - x_1 - (Df)_{x_1}^{-1}(f(x) - f(x_1))| &= |x - x_1 - (Df)_{x_1}^{-1}((Df)_{x_1}(x - x_1) + R(x, x_1))| \\ &\leq |(Df)_{x_1}^{-1}(R(x, x_1))| \\ &\leq \|(Df)_{x_1}^{-1}\| \frac{|R(x, x_1)|}{|x - x_1|} |x - x_1| \|(Df)_{x_1}^{-1}\| \frac{|R(x, x_1)|}{|x - x_1|} 2|y - y_1|. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{y \rightarrow y_1} \frac{|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) - (Df)_{x_1}^{-1}(y - y_1)|}{|y - y_1|} = 0.$$

weil wegen der Stetigkeit von  $f^{-1}$  auch  $\lim x = x_1$  ist. Somit ist  $f^{-1}$  differenzierbar in  $y_1$  und es gilt

$$(Df^{-1})_{y_1} = (Df)_{x_1}^{-1} = (Df)_{f^{-1}(y_1)}^{-1}.$$

Nun sind alle Abbildungen  $y \mapsto f^{-1}(y)$ ,  $x \mapsto (Df)_x$  und  $A \in L(\mathbf{R}^n) \mapsto A^{-1} \in L(\mathbf{R}^n)$  stetig und daher ist auch die zusammengesetzte Abbildung  $y \mapsto (Df^{-1})_y = (Df)_{f^{-1}(y)}^{-1}$  stetig, d.h.  $f^{-1}$  ist ein  $C^1$ -Isomorphismus und  $f$  ist lokal  $C^1$ -invertierbar. ■

BEISPIEL.

1. Die Abbildung  $f : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ , definiert durch  $f(x) = \frac{x}{|x|^2}$  ist ein  $C^1$ -Isomorphismus.

Zunächst ist  $f$  injektiv, d.h.  $f(x_1) = f(x_2)$  impliziert  $x_1 = x_2$ . Denn ist  $f(x_1) = f(x_2)$ , dann auch  $|f(x_1)| = |f(x_2)|$ .

Es folgt:  $\frac{|x_1|}{|x_1|^2} = \frac{|x_2|}{|x_2|^2}$ , d.h.  $|x_1| = |x_2|$  und schließlich  $x_1 = |x_1|^2 f(x_1) = |x_2|^2 f(x_2) = x_2$ .

Die Abbildung ist auch surjektiv, d.h. eine Abbildung auf ganz  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ , weil  $f^{-1} = f$  (einfache Rechnung).

Da  $x \mapsto \frac{1}{|x|^2}$  auf  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  eine  $C^1$ -Abbildung ist, ist  $f$  ebenfalls  $C^1$ .

In diesem Fall läßt sich das Differential leicht direkt berechnen:

$$\begin{aligned} (Df)_x(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \frac{x + th}{|x + th|^2} - \frac{x}{|x|^2} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x|x|^2 + th|x|^2 - x|x|^2 - 2t(x|h)x - xt^2|h|^2}{t|x + th|^2|x|^2} \\ &= \frac{h|x|^2 - 2(x|h)x}{|x|^4} = \frac{1}{|x|^4} (|x|^2 \text{Id} - 2xx^t)(h). \end{aligned}$$

Im Fall  $n = 2$  ist z.B.

$$(f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

und

$$(Df)_{(x,y)} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2yx & x^2 - y^2 \end{bmatrix}$$

2. Für die Abbildung  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , wobei  $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  gilt

$$\det (Dg)_{(r,\theta)} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r.$$

Sie ist also für  $r \neq 0$  ein lokaler  $C^1$ -Isomorphismus.

Für  $r = 0$  bildet  $g$  jeden Punkt  $(0, \theta)$  in  $(0, 0)$  ab, ist also nicht mehr injektiv.

3. Eine Abbildung  $f$  kann in jedem Punkt  $x$  ein lokaler  $C^1$ -Isomorphismus sein, ohne daß  $f$  global invertierbar ist. Ein Beispiel stellt die Abbildung  $z \mapsto e^z$  der komplexen Zahlenebene in sich dar oder damit äquivalent die Abbildung

$$(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y) \text{ des } \mathbf{R}^2 \text{ in sich.}$$

Hier ist

$$(Df)_{(x,y)} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

und  $\det(Df)_{(x,y)} = e^{2x} \neq 0$ . Trotzdem ist  $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ .

4. Die Abbildung  $A \mapsto A^{-1}$  von der Menge aller invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen in sich ist ein  $C^1$ -Isomorphismus.

Bevor wir das beweisen, wollen wir uns überlegen, was das überhaupt bedeutet. Ist  $A = [a_{ik}]$  eine  $n \times n$ -Matrix, so können wir diese als das Element

$$(a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) \in \mathbf{R}^{n^2}$$

interpretieren. Dann ist  $A \mapsto \det A$  ein Polynom auf  $\mathbf{R}^{n^2}$  und daher stetig. Das Urbild der offenen Menge  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  ist daher offen in  $\mathbf{R}^{n^2}$ . Dieses Urbild besteht aus allen  $n \times n$ -Matrizen mit  $\det A \neq 0$ , d.h. aus allen invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen. Somit ist diese Menge offen. Die Koordinaten von  $A^{-1}$  sind von der Gestalt  $\frac{A_{ik}}{\det A}$ , wobei  $A_{ik}$  eine gewisse Unterdeterminante, also wieder ein Polynom ist (vgl. Vorlesung "Lineare Algebra") und speziell stetig differenzierbar. Daher ist die Abbildung  $A \mapsto A^{-1}$  eine  $C^1$ -Abbildung. Wir wollen nun ihr Differential im Punkt  $A$  berechnen. Das ist definitionsgemäß jene lineare Abbildung  $H \mapsto \phi(H)$ , für welche

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{\|(A+H)^{-1} - A^{-1} - \phi(H)\|}{\|H\|} = 0$$

ist.

Nun ist für alle genügend kleinen  $H$ , d.h.  $\|H\| < \delta$ ,

$$\begin{aligned} (A+H)^{-1} - A^{-1} &= [A(I + A^{-1}H)]^{-1} - A^{-1} = (I + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} - A^{-1} \\ &= (I - A^{-1}H + (A^{-1}H)^2 \pm \dots)A^{-1} - A^{-1} \\ &= -A^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1}HA^{-1} + \dots \end{aligned}$$

Daher ist  $\phi(H) = -A^{-1}HA^{-1}$ . Diese Abbildung ist klarerweise invertierbar. Daher ist  $A \mapsto A^{-1}$  in jedem Punkt ein lokaler  $C^1$ -Isomorphismus und da sie invertierbar ist, ein globaler  $C^1$ -Isomorphismus, wie behauptet.

**Satz 5.7** Sei  $f$  eine  $C^p$ -Abbildung von einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbf{R}^n$  in  $\mathbf{R}^n$ . Ist  $\det(Df)_0 \neq 0$  für ein  $x_0 \in U$ , dann bildet  $f^{-1}$  eine hinreichend kleine offene Umgebung  $f(U)$  von  $f(x_0)$  in  $U$  ab und ist dort eine  $C^p$ -Abbildung.

BEWEIS. Aus dem bereits bewiesenen Satz über inverse Funktionen ergibt sich, daß  $f$  ein  $C^1$ -Isomorphismus von einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  auf  $f(U)$  ist. Wir müssen nur noch nachweisen, daß alle partiellen Ableitungen von  $f^{-1}$  existieren und stetig sind, falls  $m \leq p$ .

Hierzu benötigen wir, daß die Elemente der Matrix  $A^{-1}$   $C^\infty$ -Funktionen der Elemente von  $A$  sind. Das folgt wieder daraus, daß sie als Quotienten zweier Polynome in den Elementen von  $A$  darstellbar sind. Nun gilt

$$(Df^{-1})_y = (Df)_{f^{-1}(y)}^{-1}.$$

Existieren alle partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung der Abbildung  $y \mapsto f^{-1}(y)$ , dann existieren alle partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung der Elemente von  $(Df)_{f^{-1}(y)}$  und da die Elemente von  $A^{-1}$   $C^\infty$ -Funktionen der Elemente von  $A$  sind, existieren alle partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung der Elemente von  $(Df^{-1})_y$ , d.h. alle partiellen Ableitungen  $(k+1)$ -ter Ordnung von  $f^{-1}$ . Diese sind überdies stetig. Das Verfahren endet bei  $k = p - 1$ , da  $f$  nur  $p$ -mal stetig differenzierbar ist. ■

Ist  $f : U \rightarrow f(U)$  ein  $C^1$ -Isomorphismus, dann kann man  $f$  auf zwei Arten interpretieren, entweder, wie bisher als Abbildung, welche jedem  $x \in U$  einen eindeutig bestimmten Punkt  $f(x) \in f(U)$  zuordnet oder aber als eine **Koordinatentransformation**. Betrachtet wir etwa die ebenen Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Halten wir  $\theta = c$  konstant, so ergeben sich die Geraden  $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = c$ , d.h.  $\frac{y}{x} = \tan c$  oder  $y = (\tan c)x$ , falls  $c \neq \pm \frac{\pi}{2}$ . Hält man dagegen  $r = R$  konstant, so ergeben sich die Kreise  $x^2 + y^2 = R^2$ , falls  $R \neq 0$ .

Diese Geraden und Kreise entsprechen also den Parallelen zur  $x$ - bzw.  $y$ -Achse bei den kartesischen Koordinaten. Jeder Punkt ist als Schnitt solcher Koordinatenkurven darstellbar. Diese sind überdies eindeutig bestimmt, wenn man vom Nullpunkt absieht, der eine Sonderrolle spielt, weil dort die Abbildung kein lokaler  $C^1$ -Isomorphismus ist.

### Implizite Funktionen

Bei der Beschreibung des Graphen einer Funktion  $f(x, y)$  verwendet man oft die "Niveaulinien"  $f(x, y) = c$ . Sei etwa  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Hier hat die Gleichung  $f(x, y) = -1$  keine Lösung, die Gleichung  $f(x, y) = 0$  nur die Lösung  $x = 0, y = 0$ , während die Gleichung  $f(x, y) = 1$  den Kreis  $x^2 + y^2 = 1$  darstellt. In diesem Fall möchte man auch gerne  $y$  als Funktion  $y = g(x)$  von  $x$  darstellen. Löst man die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  nach  $y$  auf, so ergibt sich  $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ , d.h. man erhält zwei Funktionen  $y = \sqrt{1 - x^2}$  und  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ .

Betrachten wir den Fall  $x^2 + y^2 = 1$ . Ist  $(x_0, y_0)$  ein Punkt auf diesem Kreis, wo die Tangente parallel zur  $y$ -Achse ist, dann existiert eine offene Umgebung von  $x_0$  auf der  $x$ -Achse, etwa  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ , so daß auf dieser Umgebung eine eindeutig bestimmte differenzierbare Funktion  $y = g(x)$  existiert mit  $y_0 = g(x_0)$  und  $x^2 + (g(x))^2 = 1$ . Man sagt, daß die Funktion  $y = g(x)$  durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  implizit definiert wird. Die hier skizzierte Situation ist typisch für den allgemeinen Fall. Das zeigt der

**Satz 5.8** (Satz über implizite Funktionen  $F(x, y) = 0$ ): Sei  $F$  eine  $C^1$ -Abbildung von einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbf{R}^2$  in die reellen Zahlen. Sei  $(x_0, y_0) \in U$ . Setzt man voraus, daß  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  ist, so existiert eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion  $f$  auf einer geeigneten offenen Umgebung  $U(x_0)$  des Punktes  $x_0$ , so daß  $f(x_0) = y_0$  gilt  $\iff F(x, f(x)) = 0$  auf  $U(x_0)$  ist erfüllt.

BEWEIS. Wir betrachten die Abbildung  $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definiert durch

$$\phi(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Dann ist

$$\det(D\phi)_{(x,y)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ F_x(x, y) & F_y(x, y) \end{bmatrix} = F_y(x, y),$$

wobei  $F_x$  etwa die partielle Ableitung von  $F$  bzgl.  $x$  bezeichnet. Da  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  ist, ist  $\phi$  ein lokaler  $C^1$ -Isomorphismus in  $(x_0, y_0)$ . Es existiert also eine offene Umgebung  $V(x_0, y_0)$ , deren Bild  $\phi(V(x_0, y_0)) = W(x_0, 0)$  eine offene Umgebung des Bildpunktes

$$(x_0, y_0) = (x_0, 0)$$

ist, auf welcher  $\phi$  eine inverse  $C^1$ -Abbildung  $\psi$  besitzt. Diese hat die Gestalt

$$\psi(x, y) = (x, g(x, y))$$

mit einer  $C^1$ -Funktion  $g(x, y)$ .

Wegen  $\phi\psi(x, y) = (x, y)$  auf  $W(x_0, 0)$  und  $\phi\psi(x, y) = \phi(x, g(x, y)) = (x, F(x, g(x, y)))$  ist also  $F(x, g(x, y)) = y$  auf  $W(x_0, 0)$ . Da  $W(x_0, 0)$  ein offenes Intervall der Gestalt  $U(x_0) \times W(0)$  enthält, ist auf  $U(x_0)$  die Funktion  $f(x) = g(x, 0)$  stetig differenzierbar und erfüllt dort  $F(x, f(x)) = F(x, g(x, 0)) = 0$ . Damit ist der Satz bewiesen. ■

#### BEISPIELE.

1. Sei  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Hier ist  $F_y = 2y \neq 0$  außer für die Punkte  $(\pm 1, 0)$ . In diesen Punkten existiert auch keine Funktion der Gestalt  $y = f(x)$ , die auf einer offenen Umgebung von  $\pm 1$  definiert ist und dort  $x^2 + (f(x))^2 - 1 = 0$  erfüllt.
2. Sei  $F(x, y) = x^2y^5 - \sin(x-y) + x = 0$  und  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Hier ist  $F_y = 5x^2y^4 + \cos(x-y)$  und daher ist  $F_y(0, 0) = 1 \neq 0$ . Es existiert also eine Umgebung von  $x = 0$ , auf welcher die Gleichung  $F(x, y) = 0$  in der Form  $y = y(x)$  auflösbar ist.
3. Sei  $F(x, y) = y^3 - x$ . Hier ist  $F(0, 0) = 0$  und  $F_y(x, y) = 3y^2$ . Daher ist  $F_y(0, 0) = 0$ . In diesem Fall läßt sich  $y^3 - x = 0$  zwar in der Gestalt  $y = \sqrt[3]{x}$  schreiben, aber diese Funktion ist in  $x = 0$  nicht differenzierbar.
4. Wir betrachten wieder den Fall der Niveaulinien: Sei  $f(x, y)$  eine reellwertige  $C^1$ -Funktion auf einer offenen Menge  $U$ . Ist für jedes  $(x, y) \in U$  mit  $f(x, y) = c$  das Differential  $(Df)_{(x,y)} \neq 0$ , dann ist die Menge aller  $(x, y)$  mit  $f(x, y) = c$  eine glatte Kurve oder besteht aus mehreren glatten Kurven. Man nennt diese dann Niveaulinien. Es genügt zu zeigen, daß für jeden Punkt  $(a, b) \in U$  mit  $f(a, b) = c$  eine offene Umgebung existiert, auf welcher die Menge aller Punkte  $(x, y)$  mit  $f(x, y) = c$  eine glatte orientierte Kurve durch  $(a, b)$  bilden.

Nach Voraussetzung ist  $Df = (f_x, f_y) \neq 0$ , d.h. entweder  $f_x \neq 0$  oder  $f_y \neq 0$ . Im ersten Fall ist die durch  $f(x, y) = c$  definierte implizite Funktion von der Gestalt  $x = \phi(y)$  und im zweiten Fall von der Gestalt  $y = \psi(x)$ .

Wir wissen bereits, daß die implizit definierte Funktion  $f$  aus dem obigen Satz stetig differenzierbar ist. Man kann die Ableitung wie folgt berechnen.

Wir haben in einer Umgebung von  $x_0$  die Identität  $F(x, f(x)) = 0$ . Wenden wir darauf die Kettenregel an, so ergibt sich

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) = F_x + F_y f'(x).$$

Da  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  ist, ergibt sich daraus

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

BEISPIEL. Betrachten wir den Kreis  $x^2 + y^2 = 1$ . Sei  $(x_0, y_0)$  ein Punkt des Kreises mit  $y_0 > 0$ . Dann ist in einer gewissen Umgebung  $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Die Ableitung  $f'(x)$  kann hier direkt berechnet werden,  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}$ . Wendet man die obige Überlegung an, so

erhalten wir  $F_x = 2x$ ,  $F_y = 2y$  und daher ebenfalls  $f'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$ .

Ist in einem Punkt  $(x_0, y_0)$  das Differential  $(DF)_{(x_0, y_0)} = 0$ , d.h.  $F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$ , so können verschiedene Situationen vorliegen.

Es kann sein, daß  $(x_0, y_0)$  ein isolierter Punkt ist, d.h. daß in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  keine weitere Lösung von  $F(x, y) = 0$  existiert, wie etwa im Fall  $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ . Oder aber es können sich mehrere glatte Kurven in diesem Punkt schneiden, wie etwa für  $F(x, y) = x^2 - y^2 = 0$ . Hier fallen also zwei Lösungen zusammen.

Wir haben im obigen Satz vorausgesetzt, daß  $F$  eine  $C^1$ -Funktion ist und erhalten, daß die implizit definierte Funktion  $f$  ebenfalls eine  $C^1$ -Funktion ist. Wir wollen nun zeigen, daß  $f$  so oft differenzierbar ist wie  $F$ .

**Satz 5.9** *Seien die Voraussetzungen vom Satz über implizite Funktionen erfüllt. Ist  $F$  eine  $C^p$ -Funktion, dann ist auch  $f$   $p$ -mal stetig differenzierbar.*

BEWEIS. Wir haben beim Beweis dieses Satzes die Abbildungen  $\phi$  und  $\psi$  betrachtet. Nach Voraussetzungen ist jetzt  $\phi$  eine  $C^p$ -Funktion. Dann ist auch  $\psi$  eine  $C^p$ -Funktion. Nun ist  $\psi(x, y) = (x, g(x, y))$  und daher  $g(x, y)$  eine  $C^p$ -Funktion. Da  $f(x) = g(x, 0)$  ist, ist auch  $f$  eine  $C^p$ -Funktion. ■

**Berechnung der höheren Ableitung von  $f$**  Man geht von der Gleichung  $F_x + F_y f'(x) = 0$  aus und differenziert diese nach  $x$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}(F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x)) = F_{xx}(x, f(x)) \\ &+ F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{yx}(x, f(x))f'(x) + F_{yy}(x, f(x))(f'(x))^2 \\ &+ F_y(x, f(x))f''(x), \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$f''(x) = -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}f'(x) + F_{yy}(f'(x))^2}{F_y}.$$

Setzt man hier  $f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$  ein, bekommt man die Gleichung

$$f''(x) = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}.$$

Analog kann man höhere Ableitungen berechnen.

Wir betrachten jetzt eine  $C^1$ -Funktion  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von  $n$  Variablen, insbesondere die Frage: Wann läßt sich  $x_n$  als Funktion  $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$  der übrigen Variablen darstellen? Man zeigt völlig analog: Sei  $F$  auf einer offenen Menge  $U$  definiert und  $x_0 \in U$  mit  $F(x_0) = 0$ . Ist  $F_{x_n}(x_0) \neq 0$ , so existiert eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion  $f(x_1, \dots, x_{n-1})$  auf einer geeigneten offenen Umgebung  $U((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0))$  des Punktes

$(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) \in \mathbf{R}^{n-1}$ , so daß  $f((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)) = x_n^0$  und  $F(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$  auf dieser Umgebung erfüllt ist.

Der Beweis verläuft genauso wie oben. Man betrachtet die Abbildung  $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ , definiert durch

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)).$$

Dann ist  $\det (D\phi)_{x_0} = F_x(x_0) \neq 0$  und daher existiert eine inverse Abbildung  $\psi$ , usw. Ist  $F \in C^p$ , dann auch  $f$ .

Der Satz über implizite Funktionen kann als Präzisierung des heuristischen Prinzips aufgefaßt werden, daß man aus einer Gleichung in  $s$  Unbekannten immer eine Unbekannte ausrechnen kann.

Allgemeiner wird man erwarten, daß man aus  $m$  Gleichungen in  $m + n$  Unbekannten immer  $m$  Unbekannte ausrechnen kann. Diese hängen dann von den restlichen  $n$  Parametern ab. Es muß allerdings gewährleistet sein, daß die  $m$  Gleichungen wirklich  $m$  verschiedene Bedingungen darstellen und nicht auf weniger Gleichungen reduziert werden können. In der linearen Algebra heißt das, daß die entsprechenden linearen Gleichungen linear unabhängig sein müssen, d.h., daß eine  $m \times m$ -Untermatrix existieren muß, deren Determinante von 0 verschieden ist.

Eine ganz analoge Eigenschaft muß im allgemeinen Fall erfüllt sein, wie der folgende grundlegende Satz zeigt.

**Satz 5.10** (*Allgemeiner Satz über implizite Funktionen*): Sei  $F$  eine  $C^p$ -Abbildung von einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbf{R}^{m+n}$  in den  $\mathbf{R}^m$ , die dem Element  $(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in U$  eine Zahl zuordnet. Sei  $(x_0, y_0) \in U$  mit  $F(x_0, y_0) = (0, 0, \dots, 0)$ . Setzt man voraus, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0$$

ist, so existiert eine eindeutig bestimmte  $C^p$ -Abbildung  $f$  auf einer geeigneten offenen Umgebung  $U(x_0)$  des Punktes  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  in den  $\mathbf{R}^m$ , so daß  $f(x_0) = y_0$  gilt und  $F(x, f(x)) = 0$  auf  $U(x_0)$  erfüllt ist.

BEWEIS. Wir betrachten die Abbildung  $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}^{m+n}$ , definiert durch

$$\phi(x, y) = (x, F(x, y)) \text{ für } x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m.$$

Dann ist

$$\det D\phi_{(x,y)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_t}{\partial x_1} & \frac{\partial F_t}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_t}{\partial x_n} & \frac{\partial F_t}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_t}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Das ist aber nichts anderes als

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} = \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}.$$

Von hier ab verläuft der Beweis wieder genau wie oben. ■

BEISPIEL. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$F_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - t = 0$$

$$F_2(x, y, z, t) = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 - 8 = 0.$$

Läßt sich in einer Umgebung des Punktes  $(0, -1, 2, 1)$  aus diesen Gleichungen  $z$  und  $t$  eliminieren, d.h. kann man dort  $z$  und  $t$  als Funktion von  $x$  und  $y$  darstellen? Dazu betrachten wir die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, t)} = \det \begin{bmatrix} 2z & 2t \\ 3z^2 & 3t^2 \end{bmatrix} = 6zt(t - z) = -12 \neq 0.$$

Da die Funktionaldeterminante  $\neq 0$  ist, gibt es eine Funktion  $f(x, y) = (z(x, y), t(x, y))$  mit

$$F^i(x, y, z(x, y), t(x, y)) = 0,$$

d.h. die gesuchten Funktionen  $z(x, y)$  und  $t(x, y)$  existieren. Wir wollen nun die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial z}{\partial x}$  und  $\frac{\partial z}{\partial y}$  berechnen. Dazu bilden wir

$$\frac{\partial}{\partial x} F_i(x, y, z(x, y), t(x, y)) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} F_i(x, y, z(x, y), t(x, y)).$$

Wir erhalten im ersten Fall

$$\begin{aligned} 2x + 2zz_x + 2tt_x &= 0 \\ 3x^2 + 3z^2z_x + 3t^2t_x &= 0. \end{aligned}$$

Im Punkt  $(0, -1, 2, 1)$  ergibt das

$$\begin{aligned} 2z_x + t_x &= 0 \\ 4z_x + t_x &= 0. \end{aligned}$$

Daher gilt  $z_x(0, -1) = 0$  und  $t_x(0, -1) = 0$ .

Für die Ableitungen nach  $y$  erhalten wir analog

$$\begin{aligned} 2y + 2zz_y + 2tt_y &= 0 \\ 3y^2 + 3z^2z_y + 3t^2t_y &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$2z_y + t_y = 1$$



$$4z_y + t_y = -1.$$

Daher gilt  $z_y(0, -1) = -1$  und  $t_y(0, -1) = 3$ .

### Maxima und Minima mit Nebenbedingungen

Wir betrachten jetzt Extremalprobleme der folgenden Art: Man soll Maxima oder Minima für eine Funktion  $f(x, y)$  berechnen, wenn  $x$  und  $y$  nicht unabhängige Veränderliche sind, sondern durch eine Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  miteinander verknüpft sind.

Im Prinzip könnte man stets eine Veränderliche durch die andere aus  $g(x, y) = 0$  ausdrücken und hätte das Problem auf Extrema einer Veränderlichen reduziert. In der Praxis ist das aber sehr oft schwierig. Hier erweist sich eine Methode, die auf Lagrange zurückgeht, als besonders nützlich: Nehmen wir an, daß  $g$  auf einer offenen Menge  $U$  des  $\mathbf{R}^2$  definiert ist und daß  $M = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$  eine eindimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit ist. Das ist definitionsgemäß genau dann der Fall, wenn für jeden Punkt  $(a, b) \in M$  das Differential  $(Dg)_{(a,b)} \neq 0$ . Wir suchen einen solchen Punkt  $(a, b) \in M$ , in welchem die Funktion  $f$  ein lokales Extremum annimmt. Dazu betrachten wir eine lokale Parameterdarstellung für  $M$  in der Umgebung des Punktes  $(a, b)$ , etwa  $t \mapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  mit  $\varphi(t_0) = (a, b)$ .

Dann nimmt die Funktion  $t \mapsto f(\varphi(t))$  im Punkt  $t_0$  ein lokales Extremum an. Daher gilt  $f(\varphi(t))' = 0$  im Punkt  $t_0$  oder  $(Df)_{(a,b)}(\dot{\varphi}(t_0)) = 0$ . Weiters ist nach Definition von  $M$  die Funktion  $g$  auf  $M$  identisch 0 und daher gilt  $g(\varphi(t)) \equiv 0$ .

Differenziert man diese Identität im Punkt  $t_0$ , so erhält man  $(Dg)_{(a,b)}(\dot{\varphi}(t_0)) = 0$ . Also steht auch der Vektor  $(\text{grad } g)(a, b)$  orthogonal auf dem Tangentenvektor  $\dot{\varphi}(t_0)$ . Da im  $\mathbf{R}^2$  die Vektoren, die auf einem festen Vektor senkrecht stehen, einen eindimensionalen Teilraum aufspannen, muß gelten  $\text{grad } f(a, b) = l \text{ grad } g(a, b)$  mit einer Konstanten  $l$  oder anders ausgedrückt,  $(Df)_{(a,b)} = l(Dg)_{(a,b)}$ . Im Koordinatenschreibweise heißt das:

$$f_x - lg_x = 0 \text{ und } f_y - lg_y = 0.$$

Fassen wir diese Überlegung zusammen, so erhalten wir die **Lagrangesche Regel**: Um die kritischen Punkte der Funktion  $f(x, y)$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  zu bestimmen, betrachte man die neue Funktion  $F(x, y) = f(x, y) - lg(x, y)$  mit einem Multiplikator  $l$  und betrachte die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} f_x - lg_x &= 0 \\ f_y - lg_y &= 0 \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Situation ist wie folgt: Sei  $f$  eine Funktion von  $s$  Veränderlichen und seien  $1 \leq p \leq s$  Bedingungen an die  $x_i$  gegeben, etwa  $g_1 = g_2 = \dots = g_p = 0$ . Man bestimme lokale Extrema von  $f$  unter diesen Nebenbedingungen.

**Satz 5.11** Sei  $g : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ , ( $U$  offen in  $\mathbf{R}^n$ ,  $1 \leq p \leq n$ ), eine  $C^1$ -Abbildung und  $M = \{x \in U : g(x) = 0\}$ . Für jedes  $x \in M$  sei das Differential  $(Dg)_x : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$  surjektiv. Sei weiters  $f$  eine  $C^1$ -Funktion, die auf einer offenen  $U \subset M$  definiert ist.

Dann gilt: Nimmt  $f$  in einem Punkt  $a \in M$  ein lokales Extremum an, so existieren  $p$  reelle Zahlen  $l_1, \dots, l_p$  mit

$$(Df)_a = \sum_{i=1}^p l_i (Dg_i)_a.$$

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist  $M$  eine  $k$ -dimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit mit  $k = n - p$ . Wir können daher eine lokale Parameterdarstellung  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $U \subseteq \mathbf{R}^k$  offen, finden. Es existiert  $t_0 \in U$  mit  $\varphi(t_0) = a$  und für jedes  $t \in U$  hat das Differential  $(D\varphi)_t$  den Rang  $k$ .

Da  $g \equiv 0$  auf  $M$  ist, gilt  $g\varphi \equiv 0$  und daher speziell  $(Dg)_a(D\varphi)_{t_0} = 0$ .

Das bedeutet, daß  $(Dg_1)_a, \dots, (Dg_p)_a$  im Annihilator des  $(n - p)$ -dimensionalen Teilraumes  $\text{Im}(D\varphi)_{t_0}$  von  $\mathbf{R}^n$  liegen. Da dieser Annihilator  $p$ -dimensional ist und  $(Dg_1)_a, \dots, (Dg_p)_a$  nach Voraussetzung einen  $p$ -dimensionalen Raum aufspannen, bilden diese Funktionale  $(Dg^i)_a$  sogar eine Basis des Annihilators  $(\text{Im}(D\varphi)_{t_0})^0$ . (Siehe Vorlesung "Lineare Algebra".)

Nach Voraussetzung hat  $f$  im Punkt  $a \in M$  ein lokales Extremum. Daher hat  $f\varphi$  in  $t_0$  ein lokales Extremum. Es muß daher gelten  $D(f\varphi)_{t_0} = (Df)_a(D\varphi)_{t_0} = 0$ . Das Differential  $(Df)_a$  liegt also im Annihilator von  $\text{Im}(D\varphi)_{t_0}$  und läßt sich daher als Linearkombination der Basiselemente  $(Dg_i)_a$  darstellen, also  $(Df)_a = \sum l_i(Dg_i)_a$ . ■

Dieser Satz kann folgendermaßen formuliert werden:

Sind in einer differenzierbaren Funktion  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  die  $n$  Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  nicht nicht unabhängig, sondern durch  $p$  unabhängige Nebenbedingungen

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_p(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq p < n,$$

miteinander verknüpft, so führt man  $p$  zusätzliche Zahlen  $l_1, \dots, l_p$ , die sogenannten **Lagrange Multiplikatoren** ein und betrachtet die  $n + p$  Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \quad g_1 = 0, \dots, g_p = 0$$

für die  $n + p$ -Unbekannten  $x_1, \dots, x_n, l_1, \dots, l_p$ , wobei  $F = f - (l_1 g_1 + \dots + l_p g_p)$  gesetzt wurde. Unter den im Satz angegebenen Voraussetzungen muß jedes lokale Extremum eine Lösung dieser Gleichungen darstellen.

BEISPIEL. Man berechne das Minimum der Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (x_i > 0)$$

unter der Nebenbedingung  $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n - 1 = 0$ .

Hier führt man  $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - l(x_1 \dots x_n - 1)$  ein. Es muß dann gelten:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 1 - l \frac{x_1 \dots x_n}{x_i} = 0$$

und  $x_1 \dots x_n = 1$ .

Daraus erhält man  $x_i = l$  für alle  $i$  und  $l^n = 1$ . Es ist also das Minimum gegeben durch  $f(1, \dots, 1) = n$ . Anders ausgedrückt:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}} \geq n \quad \text{oder} \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

für alle  $x_i > 0$ . Das ist die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

## Aufgaben

1. Sei  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  gegeben durch  $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctg x$ . Zeige, daß  $f$  keinen Fixpunkt besitzt. Zeige mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, daß  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  für alle  $x, y \in \mathbf{R}$  gilt. Ist das ein Widerspruch zum Fixpunktsatz?
2. Zeige: Sei  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine Abbildung, welche eine abgeschlossene Menge  $M$  in eine kompakte Menge  $K \subset M$  abbildet und  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  für alle  $x, y \in M$  erfüllt. Zeige: Es existiert ein eindeutig bestimmter Fixpunkt für  $f$ .
3. Sei  $f$  eine zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf  $\mathbf{R}$ . Um eine Nullstelle  $x_0$  von  $f$  numerisch zu approximieren, kann man nach Newton folgendermaßen vorgehen: Man gehe von einem beliebigen Punkt  $x_1$  aus und betrachte die Tangente im Punkt  $(x_1, f(x_1))$  und schneide diese mit der  $x$ -Achse. Der so erhaltene  $x$ -Wert heiße  $x_2$ . Nun wende man dasselbe Verfahren auf  $x_2$  statt  $x_1$  an und erhält  $x_3$ , usw. Unter der Voraussetzung, daß  $f$  das Intervall  $[a, b]$  in sich abbildet,  $x_1 \in [a, b]$  ist,  $f'(x) \neq 0$  und  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  auf  $[a, b]$  gilt mit  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , zeige, daß das Verfahren konvergiert.

4. Sei  $U$  die Menge aller Punkte  $(r, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3$  mit  $r > 0$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ . Zeige, daß  $U$  offen ist und daß  $f$  definiert durch

$$f(r, \varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$$

einen Diffeomorphismus von  $U$  auf  $f(U)$  bildet. Bestimme auch  $f(U)$  und die Funktionaldeterminante.

5. Sei  $f(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ . Bestimme die Menge aller Punkte  $(x, y, z)$ , in welchen  $Df$  nicht invertierbar ist.
6. Sei  $\varphi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ . In welchen Punkten ist  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus? Ist  $\varphi$  (global) invertierbar? Beschreibe  $\varphi$  in Polarkoordinaten.
7. Zeige, daß

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}, \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 2y - 1} \right)$$

einen Diffeomorphismus von  $U = \{(x, y) : y > 0\}$  auf den Kreis  $x^2 + y^2 < 1$  bildet.

8. Sei  $t \mapsto (a_{ik}(t))$  eine differenzierbare Abbildung von  $\mathbf{R}^1$  in die Menge der invertierbaren  $s \times s$ -Matrizen. Berechne  $\frac{d}{dt}(A(t))^{-1}$  und allgemeiner  $\frac{d}{dt}(A(t))^n$  für  $n \in \mathbf{Z}$ .
9. Zeige: Sei  $U$  offen in  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  und sei  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$  eine  $C^1$ -Abbildung. Dann gilt für jedes  $x \in U$

$$(Df)_x = ((D_1f)_x, (D_2f)_x),$$

wobei  $(D_1f)_x$  das Differential der Abbildung  $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$  bei konstantem  $x_2$  und  $(D_2f)_x$  das Differential der Abbildung  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  bei konstantem  $x_1$  bedeutet.

10. Sei  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$ . Man skizziere den Graphen von  $F$  und bestimme diejenigen Punkte, wo  $y$  als Funktion von  $x$  darstellbar ist. Man bestimme dort  $y'(x)$  und  $y''(x)$ .

11. Sei  $F(x, y) = y^3 + y - x^2 = 0$  und  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Ist  $y$  in einer Umgebung von  $x_0$  als Funktion von  $x$  darstellbar? Wenn ja, berechne man  $y'(x_0)$  und  $y''(x_0)$ .
12. Dasselbe für  $xy^2 + 3 \log x - 4 = 0$  in Punkt  $(1, 2)$ .
13. Dasselbe für  $\sin x + 2 \cos y - \frac{1}{2} = 0$  im Punkt  $(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$ .
14. Für welche  $(x, y, z)$  läßt sich  $z$  als Funktion  $z = z(x, y)$  schreiben, wenn  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$  ist? Berechne dort  $z_x, z_y$  sowie  $z_{xx}, z_{xy}$  und  $z_{yy}$ .
15. Sei  $F(x, y, z) = 0$  so, daß nach dem Satz über implizite Funktionen sowohl  $z = z(x, y)$  als auch  $x = x(z, y)$  und  $y = y(z, x)$  gilt. Man zeige, daß dann  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$  gilt.
16. Unter der Annahme, daß  $F_1(x, y, z) = 0$  und  $F_2(x, y, z) = 0$  zwei Funktionen  $y(x)$  und  $z(x)$  definieren, berechne  $y'$  und  $z'$ .
17. Sei  $F(x, y, z) = xz + \sin(xy) + \cos(xz) - 1$ . Untersuche, welche Variablen sich in einer Umgebung von  $(0, 1, 1)$  durch die anderen beiden ausdrücken lassen und berechne alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.
18. Sei  $F_1(x, y, z) = e^x y + \sin xz + \log(1+z) - 2 = 0$  und  $F_2(x, y, z) = \sin(x^2 y) + y^2 + z^5 - 4 = 0$ . Welche zwei Variablen lassen sich in einer Umgebung des Punktes  $(0, 2, 0)$  durch die dritte ausdrücken? Berechne die Ableitungen dieser Funktionen.
19. Besitzen die Gleichungen  $t^2 + x^3 + y^3 + z^3 = 0$ ,  $t + x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ,  $t + x + y + z = 0$  eine differenzierbare Lösung  $x(t), y(t), z(t)$  in einer Umgebung des Punktes  $(t, x, y, z) = (0, -1, 1, 0)$ ?
20. Bestimme die Ableitung  $y'(x)$  und  $y''(x)$ , wenn  $y(x)$  durch die Gleichung  $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$  definiert ist. In welchen Punkten ist  $y(x)$  nicht definiert?
21. Sei  $z = z(x, y)$  definiert durch  $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ . Wo ist  $z$  nicht definiert? Berechne das Differential  $Dz$ .
22. Bestimme das Minimum von  $f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ , wobei  $p > 0$ ,  $q > 0$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt unter der Bedingung, daß  $g(x, y) = xy - 1 = 0$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ , erfüllt ist.

Man leite daraus die Höldersche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n u_i^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n v_i^q}$$

für  $u_i \geq 0, v_i \geq 0$  ab.

23. Bestimme das Minimum von  $x + y$  unter der Nebenbedingung  $x^k + y^k = 1$ ,  $x \geq 0, y \geq 0$ ,  $k \in \mathbf{N}$ .
24. Mit Hilfe der Lagrangeschen Regel bestimme den kleinsten Abstand der Geraden  $ax + by = c$  vom Nullpunkt.

25. Berechne den kleinsten Abstand des Punktes  $(3, 12)$  von der Parabel  $y^2 = 6x$ .
26. Berechne das Maximum und Minimum von  $x^2 + y^2$  auf der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
27. Zeige, daß für jede symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $A = (a_{ik})$  das Maximum von  $f(x) = (Ax|x)$  auf  $|x| = 1$  in einem Punkt  $x$  angenommen wird, für den  $Ax = \lambda x$  erfüllt ist.
28. Berechne den minimalen Abstand der Ebene  $2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$ ,  $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -6$  vom Nullpunkt im  $\mathbf{R}^4$ .
29. Sei  $k \geq 2$  ganzzahlig. Man bestimme das Minimum von  $f(x, y) = x^k + y^k$  auf der Strecke  $x + y = a$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .
30. Sei  $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$ . Berechne das Minimum von  $f$  auf  $g(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = 0$ . Gilt  $Df = \lambda Dg$  im Minimum?
31. Berechne  $\frac{dy}{dx}$ , wobei
- $$x^2y + x^3y^4 = 1;$$
- $$(x+y)/(\sqrt{x^2+y^2}) = 2;$$
- $$\ln(x^2 + xy) = 1.$$
32. Für
- $$x = r \cos \theta \text{ bzw. } y = r \sin \theta,$$
- berechne  $\frac{\partial r}{\partial x}$  usw.
33. Minimiere
- $$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$
- mit Nebenbedingung
- $$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4.$$
34. Bestimme die Extrema von  $f$  mit entsprechenden Nebenbedingungen:
- $$f(x, y) = x^3 - xy^2, x^2 + y^2 = 1;$$
- $$f(x, y) = x^2 + y^2, x^3 - xy^2 = 1;$$
- $$f(x, y) = 2x + 3y, x^2 - 2xy + 2y^2 = 1;$$
- $$f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2, 3x - y + 2z = 14;$$
- $$f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2, (x-y)^2 = 1, xyz = 1.$$
35. Bestimme den Punkt auf  $x^2 - xy + y^2 = 1$  mit kleinstem Abstand zu 0.
36. Bestimme Punkte auf  $y^2 = 1 + x^2$  und  $2y = x$  mit kleinstem Abstand.
37. Es gelte:  $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 2$ . Berechne  $\partial^2 y / \partial x \partial z$ .

38. Sei  $f$  glatt mit  $\partial f/\partial z \neq 0$ .  $z$  sei bestimmt durch die Gleichung:  $f(x, y, z) = 0$ . Zeige:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}.$$

Berechne  $\partial^2 z/\partial x \partial y$ .

## 6 Vektoranalysis

### Differentialformen:

Eine Funktion von  $\mathbf{R}^n$  in  $\mathbf{R}^n$  ist die mathematische Realisierung eines Vektorfeldes. Wir können dies natürlich verallgemeinern, indem wir Funktionen auf  $\mathbf{R}^n$  mit Werten in einem (abstrakten) Vektorraum  $V$  betrachten. Falls  $V$   $m$ -dimensional ist und  $(e_1, \dots, e_m)$  eine Basis dafür, dann ist jede solche Funktion durch ein  $m$ -Tupel  $(f_1, \dots, f_m)$  von reellwertigen Funktionen darstellbar, wobei

$$f = f_1 e_1 + \dots + f_m e_m.$$

Wir werden den Fall untersuchen, wo  $V$  ein Raum von alternierenden Formen ist (siehe Vorlesung "Lineare Algebra"). In diesem Fall verwendet man folgende Basen:

**1-Formen:** Man bezeichnet die Basis mit  $(dx_1, \dots, dx_n)$ . Eine allgemeine 1-Form hat damit die Gestalt:

$$\omega = a_1(x) dx_1 + \dots + a_n(x) dx_n.$$

(vgl. oben—Kap. 2)

(Konkret: Für  $n = 2$  hat die typische 1-Form die Gestalt:  $\omega = a dx + b dy$ ;

$n = 3$ :  $\omega = a dx + b dy + c dz$ .)

Bemerkung: Die Koeffizienten  $a, b$  usw. sind glatte Funktionen).

**2-Formen:** Die Basis ist  $\{dx_i dx_j : 1 \leq i < j \leq n\}$ . (also insgesamt  $\binom{n}{2}$ ).

(Konkret: Für  $n = 2$ :  $\omega = a dx dy$ .)

$n = 3$ :  $\omega = a dy dz + b dz dx + c dx dy$ .)

Die allgemeine Situation ist wie folgt: Eine  $k$ -**Differentialform** auf  $U \subset \mathbf{R}^n$  ist ein Ausdruck der Gestalt

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \dots dx_{i_k}.$$

(N.B. In diesem Fall hat die Basis  $\binom{n}{k}$  Elemente).

**Operationen mit Differentialformen:** Man kann

- zwei  $k$ -Formen auf  $\mathbf{R}^n$  addieren (man summiert einfach die entsprechenden Koeffizienten);
- eine  $k$ -Form mit einer  $l$ -Form multiplizieren (das Ergebnis ist dann eine  $k+l$ -Form). Man multipliziert wie mit Zahlen, in dem man folgende Rechenregel beachtet:

$$dx_i dx_j = -dx_j dx_i \text{ und daher } dx_i dx_i = 0.$$

- eine  $k$ -Form differenzieren (das Ergebnis ist ein  $k+1$ -Form): Dazu genügen folgende Rechenregeln:

Falls  $\omega$  eine Funktion  $f$  ist, dann ist das Differential  $df$  wie folgt definiert:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

(Bemerkung: Man betrachtet glatte Funktionen als 0-Formen).

Falls

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \dots dx_{i_k},$$

dann gilt:

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} da_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \dots dx_{i_k}.$$

BEISPIELE.

I. Für  $\omega = a dx + b dy$  gilt:

$$d\omega = \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy.$$

II. Für  $\omega = a dx + b dy + c dz$ , gilt

$$d\omega = \left( \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy.$$

III. Für

$$\omega = a dy dz + b dz dx + c dx dy,$$

gilt:

$$d\omega = \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

d) Man kann eine  $k$ -Form

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dy_{i_1} \dots dy_{i_k}$$

auf  $\mathbf{R}^n$  mit einer glatten Funktion  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  von  $\mathbf{R}^m$  in  $\mathbf{R}^n$  zusammensetzen.

Rechenregel: Man ersetzt  $dy_i$  in  $\omega$  durch

$$d\phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_m} dx_m.$$

**Satz 6.1** Sei  $\omega$  eine  $k$ -Form,  $\omega_1$  eine  $l$ -Form. Es gilt dann:

$$d^2\omega = 0;$$

$$d(\omega \cdot \omega_1) = (d\omega) \cdot \omega_1 + (-1)^{kl} \omega \cdot (d\omega_1);$$

$$d(\omega \circ \phi) = (d\omega \circ \phi), \text{ wobei } \phi \text{ eine geeignete glatte Funktion ist.}$$

e) Integration von  $k$ -Formen entlang  $k$ -Würfeln: Sei  $c : I^k \rightarrow U$ , ( $U$  offen in  $\mathbf{R}^n$ ) ein  $k$ -Würfel. Falls  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $U$  ist, dann ist  $\omega \circ c$  eine  $k$ -Form auf  $\mathbf{R}^k$  und hat damit die Gestalt

$$a(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k,$$

wobei  $a$  eine glatte Funktion ist. Wir definieren

$$\int_c \omega = \int_{I^k} a(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

**Satz 6.2 Integralsatz von Stokes.** Sei  $c$  ein  $k$ -Würfel in  $U$ ,  $\omega$  eine  $(k-1)$ -Form auf  $U$ .

Dann gilt:

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$



BEWEIS. Siehe Vorlesung "Differentialgeometrie".

Wir bringen einige Sonderfälle dieses Satzes:

**Satz 6.3 Satz von Green.** Sei  $\omega = P dx + Q dy$  eine 1-Form auf  $U \subset \mathbf{R}^2$ ,  $c$  ein 2-Würfel in  $U$ . Dann gilt:

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy.$$

BEISPIEL. **Unabhängigkeit vom Weg.** Sei  $\omega$  eine 1-Form auf  $U$  mit  $d\omega = 0$ . (Dies gilt insbesondere wenn  $\omega$  die Gestalt  $df$  hat, wobei  $f$  eine glatte Funktion ist). Dann gilt  $\int_c \omega = 0$ , falls  $c$  eine geschlossene Kurve ist und der Rand eines 2-Würfels in  $U$ .

**Definition 6.4 Flächen.** Eine **parametrisierte Fläche** in  $\mathbf{R}^3$  ist eine stetig-differenzierbare Funktion  $\phi$  von einer offenen Teilmenge  $U$  von  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}^3$ .

BEISPIEL.

I. Eine Abbildung der Gestalt:

$$\phi(u, v) = x_0 + u.x_1 + v.x_2,$$

wobei  $x_0 \in \mathbf{R}^3$  und  $x_1, x_2$  zwei linear unabhängige Vektoren aus  $\mathbf{R}^3$  sind, ist eine **parametrisierte Ebene**.

II. Die Abbildung

$$\phi : (u, v) \mapsto (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

ist die Parametrisierung der Einheitssphäre.

Eine parametrisierte Fläche  $\phi$  ist **regulär** oder **glatt**, falls die Jacobi Matrix von  $\phi$  immer Rang 2 hat. Dann sind die zwei Vektoren  $\phi_1 = D_1\phi$  und  $\phi_2 = D_2\phi$  linear unabhängig. Wir definieren den **Normalvektor**  $\mathbf{N}(u, v)$  zur Fläche für die Parameterwerte  $(u, v)$  als

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\phi_1(u, v) \times \phi_2(u, v)}{\|\phi_1(u, v) \times \phi_2(u, v)\|}.$$

BEISPIEL. Es gilt folgende Formel für  $\phi_1 \times \phi_2$ :

$$\left( \frac{\partial(\phi^2, \phi^3)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\phi^3, \phi^1)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\phi^1, \phi^2)}{\partial(u, v)} \right),$$

wobei  $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$  d.h.  $\phi^1$  usw. sind die Koordinaten von  $\phi$  (nicht mit den partiellen Ableitungen  $\phi_1$  usw. zu verwechseln).  $\left( \frac{\partial(\phi^2, \phi^3)}{\partial(u, v)} \right)$  etwa bezeichnet die Determinante der Jacobi-Matrix der Funktion

$$(u, v) \mapsto (\phi^2(u, v), \phi^3(u, v)).$$

Die Ebene

$$\{x : (\mathbf{N}|x) = (\mathbf{N}|p)\}$$

ist dann die **Tangentialebene** zu  $S$  an der Stelle  $p$ .

Falls  $S$  implizit gegeben wird,

$$S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$$

dann ist

$$\mathbf{N} = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}.$$

Die 2-Form

$$dF = \mathbf{N}_1 dydz + \mathbf{N}_2 dzdx + \mathbf{N}_3 dxdy$$

nennt man das **Flächenelement** der Fläche. (Bemerkung: Da man einen 2-Würfel  $c$  als parametrisierte Fläche betrachten kann, sind diese Definitionen auch für solche Würfel gültig).

**Flächenintegrale der 2.ten Art.** Sei  $S$  eine Fläche mit Parametrisierung  $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Wir definieren den Flächeninhalt  $A$  von  $S$  wie folgt:

$$A = \iint_U \|\phi_1(u, v) \times \phi_2(u, v)\| \, dudv.$$

Allgemeiner, definieren wir für ein Skalarfeld  $f$  auf einer Teilmenge  $V$  von  $\mathbf{R}^3$ , mit  $\phi(U) \subset V$

$$\int_S f \, dS = \iint_U f(\phi(u, v)) \|\phi_1(u, v) \times \phi_2(u, v)\| \, dudv.$$

**BEMERKUNG.** Verwenden wir die Formel

$$(x \times y | x \times y) = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x|y)^2$$

aus der Vorlesung "Lineare Algebra", so bekommen wir die Gleichung

$$A = \iint_U \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

wobei  $E = (\phi_1 | \phi_1)$ ,  $F = (\phi_1 | \phi_2)$ ,  $G = (\phi_2 | \phi_2)$ .

**BEISPIEL.** Sei  $\phi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$  ( $u^2 + v^2 \leq 1$ ) die Halbkugel in  $\mathbf{R}^3$ . Dann ist das Flächenintegral

$$\begin{aligned} \int_S dS &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \|(1, 0, -u(1-u^2-v^2)^{\frac{1}{2}}) \times (0, 1, -v(1-u^2-v^2)^{\frac{1}{2}})\| \, dudv \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \frac{1+u^2+v^2+1-u^2-v^2}{(1-u^2-v^2)} \, dudv \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (1-u^2-v^2)^{-1} \, dudv \end{aligned}$$

**Flächenintegrale 1.ter Art:** Sei  $S$  wie oben,  $\mathbf{F}$  ein Vektorfeld auf  $S$ . Dann definieren wir das Flächenintegral 1. Art  $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  oder  $\int (\mathbf{F} | \mathbf{N}) dS$  als

$$\iint_U (\mathbf{F} \circ \phi | \phi_1 \times \phi_2(u, v)) \, dudv.$$

Dies ist genau das Integral  $\int_S \omega$ , wobei  $\omega = F_1 dx_2 dx_3 + F_2 dx_3 dx_1 + F_3 dx_1 dx_2$  d.h.

$$\int_S (F_1 dx_2 dx_3 + F_2 dx_3 dx_1 + F_3 dx_1 dx_2).$$

Für eine Masse, die über eine Fläche  $F$  verteilt ist, gilt:

$$\begin{aligned} T_x &= \iint_F x \rho(x, y, z) dS \\ T_y &= \iint_F y \rho(x, y, z) dS \\ T_z &= \iint_F z \rho(x, y, z) dS \end{aligned}$$

bzw. eine Masse, die über einer Raumkurve  $C$  verteilt ist, gilt:

$$\begin{aligned} T_x &= \int_C x \rho(x, y, z) ds \\ T_y &= \int_C y \rho(x, y, z) ds \\ T_z &= \int_C z \rho(x, y, z) ds. \end{aligned}$$

BEISPIEL. Berechne die Oberfläche der Halbkugel

$$z = f(x, y) = \sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}.$$

Da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}}$$

gilt:

Oberfläche

$$\begin{aligned} &= R \int_{0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}} \\ &= R \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{(R^2 - r^2)}} = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

**Definition 6.5** Sei  $f$  eine Skalarfeld, d.h. eine glatte Abbildung von  $U$  in  $\mathbf{R}$ . Dann schreiben wir jetzt  $\nabla f$  für das Gradientenfeld. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \nabla(f + g) &= \nabla f + \nabla g; \\ \nabla(f \cdot g) &= f \cdot \nabla g + \nabla f \cdot g; \\ \nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{(g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g)}{g^2}. \end{aligned}$$

**Die Rotation eines Vektorfeldes:** Sei  $f = (f_1, f_2, f_3)$  ein Vektorfeld in  $\mathbf{R}^3$ . Wir betrachten  $d\omega$ , wobei  $\omega$  die 1-Form  $f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$  ist.  $df$  ist auch ein Vektorfeld als 2-Form. Wir bezeichnen dieses Feld mit  $\text{curl } f$  (oder  $\text{rot } f$ ). Man sieht leicht (siehe oben), daß

$$\text{curl } f = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1).$$

Manche Verfasser schreiben  $\nabla \times f$  für  $\text{curl } f$ .

Man kann die Rotation  $\text{curl } f$  als die formale Determinante

$$\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}$$

schreiben, wobei  $e_1, e_2, e_3$  die kanonische Basis für  $\mathbf{R}^3$  ist.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{curl}(f + g) &= \text{curl } f + \text{curl } g; \\ \text{curl}(\phi \cdot f) &= \phi \cdot \text{curl } f + \nabla \phi \times f. \end{aligned}$$

(In der zweiten Gleichung ist  $\phi$  ein Skalarfeld).

Das Feld  $f$  heißt **rotationsfrei**, falls  $\text{curl } f = 0$ . Ein Gradientenfeld  $\text{grad } \phi$  ist immer rotationsfrei (dies folgt aus der Beziehung  $d^2 = 0$ ).

**Die Divergenz:** Falls  $f$  ein Vektorfeld ist, dann ist  $\text{div } f$  das Skalarfeld

$$D_1 f_1 + \dots + D_n f_n.$$

Dies wird manchmal als  $(\nabla | f)$  geschrieben. (vgl.  $d\omega$ , wobei

$$\omega = f_1 dx_2 \dots dx_n + \dots)$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \text{div}(f + g) &= \text{div } f + \text{div } g; \\ \text{div}(\phi \cdot f) &= \phi \cdot \text{div } f + (\nabla \phi | f). \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\text{div}(\text{curl } f) = 0$$

für jedes Vektorfeld  $f$ .

**Definition 6.6 Der Laplacesche Operator:** Dies ist der Operator

$$\Delta : f \mapsto \text{div}(\nabla \phi),$$

der für Skalarfelder  $\phi$  definiert ist. (Manchmal schreibt man  $\nabla^2$  für den Laplaceschen Operator).

Mit Hilfe der obigen Begriffe kann man folgende wichtige klassische Versionen des allgemeinen Satzes von Stokes ableiten:

**Satz 6.7 Der Satz von Stokes.** Sei  $c$  ein 2-Würfel in  $\mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{F}$  ein Vektorfeld auf einer offenen Menge  $U$ , die das Bild  $S$  von  $c$  enthält. Dann gilt:

$$\int_S (\text{curl } \mathbf{F} | \mathbf{N}) ds = \int_{\partial c} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3.$$

(Der Satz von Green ist der Spezialfall, wo der Würfel  $c$  in  $\mathbf{R}^2$  liegt.)

**Satz 6.8 Integralsatz von Gauß.** Sei  $c$  ein 3-Würfel in  $U \subset \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  ein Vektorfeld auf  $U$ . Dann gilt:

$$\int_c \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \int_{\partial c} (\mathbf{F} | \mathbf{N}) \, dS.$$

Dieser Satz wird oft wie folgt formuliert:

**Satz 6.9 Der Satz von Gauß.** Sei  $V$  ein Gebiet in  $\mathbf{R}^3$  mit der Fläche  $S$  als Rand.  $\mathbf{F}$  ein Vektorfeld auf  $V$ . Dann gilt:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

## Aufgaben

1. Berechne  $\int_c y \, ds$ , wobei  $c$  die Kurve  $y = \sqrt{x}$  von  $x = 2$  bis  $x = 6$  ist.

2. Berechne den Schwerpunkt der Kurve

$$\mathbf{x}(t) = (t, t^2, 1) \quad (1 \leq t \leq 3)$$

mit Dichte  $\rho(x, y, z) = \frac{yz}{x}$ .

3. Integriere  $xy^2 dx + y dx$  entlang folgender Kurven von  $(0, 0)$  nach  $(1, 1)$ :

der Geraden von  $(0, 0)$  nach  $(1, 1)$ ;

der Kurve  $y = x^2$ ;

der Kurve  $x = y^2$ .

4. Berechne  $\int_c (x^2 - 2xy + y^2) \, ds$ , wobei  $c$  die Kurve  $(2 \cos t, 2 \sin t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) ist.

5. Berechne  $\int_T (y + z) dy dz + (x + z) dz dx + (x - y) dx dy$ , wobei  $T$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $(1, 2, -1)$ ,  $(3, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$  ist.

6. Betrachte folgende Parametrisierung der  $n$ -Sphäre:

$$x_1 = r \cos \theta \cos \phi_1 \dots \cos \phi_{n-2}$$

$$x_2 = r \sin \theta \cos \phi_1 \dots \cos \phi_{n-2}$$

$$x_3 = r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \dots \cos \phi_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = r \sin \phi_{n-3} \dots \cos \phi_{n-2}$$

$$x_n = r \sin \phi_{n-2}.$$

(Dies für  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi_i \leq \frac{\pi}{2}$ ). Berechne die Jacobi-Funktion dieser Transformation und damit das Integral

$$\int_B dx_1 \dots dx_n$$

wobei  $B$  die Einheitskugel in  $\mathbf{R}^n$  ist.

7. Berechne

$$\int_S xdydz - zdzdx - dxdy,$$

bzw.

$$\int_S y^2 dydz + 2dzdx - dxdy,$$

wobei

$S$  die obere Halbsphäre ist;

$S$  die untere Halbsphäre ist;

$S$  der Kegel  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = 3 - 3r, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;

$S$  ist der Paraboloid  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = -3 + 3r^2, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

8. Sei  $S$  die Fläche  $\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in R\}$ . Zeige:

$$\int_S dS = \int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

9. Sei  $S$  die Fläche  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = f(r, \theta) \quad (r, \theta) \in R$ . Zeige:

$$\int_S dS = \int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + r^{-2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2} r dr d\theta.$$

10. Berechne die Oberfläche des Torus

$$x = (a + b \cos \theta) \sin \phi, y = (a + b \cos \theta) \cos \phi, z = b \sin \theta,$$

wobei  $0 < b < a$ .

11. Berechne  $\omega \circ c$ , wobei

$$\omega = 4dx - dy + 3dz$$

und

$$c(t) = (2, 5, -3) + t(-3, 2, 7).$$

12. Berechne die 1-Form  $d\left(\frac{1}{r}\right)$ .

13. Berechne  $\omega \circ \phi$ , wobei

$$\omega = 2dydz - dzdx + 3dxdy$$

und  $\phi$  die natürliche affine Abbildung von

$$U = [(0, 0), (1, 0), (0, 1)] \text{ nach } [(0, 1, -2), (3, 1, 0), (-2, 2, 1)].$$

14. Sei

$$\begin{aligned} x &= u^2 + v^2 + w^2 \\ y &= uv + uw + vw \\ z &= uvw. \end{aligned}$$

Berechne  $dx, dy, dz$  und benütze die Cramersche Regel, um  $du, dv, dw$  und damit  $\frac{\partial u}{\partial x}$  usw. zu berechnen.

15. Beweise folgende Identitäten:

$$\int_{\partial c} uv \, dx + uv \, dy = \int_c \left\{ v \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} dx dy;$$

$$\frac{1}{2} \int_{\partial c} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int_c \left( u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$$

16. Zeige:

$$\int_{\partial c} v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_c (v \nabla^2 u + (\nabla u | \nabla v)) dx dy;$$

$$\int_{\partial c} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \int_c (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dx dy.$$

17. Sei eine geschlossene Kurve der Rand  $\partial c$  eines 2-Würfels. Zeige: Der von der Kurve eingeschlossene Flächeninhalt ist  $A = \frac{1}{2} \int_{\partial c} (x dy - y dx) = \int_{\partial c} x dy$ .

18. Berechne den Flächeninhalt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bzw. des Asteroids

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

mit Hilfe von Kurvenintegralen.

19. Beweise die Formel:

$$\int_c (\text{grad } f | \text{grad } g) dx dy dz + \int_c f \Delta g dx dy = \int_{\partial c} f (\text{grad } g | \mathbf{N}) dS;$$

bzw.

$$\int_c (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz = \int_{\partial c} (f \text{ grad } g | \mathbf{N}) - (g \text{ grad } f | \mathbf{N}) dS.$$

20. Berechne den Schwerpunkt des Halbkreises  $x^2 + y^2 \leq r^2 \quad x \geq 0$ .

21. Berechne die Oberfläche der Kugel mit Radius  $R$ .

## 7 Anhang

### 7.1 Übungsaufgaben mit Lösungsvorschlägen

#### 7.1.1 Übungsaufgaben

$x = (\xi, \eta, \zeta)$  ist ein Vektor (eventuell von einer oder mehreren Variablen abhängig).  
 $(x|y)$  ist das Skalarprodukt,  $x^2 = (x|x)$  (Skalarprodukt von  $x$  mit sich selbst),  $|x| = \sqrt{(x|x)}$   
 (euklidische Länge),  $x \times y$  ist das Vektorprodukt,  $[x, y, z]$  das Spaltprodukt ( $= (x|y \times z)$ ).  
 $\dot{x}$  ist der (komponentenweise) differenzierte Vektor.

1. Berechne  $(\dot{x} + \ddot{x})^2$ ,  $(\dot{x}|x)$ ,  $[\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}]$ , wobei  $x(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ .

2. Berechne  $\frac{d}{dt}(x|y)$ ,  $\frac{d}{dt}(x \times y)$ , wobei  $x(t) = (t, -t^2, t^3)$ ,  $y(t) = (\sin t, \cos t, 0)$ .

3. Berechne  $\frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ ,  $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ ,  $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v}$ , wobei

$$x(u, v) = (e^{uv}, 2u - v, v \sin u).$$

4. Berechne  $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$ , wobei

$$x(u, v) = (uv, uv, -v^3), \quad y(u, v) = (u^3, u + v, v^3).$$

5. Berechne  $\dot{c}$ ,  $\ddot{c}$ ,  $\ddot{\ddot{c}}$ ,  $|\dot{c}|$ ,  $|\dot{c} \times \ddot{c}|$ ,  $[\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}}]$ ,  $\kappa = \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3}$ ,  $\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}}]}{|\dot{c} \times \ddot{c}|^2}$ , wobei

$$c(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3(1 + t^2)).$$

6. Das gleiche für  $c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ .

7. Berechne  $\mathbf{N}(u, v) = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{|\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}|}$ , wobei  $\phi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$ .

8. Berechne  $E, F, G, L, M, N$  für  $\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ , wobei

$$E = \left( \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right), \quad F = \left( \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right), \quad G = \left( \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)$$

$$L = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right] / \left| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right|$$

$$M = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \right] / \left| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right|$$

$$N = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right] / \left| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right|$$

9. Das gleiche für  $\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$ , ( $f$  eine beliebige,  $2 \times$  differenzierbare Funktion einer Variablen).



10. Bestimme die kartesische Darstellung der parametrisierten Kurven:

a)  $x = 3t^2, y = 2 + 5t$

b)  $x = \sqrt{t}, y = 1 - t$

c)  $x = e^t, y = e^{-t}$ .

11. Seien  $x, y$  glatte vektorwertige Funktionen. Zeige:

$$\frac{d}{dt}(x|y) = (\dot{x}|y) + (x|\dot{y})$$

$$\left( \frac{d}{dt}(x \times y) = ?, \quad \frac{d}{dt}[x, y, z] = ? \right).$$

12. Sei  $x$  eine vektorwertige Funktion, mit  $\|x\| = 1$ . Zeige  $\dot{x} \perp x$ .

13. Berechne die Bogenlänge der Kurven

$$c(t) = (1 - \cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

$$(c(t) = (t, t \sin t, t \cos t), \quad t \in [0, \pi]).$$

14. Berechne den Geschwindigkeitsvektor und die Geschwindigkeit des Teilchens mit Bahn

$$x = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

15. Berechne

$$\int_c yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz,$$

wobei  $c$  die Gerade von  $(b, 0, 0)$  nach  $(b, 0, 2\pi g)$  ist.

16. Berechne

$$\int_c yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz,$$

wobei  $c$  die Kurve  $c(t) = (b \cos t, b \sin t, gt)$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ) ist.

17. Zeige:  $x \times (y \times z) = (z|x)y - (x|y)z$ .

18. Zeige:  $(x \times y) \times (z \times w) = [w, x, y]z - [x, y, z]w$ .

19. Zeige:  $x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0$ .

20. Berechne:  $\text{grad } f$  wobei  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ .

21. Zeige:  $\text{grad}(fg) = (\text{grad } f)g + f(\text{grad } g)$ .

$$\left( \text{grad} \left( \frac{f}{g} \right) = ? \right).$$

22. Berechne:  $\text{div } f$ , wobei  $f(x) = \frac{x}{r^n}$  mit  $r = \|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$ .

(Bemerkung:  $x$  ist ein  $n$ -Vektor.)

23. Berechne:  $\operatorname{div} f$ ,  $\operatorname{div} g$ ,  $\operatorname{div} f \times g$ ,  $\operatorname{grad} (f|g)$ , wobei

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2), \quad g(x, y, z) = (yz, zx, xy).$$

( $x, y, z$  sind Koordinaten in  $\mathbf{R}^3$ .)

24. Berechne:  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right)$ ,  $\Delta(r^2)$ ,  $\Delta f(r)$

$$(r = \|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}).$$

25. Zeige:  $\operatorname{div} (f \times g) = (g | \operatorname{curl} f) - (f | \operatorname{curl} g)$ .

(Notation:  $\operatorname{curl} f$  (englisch)  $\equiv$   $\operatorname{rot} f$  (deutsch).)

26. Betrachte die Funktion  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  ( $(x, y) \neq 0$ ).

Berechne:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y),$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y).$$

Existiert  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ?

27. Berechne die Jacobi-Matrix von

a)  $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2x)$

b)  $g(x, y, z) = (xe^x, -ye^z)$ .

28. Für  $f(u, v) = (\tan(u - 1) - e^u, u^2 - v^2)$ ,  $g(x, y) = (e^{x-y}, x - y)$ , berechne  $f \circ g$  und  $D(f \circ g)(1, 1)$ .

29. Berechne die Änderungsrate der Temperatur eines Teilchens mit Bahn  $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$  im Temperaturfeld:  $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

30. Sei  $F(x, y) = f(x + g(y))$ , wobei  $f, g$  Funktionen einer Variablen sind. Zeige:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)$$

(andere Schreibweise  $(D_1, F)(D_{1,2}, F) = D_2 F(D_{1,1} F)$ ).

31. Verifiziere die Kettenregel für

$$f(x, y) = x \exp(x^2 + y^2), \quad g(t) = (e^t, e^{-t})$$

$$(f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad g(t) = (t, -t)).$$

32. Sei  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  differenzierbar. Berechne  $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \phi}$ , wobei

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \phi.$$

(Genauer:  $\frac{\partial}{\partial \rho} f \circ g$  usw., wobei  $g : (\rho, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z)$ .)

33. Berechne die Bogenlänge der Kurve

$$c(t) = (2t, t^2, \ln t)$$

zwischen  $(2, 1, 0)$  und  $(4, 4, \ln 2)$ . ( $(t, t \sin t, t \cos t)$  zwischen  $(0, 0, 0)$  und  $(\pi, 0, -\pi)$ .)

34. Berechne die Taylorformel zweiter Ordnung von  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$  an der Stelle  $(0, 0)$

$$\begin{aligned} (f(x, y) = e^{x+y}, \quad f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cos xy, \\ f(x, y) = \sin + y \cos xy, \quad f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos y). \end{aligned}$$

35. Für

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2y, xy, xy^2) \\ g(r, s, t) &= (r^2 - s^2, r^2 - t^2) \end{aligned}$$

berechne  $J_f, J_g, J_{f \circ g}, J_f \cdot J_g$ .

36. Sei  $F(x, y, z) = \left( \frac{x}{1+x+y+z}, \frac{y}{1+x+y+z}, \frac{z}{1+x+y+z} \right)$  (definiert für  $x+y+z \neq -1$ ). Berechne explizit  $f^{-1}$  und vergleiche  $J_f$  und  $J_{f^{-1}}$ .

37. Bestimme  $\kappa, \tau, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$  für die Kurve

$$c(t) = (\ln \cos t, \ln \sin t, \sqrt{2}t)$$

$$(c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).)$$

38. Bestimme eine Formel für  $\tau$  und  $\kappa$  für eine Kurve der Gestalt

$$y = f(x), \quad z = g(x).$$

(Benutze die Parametrisierung

$$c(t) = (t, f(t), g(t).)$$

39. Sei  $v(x, y) = x \ln(x+r) - r$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Zeige  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{x+r}$ .

40. Berechne die Taylorformel der Funktion

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{4} - yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4$$

an der Stelle  $(1, 2)$  und berechne damit einen angenäherten Wert für  $f(1.02, 2.03)$ .

41. Sei  $f$  eine homogene Funktion vom Grad  $k$  in  $x, y, z$  (d.h.  $f$  hat die Gestalt  $x^k F\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$ ). Zeige:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = kf.$$

42. Sei  $X = ax + by$ ,  $Y = cx + dy$

mit  $ad - bc \neq 0$ . Zeige:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = X \frac{\partial f}{\partial X} + Y \frac{\partial f}{\partial Y}.$$

43. Sei  $z = \arctan \frac{y}{x}$ . Zeige  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

44. Bestimme die Taylorreihe der Funktion

$$\ln(1-x) \ln(1-y).$$

45. Bestimme die stationären Stellen der Funktion

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

$$(z = e^{2x}(x + y^2 + 2y), z = xy(a - x - y), z = \frac{a + bx + cy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}).$$

46. Zeige:  $\Delta(f \circ \phi) = f' \Delta \phi + f'' |\text{grad } \phi|^2$

$$(\Delta(f \cdot g) = f(\Delta g) + (\Delta f) \cdot g + 2(\text{grad } f | \text{grad } g)).$$

47. Bestimme  $\text{grad } f$ ,  $\text{div } F$  und  $\text{rot } F$  in Polarkoordinaten

( $f$  ist ein Skalarfeld,  $F$  ein Vektorfeld in 2 Dimensionen).

48. Zeige:  $\text{rot grad } f = 0$  ( $f$  ein 3-dimensionales Skalarfeld).

49. Zeige:  $\text{div rot } F = 0$  ( $F$  ein 3-dimensionales Vektorfeld).

50.  $\Delta F = \text{grad}(\text{div } F) - \text{rot rot } F$  ( $F$  ein 3-dimensionales Vektorfeld).

51. Sei  $f$  eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2(y - y^2) \frac{\partial f}{\partial y} + x^2 y^2 = 0.$$

Bestimme die Gleichung für  $f$  als Funktion von  $u, v$  mit  $u = xy$ ,  $v = \frac{1}{y}$ .

52. Zeige:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right].$$

(Verwende die Substitution  $x = r_1 \cos \theta$ ,  $y = r_1 \sin \theta$ , bzw.  $z = r \cos \phi$ ,  $r_1 = r \sin \phi$  und das Ergebnis für Polarkoordinaten.)

53. Untersuche die Extremalwerte von

$$z = x^2 y + y x^2 - x \quad (z = x^3 + y^3 - x^2 y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)), \quad z = x^2 + y^2 + xy, \\ z = \frac{1}{3} y^3 - x y^2 + x^2 y - x, \quad z = x^3 + y^2 - 9xy + 27, \quad z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2).$$

Berechne folgende Integrale:

54.  $\int_R (x^2 + y^2) dx dy$ , wobei  $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$
55.  $\int_R x \sin y dx dy$ , wobei  $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x^2\}$
56.  $\int_R (xy + 2) dx dy$ , wobei  $R = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y^3\}$
57.  $\int_R x \cos y dx dy$ , wobei  $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \sin y\}$
58.  $\int_R xy dx dy$  wobei  $R$  das Dreieck mit Eckpunkten  $(1, 0)$ ,  $(2, 2)$  und  $(1, 2)$  ist.

59.  $\int_R e^{xy} dx dy$ , wobei  $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 + \frac{\log y}{y}, 2 \leq y \leq 3\}$

60. 
$$\int_R (x^3 + 2xy) dx dy,$$

wobei  $R$  das Parallelogramm mit den Eckpunkten  $(1, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 6)$  und  $(2, 5)$  ist.

61. Was ist die Entfernung von  $P = (1, 2, 1.5)$  zur Kurve  $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$  bzw. der nächst gelegene Punkt  $Q$  auf der Kurve zu  $P$ ?

(Zeige:  $PQ$  ist normal zu  $c$ .)

(Sei  $P = (x_0, y_0, z_0)$  ein Punkt in  $\mathbf{R}^3$ ,  $c$  eine Kurve mit  $P \notin c$ . Sei  $Q$  der nächst gelegene Punkt zu  $P$  auf  $c$ . Zeige  $PQ \perp c$ .)

62. Bestimme die Entfernung von  $(2, -2, 3)$  zu der Ebene

$$2x + 4y - 3z = 2.$$

63. Bestimme positive Zahlen  $x, y, z$  mit  $x + y + z = 100$ ,  $x \cdot y \cdot z = \text{maximum}$ .

Berechne

64.  $\int_U x dA$ , wobei  $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$ ;

65.  $\int_U xy dA$ , wobei  $U = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$ ;

66.  $\int_U \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , wobei  $U = \{1 \leq r \leq 1 + \sin \theta, \theta \in [0, \pi]\}$  in Polarkoordinaten (Skizze).

67. Berechne

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy \, dy \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x dy \, dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy \, dx.$$

(Hinweis: Polarkoordinaten.)

68. Skizziere den Integrationsbereich für  $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) \, dy \, dx$  und bestimme die Grenzen als iteriertes Integral der Gestalt:  $\int \int f(x, y) \, dx \, dy$ .

69. Berechne  $\int_D (x^2 \tan x + y^3 + 4) \, dA$ , wobei  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

(Hinweis: Benutze Symmetrie.)

70. Berechne  $\frac{dy}{dx}$ , wobei  $ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 = 0$ .

$$(x^4 + y^4 = 4a^2xy, \quad (\cos x)^y - (\sin y)^x = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad e^x + e^y = 2xy).$$

(Berechne dann  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .)

71. Berechne das Minimum von  $x - y + z$  mit Nebenbedingung  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .

$$(x \text{ mit } x^2 + 2y^2 = 3, \quad x + y + z \text{ mit } x^2 - y^2 = 1 \text{ und } 2x + z = 1.)$$

72. Zeige: in der Nähe des Punkts  $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$  lassen sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

für  $u$  und  $v$  als Funktionen von  $x$  und  $y$  eindeutig auflösen.

Berechne  $\frac{\partial u}{\partial x}$  an der Stelle  $(1, 1)$   $\left( \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \text{usw.} \right)$ .

73. Falls  $F(x, y) = 0$ , zeige:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}.$$

(Unter welcher Bedingung an  $F$  ist die Berechnung gültig?)

74. Bestimme die Krümmung der Kurve  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ . (Berechne  $y'$  und benutze die Formel

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ für eine Kurve der Gestalt } y = f(x).$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}).$$

75. Berechne  $y', y'', y'''$ , falls  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ .

76. Bestimme die singulären Punkte der Kurve  $x^3 + y^3 = 3axy$  ( $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ,  $x^4 + y^4 = 2(x - y)^2$ ,  $y^5 + 2xy^3 = x^3 + y^4$ ).

77. Maximiere  $\frac{a}{u \cos x} + \frac{b}{v \cos y}$  mit Nebenbedingung  $a \tan x + b \tan y = c$  ( $a, b, c, u, v$  sind Parameter).

78. Maximiere  $x^2 + y^2$  mit Nebenbedingung  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = f$ . (Interpretation?)
79. Bestimme den höchsten und niedrigsten Punkt auf der Kurve  $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ ,  $x + y + 2z = 0$   
 $\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad lx + my + nz = 0 \right)$ .
80. Sei  $c$  eine geschlossene Kurve. Der von  $c$  eingeschlossene Flächeninhalt kann als Kurvenintegral  $A = \frac{1}{2}(\int x dy - y dx)$  dargestellt werden. Bestimme die entsprechende Formel in Polarkoordinaten. Bestimme den Flächeninhalt, wenn  $c$  die Kurve  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  ist.
81. Sei  $f(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ . Bestimme die Menge aller Punkte  $(x, y, z)$ , in welchen  $Df$  nicht invertierbar ist.
82. Sei  $\varphi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ . In welchen Punkten ist  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus? Ist  $\varphi$  (global) invertierbar? Beschreibe  $\varphi$  in Polarkoordinaten.
83. Zeige, daß

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}, \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 2y + 1} \right)$$

einen Diffeomorphismus von  $U = \{(x, y) : y > 0\}$  auf den Kreis  $x^2 + y^2 < 1$  bildet.

84. Sei  $t \mapsto A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}$  eine differenzierbare Abbildung von  $\mathbf{R}^1$  in die Menge der invertierbaren  $2 \times 2$ -Matrizen. Berechne  $\frac{d}{dt}(A(t))^{-1}$  und allgemeiner  $\frac{d}{dt}(A(t))^n$  für  $n \in \mathbf{Z}$ .

(Sei  $t \mapsto (a_{ik}(t))$  eine differenzierbare Abbildung von  $\mathbf{R}^1$  in die Menge der invertierbaren  $s \times s$ -Matrizen. Berechne  $\frac{d}{dt}(A(t))^{-1}$  und allgemeiner  $\frac{d}{dt}(A(t))^n$  für  $n \in \mathbf{Z}$ .)

85. Sei  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$ . Man skizziere den Graphen von  $F$  und bestimme diejenigen Punkte, wo  $y$  als Funktion von  $x$  darstellbar ist. Man bestimme dort  $y'(x)$  und  $y''(x)$ .
86. Sei  $F(x, y) = y^3 + y - x^2 = 0$  und  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Ist  $y$  in einer Umgebung von  $x_0$  als Funktion von  $x$  darstellbar? Wenn ja, berechne man  $y'(x_0)$  und  $y''(x_0)$ .
87. Dasselbe für  $xy^2 + 3 \ln x - 4 = 0$  in Punkt  $(1, 2)$ .
88. Dasselbe für  $\sin x + 2 \cos y - \frac{1}{2} = 0$  im Punkt  $(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$ .
89. Für welche  $(x, y, z)$  läßt sich  $z$  als Funktion  $z = z(x, y)$  schreiben, wenn  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$  ist? Berechne dort  $z_x, z_y$  sowie  $z_{xx}, z_{xy}$  und  $z_{yy}$ .
90. Sei  $F(x, y, z) = 0$  so, daß nach dem Satz über implizite Funktionen sowohl  $z = z(x, y)$  als auch  $x = x(z, y)$  und  $y = y(z, x)$  gilt. Man zeige, daß dann  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$  gilt.

91. Berechne  $\iint_S yz \, dS$ , wobei  $S$  die Fläche mit der Parametrisierung

$$x = uv, \quad y = u + v, \quad z = u - v \quad (u^2 + v^2 \leq 1)$$

ist.

92. Berechne  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , wobei  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 1, z)$  und  $S$  die Fläche  $z = 9 - \frac{x^2 + y^2}{4}$  für  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 36$  sind.

93. Berechne  $\iint_S f \, dS$ , wobei  $f$  das Skalarfeld  $2y^2 + 2z^2$  und  $S$  der Zylinder  $y^2 + z^2 = 6$ ,  $0 \leq x \leq 4$  sind.

94.  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , wobei  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z, 4x, 5y)$  und  $c$  die Kurve  $c(t) = (\cos t, \sin t, 4)$  sind, (bzw.  $F(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$ ,  $c$  der Schnitt der Flächen  $\{x + y + z = 1\}$  und  $\{x^2 + y^2 = 9\}$ ).

95.  $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx \, dy$ .

96. Berechne  $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \, dx \, dy$ , wobei  $R$  das Trapezoid mit den Eckpunkten  $(1, 0), (0, 2), (0, 2), (0, 1)$  ist.

(Hinweis:  $u = x + y, v = x - y$ .)

97. Berechne  $\iint_R e^{x+y} \, dx \, dy$ , wobei  $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ .

(Hinweis:  $u = x + y, v = x - y$ .)

98. Berechne  $\iiint_U \, dx \, dy \, dz$ , wobei  $U$  das Ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  ist.

99. Sei  $\mathbf{F}$  das Vektorfeld  $(f(x), g(y), h(z))$ . Zeige:  $\text{curl } \mathbf{F} = 0$ .

100. Bestimme den Flächeninhalt der Fläche mit der Parametrisierung  $\phi(u, v) = (uv, u+v, u-v)$  für  $u^2 + v^2 \leq 1$

( $z = x^2 + y^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ).

101. Berechne  $\int_c y \, ds$ , wobei  $c$  die Kurve  $y = \sqrt{x}$  von  $x = 2$  bis  $x = 6$  ist.

102. Berechne den Schwerpunkt der Kurve  $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, 1)$  ( $1 \leq t \leq 3$ ) mit Dichte  $\rho(x, y, z) = \frac{yz}{x}$ .

103. Integriere  $xy^2 dx + y dy$  entlang folgender Kurven von  $(0, 0)$  nach  $(1, 1)$ :  
der Geraden von  $(0, 0)$  nach  $(1, 1)$ ; der Kurve  $y = x^2$ ; der Kurve  $x = y^2$ .

104. Berechne  $\int_c (x^2 - 2xy + y^2) \, ds$ , wobei  $c$  die Kurve  $(2 \cos t, 2 \sin t)$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) ist.

105. Berechne  $\int_T (y+z) dy dz + (x+z) dz dx + (x-y) dx dy$ , wobei  $T$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $(1, 2, -1), (3, 1, 0), (0, 1, 1)$  ist.



106. Betrachte folgende Parametrisierung der  $n$ -Sphäre:

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta \cos \phi_1 \dots \cos \phi_{n-2} \\x_2 &= r \sin \theta \cos \phi_1 \dots \cos \phi_{n-2} \\x_3 &= r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \dots \cos \phi_{n-2} \\&\vdots \\x_{n-1} &= r \sin \phi_{n-3} \cos \phi_{n-2} \\x_n &= r \sin \phi_{n-2}.\end{aligned}$$

(Dies für  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi_i \leq \frac{\pi}{2}$ ). Berechne die Jacobi-Funktion dieser Transformation und damit das Integral

$$|B_n| = \int_{B_n} dx_1 \dots dx_n \text{ wobei } B_n \text{ die Einheitskugel in } \mathbf{R}^n \text{ ist.}$$

Hinweis:  $|B_5| = \frac{8}{15}\pi^2, |B_6| = \frac{\pi^3}{6}$ .

107. Berechne

$$\int_S xdydz - zdzdx - dxdy, \text{ bzw. } \int_S y^2dydz + 2dzdx - dxdy,$$

wobei

$S$  die obere Halbsphäre ist;

$S$  die untere Halbsphäre ist;

$S$  der Kegel  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = 3 - 3r, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;

$S$  ist der Paraboloid  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = -3 + 3r^2, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

108. Sei  $S$  die Fläche  $\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in R\}$ . Zeige:

$$\int_S dS = \int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

109. Sei  $S$  die Fläche  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = f(r, \theta) \quad (r, \theta) \in R$ . Zeige:

$$\int_S dS = \int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + r^{-2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2} r dr d\theta.$$

110. Berechne die Oberfläche des Torus  $x = (a + b \cos \theta) \sin \phi, y = (a + b \cos \theta) \cos \phi, z = b \sin \theta$ , wobei  $0 < b < a$ .

111. Bestimme das Minimum von  $f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ , wobei  $p > 0, q > 0$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt unter der Bedingung, daß  $g(x, y) = xy - 1 = 0, x > 0, y > 0$ , erfüllt ist.

(Man leite daraus die Höldersche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n u_i^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n v_i^q} \text{ für } u_i \geq 0, v_i \geq 0 \text{ ab.)}$$

112. Bestimme das Minimum von  $x + y$  unter der Nebenbedingung  $x^k + y^k = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $k \in \mathbf{N}$ .)

(Mit Hilfe der Lagrangeschen Regel bestimme den kleinsten Abstand der Geraden  $ax + by = c$  vom Nullpunkt.)

(Berechne den kleinsten Abstand des Punktes  $(3, 12)$  von der Parabel  $y^2 = 6x$ .)

(Berechne das Maximum und Minimum von  $x^2 + y^2$  auf der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .)

113. Zeige, daß für jede symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $A = (a_{ik})$  das Maximum von  $f(x) = (Ax|x)$  auf  $|x| = 1$  in einem Punkt  $x$  angenommen wird, für den  $Ax = \lambda x$  erfüllt ist. (Hinweis: betrachte den Fall  $n = 2$ .)

114. Berechne die 1-Form  $d\left(\frac{1}{r}\right)$ .

115. Berechne  $\omega \circ \phi$ , wobei  $\omega = 2dydz - dzdx + 3dxdy$  und  $\phi$  die natürliche affine Abbildung von  $U = [(0, 0), (1, 0), (0, 1)]$  nach  $[(0, 1, -2), (3, 1, 0), (-2, 2, 1)]$ .

116. Sei

$$x = u^2 + v^2 + w^2$$

$$y = uv + uw + vw$$

$$z = uvw.$$

Berechne  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  und benütze die Cramersche Regel, um  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$  und damit  $\frac{\partial u}{\partial x}$  usw. zu berechnen.

117. Beweise folgende Identitäten:

$$\int_{\partial U} uv \, dx + uv \, dy = \int_U \left\{ v \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} dx dy;$$

$$\frac{1}{2} \int_{\partial U} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int_U \left( u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$$

118. Berechne den Flächeninhalt der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  bzw. des Asteroids  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  mit Hilfe von Kurvenintegralen.

119. Beweise die Formel:

$$\int_U (\text{grad } f | \text{grad } g) \, dx \, dy \, dz + \int_U f \Delta g \, dx \, dy = \int_{\partial U} f (\text{grad } g | \mathbf{N}) \, dS;$$

bzw.

$$\int_U (f \Delta g - g \Delta f) \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial U} (f \text{grad } g | \mathbf{N}) - (g \text{grad } f | \mathbf{N}) \, dS.$$

120. Berechne den Schwerpunkt des Halbkreises  $x^2 + y^2 \leq r^2$   $x \geq 0$ .

121. Berechne folgende Integrale:

$$\iint_U (x^2 + y^2) \, dx \, dy \text{ wobei } U \text{ das Gebiet zwischen } y = x^2, x = 2 \text{ und } y = 1 \text{ ist.}$$

122. Bestimme das Volumen des Durchschnittes der Zylinder

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ und } x^2 + z^2 = a^2.$$

123. Berechne

$$\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \text{ wobei } U \text{ das Gebiet zwischen } x + y + z = a, \quad x = 0, y = 0, z = 0 \text{ ist.}$$

124. Bestimme das Volumen und den Schwerpunkt des Gebietes, das vom parabolischen Zylinder  $z = 4 - x^2$  und den Ebenen  $x = 0, y = 0, z = 6$  und  $z = 0$  eingeschlossen wird.

125. Berechne

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x \sqrt{1 - y^2} dy dx.$$

$$(\text{Berechne } \int_1^2 \int_1^x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dx; \quad \int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{xy^{-1}}}{y^5} dy dx.)$$

126. Berechne den Flächeninhalt zwischen den Kurven  $y = 2x^2$  und  $x = 4y^2$ .

127. Berechne den Flächeninhalt, Gewicht und Schwerpunkt des Gebietes zwischen den Kurven  $x^2 - y^2 = 1$  und  $x = 4$  mit Dichte  $\rho(x, y) = x$ .

128. Berechne folgende Integrale:

$$\int_R (x + xz - y^2) dx dy dz, \quad \text{wobei } R = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 0, 3 \leq z \leq 5\};$$

$$\int_R (x + z) dx dy dz, \quad \text{wobei } R = \{(x, y, z) : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x + y + 2z \leq 3\}.$$

129. Berechne

$$\int_R xyz dx dy dz, \text{ wobei } R = \{(x, y, z) : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

130. Berechne das Volumen des Gebietes

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$$

131. Für  $T = x^3 - xy + y^3$ ,  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$  berechne

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}, \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial \rho \partial \theta}, \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right).$$

132. Berechne  $\frac{\partial U}{\partial t}$ , falls  $U = x^3 y$  und  $x^5 + y = t$  und  $x^2 + y^3 = t^2$ .

133.  $u^2 - v = 3x + y$ ,  $u - 2v^2 = x - 2y$ . Berechne

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

134. Zeige:

$$\int_0^\pi \ln \left( \frac{b - \cos x}{a - \cos x} \right) dx = \pi \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right) \quad (b > a > 1).$$

(Berechne zunächst  $\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x}$  und integriere das Ergebnis von  $a$  nach  $b$  bzgl.  $\alpha$ .)

135. Berechne den größten und den kleinsten Wert von  $z$  auf der Fläche

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35.$$

136. Berechne

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy.$$

137. Berechne

$$\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

wobei  $U$  das Gebiet zwischen der Ebenen  $z = 3$  und dem Kegel  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ist.

138. Verifiziere den Satz von Green für das Integral

$$\int_c (2xy - x^2) dx + (x^2 + y^2) dy,$$

wobei  $c$  der Rand des Gebietes zwischen  $y = x^2$  und  $x = y^2$  ist.

139. Bestimme den Flächeninhalt des Durchschnittes der Zylinder

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{und} \quad x^2 + z^2 = a^2.$$

140. Berechne

$$\iint_S x dy dz + y dx dz + z dz dy,$$

wobei  $S$  die Oberfläche des Gebietes zwischen dem Zylinder  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = 0$  und  $z = 3$  ist.

### 7.1.2 Lösungsvorschläge

1. a)  $x(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$   
 $\dot{x}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$   
 $\ddot{x}(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$   
 $\dot{x} + \ddot{x} = (-a(\sin t + \cos t), a(\cos t - \sin t), b)$   
 $(\dot{x} + \ddot{x})^2 = a^2(\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) + a^2(\cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t) + b^2 = 2a^2 + b^2$
- b)  $(\dot{x}|x) = -a^2 \sin t \cos t + a^2 \sin t \cos t + b^2 t + b^2 t$
- c)  $\ddot{x}(t) = (a \sin t, -a \cos t, 0)$

$$\ddot{x} \times \ddot{x} = -a \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \times a \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = -a^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 \end{pmatrix}$$

$$[\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}] = (\dot{x} | \ddot{x} \times \ddot{x}) = a^2 \cdot b.$$

2. a)  $(x|y) = t \sin t - t^2 \cos t$

$$\frac{d}{dt}(x|y) = \sin t + t \cos t - 2t \cos t + t^2 \sin t = \sin t - t \cos t + t^2 \sin t$$

b)

$$(x \times y) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^3 \cos t \\ +t^3 \sin t \\ t \cos t + t^2 \sin t \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(x \times y) = \begin{pmatrix} -3t^2 \cos t + t^3 \sin t \\ 3t^2 \sin t + t^3 \cos t \\ \cos t + t \sin t + t^2 \cos t \end{pmatrix}$$

3.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (ve^{uv}, 2, v \cos u)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = (v^2 e^{uv}, 0, -v \sin u)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = (e^{uv} + uve^{uv}, 0, \cos u)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (ue^{uv}, -1, \sin u)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = (u^2 e^{uv}, 0, 0)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{pmatrix} ve^{uv} \\ 2 \\ v \cos u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ue^{uv} \\ -1 \\ \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin u + v \cos u \\ ve^{uv}(-\sin u + u \cos v) \\ e^{uv}(-v - 2u) \end{pmatrix}$$

4.

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (u, u, -3v^2)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = (0, 0, -6v)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (3u^2, 1, 0)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = (6u, 0, 0)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36uv \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.

$$\dot{c} = (3 - 3t^2, 6t, 6t)$$

$$\ddot{c} = (-6t, 6, 6)$$

$$\ddot{\ddot{c}} = (-6, 0, 0)$$

$$|\dot{c}| = \sqrt{9 - 18t^2 + 9t^4 + 36t^2 + 36t^2}$$

$$= \sqrt{9 + 54t^2 + 9t^4} = 3\sqrt{1 + 6t^2 + t^4}$$

$$\begin{aligned}
\dot{c} \times \ddot{c} &= 3 \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix} \times 6 \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 18 \begin{pmatrix} 2t-2t \\ -1+t^2-2t^2 \\ 1-t^2+2t^2 \end{pmatrix} \\
&= 18 \begin{pmatrix} 0 \\ -1+t^2 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \\
|\dot{c} \times \ddot{c}| &= 18\sqrt{2}|t^2-1| \\
\ddot{c} \times \ddot{\ddot{c}} &= 6 \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -36 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
[\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}}] &= (\dot{c}|\ddot{c} \times \ddot{\ddot{c}}) = -36(6t-6t) = 0 \\
\kappa &= \frac{18\sqrt{2}|t^2-1|}{27(1+6t^2+t^4)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}|t^2-1|}{3(1+6t^2+t^4)^{3/2}} \\
\tau &= 0
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial u} &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, -\cos u) \\
\frac{\partial \phi}{\partial v} &= (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \\
\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} &= \begin{pmatrix} 0 + \cos^2 u \cos v \\ 0 - \cos^2 u \sin v \\ -\sin u \cos u \cos^2 v - \sin u \cos v \sin^2 v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2 u \cos v \\ -\cos^2 u \sin v \\ -\sin u \cos u \end{pmatrix} = \cos u \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \\
\left| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right| &= |\cos u| \sqrt{\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u} \\
&= |\cos u| = \cos u \quad (u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])
\end{aligned}$$

9.

$$\phi_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ f' \end{pmatrix} \quad \phi_v = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{u \geq 0}}$$

$$E = 1 + (f')^2$$

$$F = 0$$

$$G = u^2$$

$$\phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f'' \end{pmatrix} \quad \phi_{vv} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_{uv} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_v \times \phi_{uu} = \begin{pmatrix} u f'' \cos v \\ u f'' \sin v \\ 0 \end{pmatrix} = u f'' \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\phi_u | \phi_v \times \phi_{uu}) = u f''$$

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{pmatrix} -f' u \cos v \\ -f' u \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$$|\phi_u \times \phi_v| = \sqrt{(f')^2 u^2 + u^2} = u \sqrt{1 + (f')^2}$$

$$L = \frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}}$$

$$\phi_v \times \phi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \sin v \cos v + u \cos v \sin v \end{pmatrix} = 0$$

$$M = 0$$

$$\phi_v \times \phi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

$$(\phi_u | \phi_v \times \phi_{vv}) = f' u^2$$

$$N = \frac{f' u^2}{u \sqrt{1 + (f')^2}} = \frac{f' u}{\sqrt{1 + (f')^2}}.$$

10. a)  $\frac{y-2}{5} = t$

$$x = 3 \left( \frac{y-2}{5} \right)^2 = 3 \frac{(y-2)^2}{25}$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 - \frac{25}{3} x = 0$$

b)  $t \geq 0$

$$x^2 = t$$

$$y = 1 - x^2$$

c)  $x = e^t, \quad y = e^{-t}$

$$\ln x = t \quad \ln y = -t$$

$$\ln x = -\ln y = \ln \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y}.$$

11.

$$\frac{d}{dt}(x|y) = \frac{d}{dt} \sum x_i y_i = \sum \dot{x}_i y_i + x_i \dot{y}_i = (\dot{x}|y) + (x|\dot{y})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x \times y) &= \frac{d}{dt} \sum_{i \neq j} \varepsilon_{i,j} x_i y_j = \frac{d}{dt} \sum_{i \neq j} \varepsilon_{i,j} (\dot{x}_i y_j + x_i \dot{y}_j) \\ &= (\dot{x} \times y) + (x \times \dot{y}), \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon_{i,j}$  bestimmte Zahlen in  $\{-1, 1\}$  sind.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[x, y, z] &= \frac{d}{dt}(x|y \times z) = (\dot{x}|y \times z) + (x|\frac{d}{dt}(y \times z)) = [\dot{x}, y, z] + [x|\dot{y} \times z + y \times \dot{z}] \\ &= [\dot{x}, y, z] + [x, \dot{y}, z] + [x, y, \dot{z}].\end{aligned}$$

12. Aus  $1 = ||x||^2 = (x|x)$  folgt

$$0 = \frac{d}{dt}(x|x) = (\dot{x}|x) + (x|\dot{x}) = 2(\dot{x}|x).$$

13.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\dot{c}_1)^2 + (\dot{c}_2)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

14.

$$\begin{aligned}v &= \frac{d}{dt}x = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t) = 3 \sin t \cos t(-\cos t, \sin t), \\ |v| &= 3|\sin t \cos t|.\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}c(t) &= (b, 0, 2\pi gt), \quad t \in [0, 1], \\ \dot{c}(t) &= (0, 0, 2\pi g). \\ \int_c yz dx + zx dy + xy dz &= \int_0^1 0 + 0 + 0 dt = 0.\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}c(t) &= (b \cos t, b \sin t, gt), \quad t \in [0, 2\pi], \\ \dot{c}(t) &= (-b \sin t, b \cos t, g) \\ \int_c yz dx + zx dy + xy dz &= \int_0^{2\pi} -b^2 gt \sin^2 t + b^2 gt \cos^2 t + b^2 g \sin t \cos t dt \\ &= b^2 g \int_0^{2\pi} t(-\sin^2 t + \cos^2 t) + \frac{1}{2} \sin 2t dt = b^2 g \int_0^{2\pi} t \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t dt \\ &= b^2 g \left[ \frac{1}{2} t \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}& (z|x)y - (x|y)z \\ &= (y_1 \sum z_i x_i - z_1 \sum x_i y_i, y_2 \sum z_i x_i - z_2 \sum x_i y_i, y_3 \sum z_i x_i - z_3 \sum x_i y_i) \\ &= \dots = x \times (y \times z).\end{aligned}$$

18. Laut 17.

$$\begin{aligned}(x \times y) \times (z \times w) &= (w|x \times y)z - (x \times y|z)w = [w, x, y]z - [z, x, y]w \\ &= [w, x, y]z - [x, y, z]w,\end{aligned}$$

weil  $[z, x, y] = -[y, x, z] = (-1)^2[x, y, z]$ .



19. Laut 17)

$$\begin{aligned} & x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) \\ &= (z|x)y - (x|y)z + (x|y)z - (y|z)x + (y|z)x - (z|x)y = 0. \end{aligned}$$

20.

$$\text{grad } f = \alpha(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}(x, y, z),$$

falls  $\alpha \neq 0$ ;  $\text{grad } f = 0$ , falls  $\alpha = 0$ .

31. a)

$$\begin{aligned} f(g(t)) &= e^t \exp(e^{2t} + e^{-2t}) \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \\ (f(g(t)))' &= \exp(e^{2t} + e^{-2t})(2e^{3t} + e^t - 2e^{-t}) \quad t \in \mathbf{R} \\ f'(x, y) &= \exp(x^2 + y^2)(1 + 2x^2, 2xy) \\ g'(t) &= (e^t, -e^{-t})^T \\ f'(g(t))g'(t) &= \exp(e^{2t} + e^{-2t})(1 + 2e^{2t}, 2) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \exp(e^{2t} + e^{-2t})(2e^{3t} + e^t - 2e^{-t}). \end{aligned}$$

32.  $h := f \circ g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ 

$$g'(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & \theta & -\rho \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \rho} = \sin \phi (f_x \cos \theta + f_y \sin \theta) + f_z \cos \phi$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \rho \sin \phi (-f_x \sin \theta + f_y \cos \theta)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \phi} = \rho \cos \phi (f_x \cos \theta + f_x \sin \theta) - \rho \sin \phi \circ f_z$$

$$f_x := \frac{\partial \rho}{\partial x}(g(\rho, \theta, \phi)), \quad f_y := \frac{\partial \rho}{\partial y}(g(\rho, \theta, \phi)), \quad f_z := \frac{\partial \rho}{\partial z}(g(\rho, \theta, \phi)).$$

33. a)  $\dot{c}(t) = (2, 2t, \frac{1}{t})$ ,  $t \in [1, 2]$ 

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \|\dot{c}(t)\| dt = \int_1^2 \left(4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} dt = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt \\ &= [t^2 + \ln t]_1^2 = 3 + \ln 2 \end{aligned}$$

b)  $\dot{c}(t) = (1, t \cos t + \sin t, \cos t - t \sin t)$   $t \in [0, \pi]$ 

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi (2 + t^2)^{1/2} dt = \text{arcsinh} \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + \frac{t}{2} \sqrt{2 + t^2} \Big|_0^\pi \\ &= \text{arcsinh} \left( \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \sqrt{2 + \pi^2}. \end{aligned}$$

35.  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $f \circ g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y & x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}, \quad J_g(r, s, t) = \begin{pmatrix} 2r & -2s & 0 \\ 2r & 0 & -2t \end{pmatrix}$$

$$f \circ g(r, s, t) = ((r^2 - s^2)^2(r^2 - t^2), (r^2 - s^2)(r^2 - s^2)(r^2 - t^2), (r^2 - s^2)(r^2 - t^2)^2)$$

$$\begin{aligned} J_f(g(r, s, t))J_g(r, s, t) &= \begin{pmatrix} 2(r^2 - s^2)(r^2 - t^2) & (r^2 - s^2)^2 \\ r^2 - t^2 & (r^2 - s^2) \\ (r^2 - t^2)^2 & 2(r^2 - s^2)(r^2 - t^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2r & -2s & 0 \\ 2r & 0 & -2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4r(r^2 - s^2)(r^2 - t^2) + 2r(r^2 - s^2)^2 & -4s(r^2 - s^2)(r^2 - t^2) & -2t(r^2 - s^2)^2 \\ 2r(r^2 - t^2) + 2r(r^2 - s^2) & -2s(r^2 - t^2) & -2t(r^2 - s^2) \\ 2r(r^2 - t^2) + 4r(r^2 - s^2)(r^2 - t^2) & -2s(r^2 - t^2)^2 & -4t(r^2 - s^2)(r^2 - t^2) \end{pmatrix} \\ &= J_{f \circ g}(r, s, t). \end{aligned}$$

36.  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$\Rightarrow J_f(x, y, z) = \frac{1}{A^2} \begin{pmatrix} A - x & -x & -x \\ -y & A - y & -y \\ -z & -z & A - z \end{pmatrix} \quad A := (1 + x + y + z) \neq 0$$

$$r = \frac{x}{A}, s = \frac{y}{A}, t = \frac{z}{A} \Rightarrow r + s + t = \frac{A - 1}{A}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{1 - (r + s + t)} \quad B := (1 - (r + s + t)) \neq 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(r, s, t) = \frac{1}{B}(r, s, t)$$

$$J_{f^{-1}}(r, s, t) = \frac{1}{B^2} \begin{pmatrix} B + r & r & r \\ s & B + s & s \\ t & t & B + t \end{pmatrix}$$

$$J_f(f^{-1}(r, s, t)) = B \begin{pmatrix} 1 - r & -r & -r \\ -s & 1 - s & -s \\ -t & -t & 1 - t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_f(f^{-1}(r, s, t))J_{f^{-1}}(r, s, t) = I.$$

37. a)

$$\dot{c}(t) = \left( \frac{-\sin t}{\cos t}, \frac{\cos t}{\sin t}, \sqrt{2} \right), \quad t \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$$

$$\ddot{c}(t) = \left( \frac{-1}{\cos^2 t}, \frac{-1}{\sin^2 t}, 0 \right), \quad \ddot{c}(t) = \left( \frac{-2 \sin t}{\cos^3 t}, \frac{2 \cos t}{\sin^3 t}, 0 \right)$$

$$\|\dot{c}\| = |\sin t \cos t|^{-1}$$

$$\dot{c} \times \ddot{c} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin t}{\cos t} \\ \frac{\cos t}{\sin t} \\ \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cos^2 t} \\ -\frac{1}{\sin^2 t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t} \\ \frac{2}{\sin t \cos t} \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{c} \times \ddot{c}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t \cos^2 t}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|} \Rightarrow \mathbf{T} = \text{sign}(\sin(t) \cos(t))(-\sin^2 t, \cos^2 t, \sqrt{2} \sin t \cos t)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|} \Rightarrow B = (\cos^2 t, -\sin^2 t, \sqrt{2} \sin t \cos t)$$

$$\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3} = \sqrt{2} |\sin t \cos t|$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ -\sin^2 t \\ \sqrt{2} \sin t \cos t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin^2 t \\ \cos^2 t \\ \sqrt{2} \sin t \cos t \end{pmatrix} \text{sign}(\sin t \cos t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{N} = \text{sign}(\sin t \cos t)(-\sqrt{2} \sin t \cos t, -\sqrt{2} \sin t \cos t \cos(2t))$$

$$[\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}] = (\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}} | \ddot{\mathbf{c}}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t} \\ \frac{2}{\sin t \cos t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2 \sin t}{\cos^3 t} \\ \frac{2 \cos t}{\sin^3 t} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-2\sqrt{2}}{\sin^3 t \cos^3 t}, \tau = -\sqrt{2} \sin t \cos t.$$

39.  $v(x, y) = x \ln(x + r) - r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(t, 0) | t \leq 0\}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \ln(x + r) + x \frac{1 + r_x}{x + r} - r_x = \ln(x + r) + \frac{x - r r_x}{x + r}$$

$$r_x = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \ln(x + r)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{r_y}{x + r} - r_y = \frac{-r r_y}{x + r} = -\frac{y}{x + r}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1 + r_x}{x + r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-(x + r) + y r_y}{(x + r)^2} = -\frac{1}{x + r} + \frac{y^2}{r(x + r)^2}$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{r} + \frac{y^2}{r(x + r)^2} - \frac{1}{x + r}$$

$$= \frac{x^2 + r^2 + 2xr + y^2}{r(x + r)^2}$$

$$= \frac{2r(x + r)}{r(x + r)^2} = \frac{2}{x + r}$$

$$\Rightarrow \Delta v = \frac{1}{x + r}.$$

40.

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{xy^3}{4} - yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4 \rightarrow 2 \quad ((x, y) = (1, 2)) \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y^3}{4} - 3yx^2 + xy^2 - 2 \rightarrow -2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3xy^2}{4} - x^3 + x^2y + 3 \rightarrow 7, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -6yx + y^2 \rightarrow -8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{3y^2}{4} - 3x^2 \rightarrow 4, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{3xy}{2} + x^2 \rightarrow 4, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -6y \rightarrow -12, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -6x + 2y \rightarrow -2, \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= \frac{3y}{2} + 2x \rightarrow 5, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{3x}{2} \rightarrow \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = -6, \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} &= 2, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = \frac{3}{2}, \quad \text{alle anderen Ableitungen} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Taylorpolynom:

$$T_k(0.02, 0.03) = T_{k-1}(0.02, 0.03) \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(1, 2)}{\alpha!} (0.02, 0.03)^\alpha$$

$$T_0(0.02, 0.03) = 2$$

$$T_1(0.02, 0.03) = 2 + (-2 \cdot 0.02 + 7 \cdot 0.03) = 2.17$$

$$\begin{aligned}
T_2(0.02, 0.03) &= 2.17 + \left( -\frac{8}{2} (0.02)^2 + 4 \cdot 0.02 \cdot 0.03 + \frac{4}{2} (0.03)^2 \right) \\
&= 2.1726
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3(0.02, 0.03) &= 2.1726 + \left( -\frac{12}{6} (0.02)^3 - \frac{2}{2} (0.02)^2 (0.03) + \frac{5}{2} (0.02) (0.03)^2 + \frac{3}{2 \cdot 6} (0.03)^3 \right) \\
&= 2.17262375
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4(0.02, 0.03) &= 2.17262375 + \left( -\frac{6}{6} (0.02)^3 (0.03) + \frac{2}{4} (0.02)^2 (0.03)^2 + \frac{3}{2 \cdot 6} (0.02) (0.03)^3 \right) \\
&= 2.172623825 \\
&= \text{exaktes Ergebnis.}
\end{aligned}$$

Verwendete Notation:  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $F = (F_1, F_2, F_3)^T$  etc.

41.  $f(x, y, z) = x^k F\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$  mit  $F \in C^1$ ,  $F = F(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned}
xf_x + yf_y + zf_z &= x \left( kx^{k-1} F + x^k \left( F_\alpha \frac{-z}{x^2} + F_\beta \frac{-y}{x^2} \right) \right) \\
&\quad + yx^k F_\beta \frac{1}{x} + zx^k F_\alpha \frac{1}{x} \\
&= kx^k F - x^{k-1} z F_\alpha - x^{k-1} y F_\beta + yx^{k-1} F_\beta + zx^{k-1} F_\alpha \\
&= kx^k F = kf.
\end{aligned}$$

$$42. \text{ Aus } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ folgt } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} Xf_X + Yf_Y &= X \left( f_x \frac{\partial x}{\partial X} + f_y \frac{\partial y}{\partial Y} \right) + Y \left( f_x \frac{\partial x}{\partial Y} + f_y \frac{\partial y}{\partial Y} \right) = \\ &= X \left( f_x \frac{d}{ad-bc} + f_y \frac{-c}{ad-bc} \right) \\ &\quad + Y \left( f_x \frac{-b}{ad-bc} + f_y \frac{a}{ad-bc} \right) \\ &= \frac{dX - bY}{ad-bc} f_x + \frac{aY - cX}{ad-bc} f_y \\ &= \frac{adx + bdy - bcx - bdy}{ad-bc} f_x + \frac{acy + ady - acx + bcy}{ad-bc} f_y \\ &= xf_x + yf_y \quad \text{qed.} \end{aligned}$$

43. Zeigen Behauptung für  $x \neq 0$ :

i) Direkte Folgerung aus dem Satz von Schwarz, da für  $x \neq 0$ :  $f \in C^\infty$ ,  $f = f(x, y) = z$ .

ii) Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} =: I \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (-1(x^2 + y^2) - (-y)2y) = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} =: II \\ I &= II \quad \text{qed.} \end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \text{ mit } f(x) = \ln(1-x), \text{ also } f(0) = 0 \\
f'(x) &= \frac{-1}{1-x} \text{ also } f'(0) = -1 \\
f''(x) &= \frac{(-1)(-1)^2}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1 \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)(n-1)!}{(1-x)^n} \text{ per Induktion, also } f^{(n)}(0) = -(n-1)! \\
\Rightarrow \ln(1-x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-(i-1)!}{i!} x^i = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} \\
&\text{(absolute Konvergenz f\u00fcr } |x| < 1) \\
\Rightarrow \ln(1-x) \ln(1-y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y^j}{j}.
\end{aligned}$$

45. Suchen Punkt mit  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ 

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y = 2x(x+1) \quad (2) \Rightarrow x = -1 \vee y = 0$$

$$\Rightarrow (1) \quad 6 + y^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

$$\Rightarrow P_1 = (-1, 2), P_2 = (-1, -2)$$

$$\text{bzw. (1) } 6x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \left(6x + 10 = 0 \Leftrightarrow 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}\right)$$

$$\Rightarrow P_3 = (0, 0), P_4 = \left(0, -\frac{5}{3}\right).$$

46.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, f \in C^2, \phi \in C^2$ 

$$\begin{aligned}
\Delta(f \circ \phi) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f \circ \phi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f \circ \phi) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(f \circ \phi) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f' \phi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f' \phi_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f' \phi_z) \\
&= f'' \phi_x^2 + f' \phi_{xx} + f'' \phi_y^2 + f' \phi_{yy} + f'' \phi_z^2 + f' \phi_{zz} \\
&= f' \Delta \phi + f'' \|\text{grad } \phi\|^2.
\end{aligned}$$

47. Polarkoordinaten AN II, S. 21

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$$

$$f = f(x, y), F = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))^t$$

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(f \circ \phi) &= (f_x, f_y)\phi_r = (f_x, f_y)(\cos \theta, \sin \theta)^t \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(f \circ \phi) &= (f_x, f_y)\phi_\theta = (f_x, f_y)(-r \sin \theta, r \cos \theta)^t \\ &= r(-\sin \theta f_x + \cos \theta f_y) \\ \Rightarrow \nabla(f \circ \phi) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \nabla f \end{aligned}$$

bzw.

$$\nabla f = \frac{1}{r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \nabla(f \circ \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \frac{-\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \nabla(f \circ \phi).$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(F_1 \circ \phi) &= (F_{1x}, F_{1y})\phi_r = F_{1x} \cos \theta + F_{1y} \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(F_2 \circ \phi) &= (F_{2x}, F_{2y})\phi_\theta = -F_{2x}r \sin \theta + F_{2y}r \cos \theta \\ \Rightarrow \operatorname{div}(F \circ \phi) &= \cos \theta F_{1x} + \sin \theta F_{1y} - r \sin \theta F_{2x} + r \cos \theta F_{2y} \end{aligned}$$

bzw.

$$\operatorname{div} F = \cos \theta \frac{\partial(F_1 \circ \phi)}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(F_1 \circ \phi)}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial(F_2 \circ \phi)}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(F_2 \circ \phi)}{\partial \theta}.$$

$$48. \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial y} f_z - \frac{\partial}{\partial z} f_y, \frac{\partial}{\partial z} f_x - \frac{\partial}{\partial x} f_z, \frac{\partial}{\partial x} f_y - \frac{\partial}{\partial y} f_x \right) = 0 \quad (f \in C^2).$$

$$49. \operatorname{div} \operatorname{rot} f = \operatorname{div}(F_{3y} - F_{2z}, F_{1z} - F_{3x}, F_{2x} - F_{1y}) = F_{3xy} - F_{2xz} + F_{1yz} - F_{3yx} + F_{2zx} - F_{1zy} = 0 \quad (F \in C^2).$$

50.

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad}(\operatorname{div} F) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \\ &= \operatorname{grad}(F_{1x} + F_{2y} + F_{3z}) - \operatorname{rot}(F_{3y} - F_{2z}, F_{1z} - F_{3x}, F_{2x} - F_{1y}) \\ &= (F_{1xx} + F_{2xy} + F_{3xz}, F_{1xy} + F_{2yy} + F_{3yz}, F_{1xz} + F_{2yz} + F_{3zz}) \\ &\quad - (F_{2xy} - F_{1yy} - F_{1zz} + F_{3xz}, F_{3yz} - F_{2zz} - F_{2xx} + F_{1xy}, F_{1xz} - F_{3xx} - F_{3yy} + F_{2yz}) \\ &= (F_{1xx} + F_{1yy} + F_{1zz}, F_{2yy} + F_{2zz} + F_{2xx}, F_{3zz} + F_{3xx} + F_{3yy}) \\ &= (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3) = \Delta F \quad \text{für } F \in C^2. \end{aligned}$$

51. Aus  $u = xy, v = \frac{1}{y}$  folgt leicht  $x = uv, y = \frac{1}{v}$ .

$$\begin{aligned} \text{Daher } \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} y = \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} x + \frac{\partial f}{\partial v} \left( -\frac{1}{y^2} \right) = uv \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

$$\text{Damit ist } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \text{ usw.}$$

52. Wir verwenden die Tatsache:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ .

Aus  $x = r_1 \cos \theta$ ,  $y = r_1 \sin \theta$  folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 f}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Aus  $z = r \cos \phi$ ,  $r_1 = r \sin \phi$  folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

Also

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial r_1} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r \sin \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \end{aligned}$$

(da  $\frac{\partial f}{\partial r_1} = \sin \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \phi}$  – folgt aus dem entsprechenden Ergebnis für Polarkoordinaten).

54.

$$\begin{aligned} \int_R (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_1^2 (x^2 + y^2) dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{x^3}{3} + y^2 x \Big|_1^2 \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{1}{3} - y^2 \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{7}{3} + y^2 \right) dy = \frac{7y}{3} + \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

55.

$$\begin{aligned} \int_R x \sin y dx dy &= \int_0^1 x \left( \int_{x^2}^{2x^2} \sin y dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x (\cos x^2 - \cos 2x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \sin x^2 - \frac{1}{2} \sin 2x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sin 1 - \frac{1}{2} \sin 2 \right). \end{aligned}$$



56.

$$\begin{aligned}
\int_R (xy + 2) dx dy &= \int_1^2 \left( \int_{y^2}^{y^3} (xy + 2) dx \right) dy \\
&= \int_1^2 \left( \frac{x^2 y}{2} + 2x \Big|_{y^2}^{y^3} \right) dy \\
&= \int_1^2 \left( \frac{y^7}{2} + 2y^3 - \frac{y^5}{2} - 2y^2 \right) dy \text{ usw.}
\end{aligned}$$

58.

$$\begin{aligned}
\int_R xy dx &= \int_0^2 y \int_1^{\frac{1}{2}y+1} x dx \\
&= \int_0^2 y \left( \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\frac{1}{2}y+1} \right) dx \\
&= \int \frac{y}{2} \left( \left( \frac{1}{2}y + 1 \right)^2 - 1 \right) dy \text{ usw.}
\end{aligned}$$

70. Gemäß dem impliziten Funktionensatz ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2ax + 2by}{2bx + 2cy} = -\frac{ax + by}{bx + cy}$$

sofern  $bx + cy \neq 0$  für  $F(x, y) = 0$ .71. Lagrange?  $L(x, y, z, l) = (x - y + z) + l(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$  $\nabla g = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$  für  $g(x, y, z) = 0 \Rightarrow \nabla g$  hat Vollrang

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + 2lx \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= -1 + 2ly \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 1 + 2lz
\end{aligned} \right\} \Rightarrow l \neq 0; \frac{1}{2l} = y = -x = -y$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{4l^2} - 2 = 0 \Rightarrow l = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow P_1 = \left( \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \text{ mit } f = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$P_2 = \left( -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \text{ mit } f = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \text{Minimum.}$$

72.  $F_1(x, y, u, v) = xu + yvu^2 - 2$ ,  $F_2(x, y, u, v) = xu^3 + y^2v^4 - 2 \Rightarrow F(1, 1, 1, 1) = (0, 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)} &= \begin{pmatrix} x + 2yvu & yu^2 \\ 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
\text{def} &= 9 \Rightarrow \text{regulär auflösbar nach } (u, v) \\
\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} &= \begin{pmatrix} u & vu^2 \\ u^3 & 2yv^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u \partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v \partial y}{\partial x} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also z.B.:  $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{3}$ .

73. Sei  $F_y \neq 0$ , so gilt nach Impl. Funktionensatz

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))} \\
\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{(F_{xx} + F_{xy}\frac{dy}{dx})F_y - F_x(F_{yx} + F_{yy}\frac{dy}{dx})}{F_y^2} \\
&= -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}
\end{aligned}$$

unter der Annahme  $F \in C^2 (\Rightarrow F_{xy} = F_{yx}, \text{Schwartz})$

74. Es handelt sich um eine Asteroide.

$F_x$  existiert nicht in  $(0, \pm a)$ ,  $F_y$  existiert nicht in  $(\pm a, 0)$ . Wir schließen diese Punkte aus  $F_y \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
y' &= -F_x F_y^{-1} = \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) \left(\frac{2}{3}y^{-1/3}\right)^{-1} = -x^{-1/3}y^{1/3} \\
y'' &= \frac{-\frac{4}{9}y^{-2/3}\frac{2}{3}x^{-4/3} - \frac{4}{9}x^{-2/3}\frac{2}{3}y^{-4/3}}{\frac{8}{27}y^{-1}} = \frac{1}{3}(y^{1/3}x^{-4/3} + y^{-1/3}x^{-2/3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{3}(y^{1/3}x^{-4/3} + y^{-1/3}x^{-2/3})}{(1 + x^{-2/3}y^{2/3})^{3/2}} \\
\Rightarrow \mathcal{H} &= \frac{x^{-1/3}y^{1/3} + x^{1/3}y^{-1/3}}{3(x^{2/3} + y^{2/3})^{3/2}}.
\end{aligned}$$

75.  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ,  $F_y = 3y^2 - 3ax \neq 0$ .

Die Bedingung  $F_y \neq 0$  schließt nur die Punkte  $(x, y) = (0, 0)$  und  $(x, y) = (\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$  aus.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \\ y'' &= \frac{-2a^3xy}{(y^2 - ax)^2} \\ \Rightarrow y''' &= \frac{4a^3xy^2(ay - 2x)}{(y^2 - ax)^5}. \end{aligned}$$

76. Wir suchen jene Reihe?, wo  $F_x = 0$  oder  $F_y = 0$ .

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^3 + y^3 - 3axy \\ F_x &= 3x^2 - 3ay \\ F_y &= 3y^2 - 3ax \\ F_x = 0 &\Leftrightarrow x^2 = ay \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (\sqrt[3]{2a}, \sqrt[3]{4a}) \\ F_y = 0 &\Leftrightarrow y^2 = ax \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a}) \end{aligned}$$

$$\nabla F = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

77. Sei  $y_u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  so, daß  $y_u \rightarrow \frac{\pi}{2}$  für  $u \rightarrow \infty \Rightarrow \tan(y_n) \rightarrow +\infty, \cos(y_n) \rightarrow 0^+$ .

O.B.d.A. seien  $a, b, u, v > 0$

$$\tan(x_n) = \frac{c - b \tan(y_n)}{a} \rightarrow -\infty$$

so ein  $x_n$  gibt es in  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  mit  $x_n \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow f(x_n, y_n) = \frac{a}{u \cos x_n} + \frac{b}{v \cos y_n} \rightarrow +\infty.$$

78. Interpretation: Suche Punkt mit größtem Abstand auf Kegelschnitt. Hat nur Lösung, falls ein Ellipsoid vorliegt, i.e.:  $b^2 - ac < 0 \wedge cf > 0$  Zugang mit Lagrange!

$$L(x, y, l) = (x^2 + y^2) + l(ax^2 + 2by + cy^2 - f)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 2alx + 2bly = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + 2bl + 2cly = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial l} &= ax^2 + 2bxy + cy^2 - f = 0. \end{aligned}$$

Für den Sonderfall  $b = 0, a, c, f > 0, a \neq 0$  erhält man:

$$l = -\frac{1}{a}, (x, y) = \left(\pm\sqrt{\frac{f}{a}}, 0\right) // l = -\frac{1}{c}, (x, y) = \left(0, \pm\sqrt{\frac{f}{c}}\right)$$

$$(\text{maximaler Abstand}) = \frac{f}{\min(a, c)}.$$

79.

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 - 1 \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

$$g' = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} R_g g' = 2 \text{ für alle } (x, y, z) \text{ mit } g$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 2xl + \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2ul + \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 102zl + 2\mu = 0 \end{array} \right\} l \neq 0, x = y = -\frac{\mu}{2l}, z = \frac{1 + 2\mu}{2l}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = x + y + 2z = 0 \Rightarrow \mu = -1, x = y = \frac{1}{2l}, z = -\frac{1}{2l}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \Rightarrow l = \pm \frac{1}{2}, x = y = \pm 1, z = \pm 1$$

höchster Punkt =  $(-1, -1, 1)$ niedrigster Punkt =  $(1, 1, 1)$ .

80.

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos t \\ y(t) &= r(t) \sin t \end{aligned}, \quad t \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{1}{2} \int_a^b (t(t) \cos t (r'(t) \sin t + r(t) \cos t) - r(t) \sin t (r'(t) \cos t - r(t) \sin t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b r^2(t) dt, \quad \text{falls } r \in C^1[a, b]. \end{aligned}$$

Kurve:  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{1/3} \Rightarrow x(t) = a \cos^3 t, y(t) = a \sin^3 t \quad t \in [0, 2\pi]$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= 4 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [a \cos^3 t 3a \sin^2 t \cos t + a \sin^3 t 3a \cos^2 t] dt \\ &= \frac{6a^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt \\ &= \frac{3a^2}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{3a^2}{4} \left[ t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8} a^2. \end{aligned}$$

81.

$$Df = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{bmatrix}$$

 $Df$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow \det(Df) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \det(Df) &= 6(yz^2 - y^2z - xz^2 + x^2z + xy^2 - x^2y) = 6(z^2(y - x) - z(y^2 - x^2) + xy(y - x)) \\ &= 6(y - x)(z - y)(z - x). \end{aligned}$$

 $D(f)$  ist nicht invertierbar in  $\{(x, y, z) : x = y\} \cup \{(x, y, z) : z = y\} \cup \{(x, y, z) : x = z\}$ .

82.

$$Df = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

$$\det Df = 4x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Die Abbildung ist  $f$  überall stetig differenzierbar, darum ist es nach Satz 5.7 ein lokaler Diffeomorphismus in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Es ist  $\varphi(1, 0) = \varphi(-1, 0)$ , also ist  $\varphi$  nicht global invertierbar.

$$\varphi(r, \phi) = (r^2 \cos^2 \phi - r^2 \sin^2 \phi, 2r^2 \cos \phi \sin \phi) = r^2(\cos 2\phi, \sin 2\phi).$$

83. Ähnlich wie in 82. kann man beweisen, daß  $f$  in  $U$  ein lokaler Diffeomorphismus ist. Es ist

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\|^2 &= \frac{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4x^2}{(x^2 + y^2 + 2y + 1)^2} \\ &= \frac{(x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 + 2x^2) - 2y^2}{(x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 + 2x^2) + (4y^2 + 4x^2y + 2y^2 + 4y + 4y^3)} < 1. \end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt aus der Tatsache, daß der Bruch die Form  $\frac{A-B}{A+C}$ ,  $A, B, C > 0$  hat, wobei  $A + C > A - B$  ist. Dann muss man noch für jedes  $(s, t)$  mit  $s^2 + t^2 < 1$  ein  $(x, y) \in U$  finden, so daß  $f(x, y) = (s, t)$ .

Es ist einfacher die Aufgabe in  $\mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}$  steht hier für die komplexe Zahlen) betrachten. Definieren wir "fütwas anders. Tauschen wir  $x$  mit  $y$  um, und nehmen wir die erste Koordinate mit Minus:

$$g(x, y) = \left( \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 2x + 1}, \frac{-2y}{x^2 + y^2 + 2x + 1} \right).$$

Es genügt zu beweisen, daß  $g$  ein Diffeomorphismus von  $V = \{(x, y) : x > 0\}$  auf den Kreis  $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  ist. Schreiben wir  $z = x + iy$ . Dann berechnet man leicht, daß  $g$  die Möbiustransformation

$$h(z) = \frac{1 - z}{1 + z}$$

ist. Die Möbiustransformation  $h$  ist auf  $\mathcal{C} \setminus \{-1\}$  definiert, und komplex differenzierbar (also auch total differenzierbar) mit  $h'(z) = \frac{-2}{(1+z)^2} \neq 0$ . Aus

$$\frac{1 - z}{1 + z} = w$$

folgt, daß

$$\frac{1 - w}{1 + w} = z,$$

d.h. die Inverse von  $h$  ist  $h$ . Es ist  $h(V) = K$  und  $h(K) = V$ , weil  $h(\{ci : c \in \mathbf{R}\}) = \{z : |z| = 1\}$ , und  $h(1) = 0$ .

84. Wir benutzen die Tatsache, daß  $(AB)' = A'B + AB'$ . Wenn wir die Gleichung

$$AA^{-1} = I$$

differenzieren, bekommen wir

$$A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0 \Rightarrow A(A^{-1})' = -A'A^{-1} \Rightarrow (A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}.$$

Ähnlich gilt

$$(A^2)' = (AA)' = A'A + AA',$$

und für  $n \in \mathcal{N}$

$$(A^n)' = (A^{n-1}A)' = (A^{n-1})'A + A^{n-1}A',$$

also bekommen wir mit Induktion, daß für  $n \in \mathcal{N}$

$$(A^n)' = \sum_{k+l=n-1} A^k A' A^l.$$

Es ist  $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1} = A^{-n}$ . Wenn wir in die Gleichung für  $(A^n)'$  die Matrix  $B = A^{-1}$  einsetzen, bekommen wir

$$\begin{aligned} (A^{-n})' &= (B^n)' = \sum_{k+l=n-1} B^k B' B^l = - \sum_{k+l=n-1} A^{-k} (A^{-1} A' A^{-1}) A^{-l} \\ &= - \sum_{k+l=n-1} A^{-(k+1)} A' A^{-(l+1)}. \end{aligned}$$

85. (Wir benutzen Satz 5.8, und Seiten 51-52 des Skriptums.)

$$F_y(x, y) = 3y^2 - 6x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}y^2.$$

$y = y(x)$  in allen Punkten von

$$D = \{(x, y) : F(x, y) = 0, x \neq \frac{1}{2}y^2\}.$$

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x},$$

$$y''(x) = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3} = \frac{2(-6)(3x^2 - 6y)(3y^2 - 6x) - \dots}{\dots}.$$

86.

$$F_y(0, 0) = 3y^2 + 1 = 1 \neq 0,$$

also  $y = y(x)$ .  $y', y''$  berechnet man ähnlich wie im 85).

87.

$$F_y(x, y) = 2xy = 4 \neq 0,$$

also  $y = y(x)$ .  $y', y''$  berechnet man ähnlich wie im 85).

88.

$$F_y(x, y) = -2 \sin y = 2 \neq 0,$$

also  $y = y(x)$ .  $y', y''$  berechnet man ähnlich wie im 85).

89.

$$F_z = \frac{2z}{c^2},$$

$z = z(x, y)$ , falls  $z \neq 0$ . Wenn wir die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2(x, y)}{c^2} - 1 = 0$$

nach  $x$  differenzieren, bekommen wir, daß

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} z_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{x}{a^2} \frac{c^2}{z}.$$

Ähnlich berechnen wir  $z_y$ , und wenn wir diese Gleichungen noch einmal nach  $x$  oder  $y$  differenzieren, bekommen wir  $z_{xx}$ ,  $z_{xy}$ , und  $z_{yy}$ .

90.

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \Rightarrow F_x + F_z z_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{F_x}{F_z}.$$

Ähnlich gilt

$$x_y = -\frac{F_y}{F_x},$$

$$y_z = -\frac{F_z}{F_y},$$

also

$$z_x x_y y_z = -1.$$

$$111. L(x, y, l) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} + l(1 - xy).$$

$\nabla$  Nebenbedingung hat Vollrang für  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = x^{p-1} - ly = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = y^{q-1} - lx = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial l} = 1 - xy = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^p = y^q \wedge y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = y = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq 1 \text{ für } xy = 1.$$

Seien  $\|u\|_p := (\sum_{i=1}^n u_i^p)^{1/p}$  und  $\|v\|_q := (\sum_{i=1}^n v_i^q)^{1/q}$

$$x_k = \left( \frac{u_k}{\|u\|_p} \right)^{1/q} \left( \frac{\|v\|_q}{v_k} \right)^{1/p} \text{ und } y_k := \frac{1}{x_k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} x_k^p + \frac{1}{q} y_k^q \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} (\|v\|_q v_k) \left( \frac{u_k}{\|u\|_p} \right)^{p/q} + \frac{1}{q} \left( \frac{v_k}{\|v\|_q} \right)^{qp} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} \left( \frac{u_k}{\|u\|_p} \right) = p + \frac{1}{q} (\|v\|_q v_k) = q \geq \frac{u_k v_k}{\|u\|_p \|v\|_q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n : 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{\sum_{k=1}^n u_k v_k}{\|u\|_p \|u\|_q}, \text{ da}$$

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{u_k}{\|u\|_p} \right)^p = 1 \sum_{k=1}^n \left( \frac{v_k}{\|v\|_q} \right)^q \text{ q.e.d.}$$

113.  $L(x, l) = (Ax|x) + l(1 - (x|x)) = g(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$   $x = (x_1, \dots, x_n)$   
 $\nabla g = 2x \neq 0$  für  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (Ax|x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i + 2a_{kk} x_k \\ &= 2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (Ax|x) = 2Ax$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2Ax - 2lx = 0 \Rightarrow Ax = lx.$$

114.  $r = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$  ist eine 0-Form,  $d\left(\frac{1}{r}\right)$  ist daher die 1-Form:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{r}\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) dx_i \\ &= -\frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^n x_i dx_i. \end{aligned}$$

115.  $\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$$\text{Ansatz } \phi(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \phi(0, 0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \phi(1, 0) = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 \\ a_2 + c_2 \\ a_3 + c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \phi(0, 1) = \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Damit gilt

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ y + 1 \\ 2x + 3y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \omega \circ \phi &= 2d\phi_2d\phi_3 - d\phi_3d\phi_1 + 3d\phi_1d\phi_2 \\ &= 2(dy)(2dx + 3dy) - (2dx + 3dy)(3dx - 2dy) + 3(3dx - 2dy)(dy) \\ &= 4dy dx - 6dy dx + 4dx dy + 6dx dy = 18dx dy. \end{aligned}$$

116.

$$\begin{aligned} dx &= 2u du + 2v dv + 2w dw \\ dy &= (v + w) du + (u + w) dv + (u + v) dw \\ dz &= vw du + uw dv + uv dw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1u & 2v & 2w \\ v + w & u + w & u + v \\ vw & uw & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$du = \frac{\det A_1}{\det A}, dv = \frac{\det A_2}{\det A}, dw = \frac{\det A_3}{\det A}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 2(u + v + w)(u - v)(u - w)(v - w) \text{ für } u + v + w \neq 0 \wedge u \neq v \wedge u \neq w \wedge v \neq w \\ \det A_1 &= u^3(v - w) dx + 2u(w^2 - v^2) dy + 2(u + v + w)(v - w) dz \\ \det A_2 &= v^2(w - u) dx + 2v(y^2 - w^2) dy + 2(u + v + w)(w - u) dz \\ \det A_3 &= w^2(u - v) dx + 2w(v^2 - u^2) dy + 2(u + v + w)(u - v) dz. \end{aligned}$$

118.  $A = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx)$

Ellipse:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (a \cos t, b \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \\ \gamma(t) &= (-a \sin t, b \cos t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t + b \sin t a \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} 1 dt = ab\pi. \end{aligned}$$

119. Sei  $F = f \operatorname{grad} g$ .

Behauptung folgt mit Satz 6.8 (Gaußscher Integralsatz), da  $\operatorname{div} F = (f \operatorname{grad} g) = (\operatorname{grad} f | \operatorname{grad} g) + f \nabla g$ .

Die 2. Identität folgt aus 1. durch Vertauschen von  $f$  und  $g$  und anschließende Subtraktion.

120.  $x^2 + y^2 \leq r^2$ ,  $x \geq 0$

$$\rho(x, y) := 1$$

$$\begin{aligned} M &= \int_0^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 \, dy \, dx = \frac{\pi}{2} r^2 \\ T_y &= \int_0^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} y \, dy \, dx = 0 \\ T_x &= \int_0^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x \, dy \, dx = 2 \int_0^r x \sqrt{r^2-x^2} \, dx = -\frac{2}{3} (r^2-x^2)^{3/2} \Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3 \\ \Rightarrow S &= (T_x/M, T_y/M) = \left( \frac{4}{3\pi} r, 0 \right). \end{aligned}$$

121.

$$\begin{aligned} \iint_U x^2 + y^2 \, dx \, dy &= \int_1^2 \int_1^{x^2} x^2 + y^2 \, dy \, dx = \int_1^2 [x^2 y + \frac{1}{3} y^3]_1^{x^2} \, dx \\ &= \int_1^2 x^4 + \frac{1}{3} x^6 - x^2 - \frac{1}{3} \, dx = [\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{21} x^7 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} x]_1^2 = \dots \end{aligned}$$

122.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2-x^2} \, dy \, dx = 4 \int_{-a}^a a^2 - x^2 \, dx = \frac{16}{3} a^3. \end{aligned}$$

123.

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} x^2 + y^2 + z^2 \, dz \, dy \, dx &= \int_0^a \int_0^{a-x} [x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3]_0^{a-x-y} \, dy \, dx \\ &= \int_0^a \int_0^{a-x} x^2(a-x-y) + y^2(a-x-y) + \frac{1}{3}(a-x-y)^3 \, dy \, dx = \dots \end{aligned}$$

124. Mit  $z = 6$  ist das Gebiet nicht beschränkt; wir betrachten den Fall  $y = 6$ . Weil  $\rho = 1$ , es ist  $m = V$ .

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} 1 \, dz \, dx \, dy = \int_0^6 \int_0^2 4 - x^2 \, dx \, dy \\ &= \int_0^6 \frac{16}{3} \, dy = 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= \int_0^6 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} x dz dx dy = \int_0^6 \int_0^2 4x - x^3 dx dy \\
&= \int_0^6 [2x^2 - \frac{1}{4}x^4]_0^2 dy = 32 \\
y_0 &= \int_0^6 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} y dz dx dy = \int_0^6 \int_0^2 y(4-x^2) dx dy \\
&= \int_0^6 y[4x - \frac{1}{3}x^3]_0^2 dy = \dots \\
z_0 &= \int_0^6 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} z dz dx dy = \int_0^6 \int_0^2 [\frac{1}{2}z^2]_0^{4-x^2} dx dy \\
&= \int_0^6 \int_0^2 8 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4 dx dy = \int_0^6 [8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5]_0^2 dy = \dots \\
\text{Schwerpunkt} &= (\frac{x_0}{m}, \frac{y_0}{m}, \frac{z_0}{m}).
\end{aligned}$$

125.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^1 x \sqrt{1-y^2} dy dx &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x \sqrt{1-y^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-y^2} [x^2]_0^{\sqrt{y}} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} dy = -\frac{1}{6} [(1-y^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

126. Aus  $(x, 2x^2) = (4y^2, y)$  folgt  $x = 2^{-\frac{4}{3}}$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^{2^{-\frac{4}{3}}} \int_{2x^2}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} 1 dy dx &= \int_0^{2^{-\frac{4}{3}}} [y]_{2x^2}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} = \int_0^{2^{-\frac{4}{3}}} \frac{1}{2}\sqrt{x} - 2x^2 dx = \\
&= [\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^3]_0^{2^{-\frac{4}{3}}} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

127. Wir benutzen die Substitution  $x = \cosh t$ ,  $dx = \sinh t$ ,  $a = 0$  ( $\cosh 0 = 1$ ),  $b > 0$  s.d.  $\cosh b = 4$ .

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^4 \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} 1 dy dx = 2 \int_1^4 \sqrt{x^2-1} dx \\
&= 2 \int_a^b \sinh^2 t dt = \int_a^b \cosh 2t - 1 dt = [\frac{1}{2} \sinh 2t - t]_a^b = \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= \int_1^4 \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} x dy dx = \int_1^4 2x \sqrt{x^2-1} dx \\
&= \frac{2}{3} [(x^2-1)^{\frac{3}{2}}]_1^4 = \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= \int_1^4 \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} x^2 dy dx = \int_1^4 2x^2 \sqrt{x^2-1} dx = 2 \int_a^b \cosh^2 t \sinh^2 t dt \\
&= 2 \int_a^b \sinh^2 t + \sinh^4 t dt = 2 \int_a^b \frac{1}{2} (\cosh 2t - 1) + \frac{1}{8} (3 - 4 \cosh 2t + \cosh 4t) dt \\
&= 2 \left[ \frac{1}{4} \sinh 2t + \dots \right]_a^b = \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_0 &= \int_1^4 \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} xy dy dx = \frac{1}{2} \int_1^4 x [y^2]_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} dx \\
&= \int_1^4 x(x^2-1) dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^4 = \dots
\end{aligned}$$

$$\text{Schwerpunkt} = \left( \frac{x_0}{m}, \frac{y_0}{m} \right).$$

128.

$$\begin{aligned}
\int_3^5 \int_{-2}^0 \int_0^1 (x+xz-y^2) dx dy dz &= \int_3^5 \int_{-2}^0 \left[ \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} z x^2 - y^2 x \right]_0^1 dy dz = \dots \\
\int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{3-2z} \int_0^{3-x-2z} x+z dy dx dz &= \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{3-2z} (x+z)(3-x-2z) dx dz = \dots
\end{aligned}$$

129.

$$R = \{(r, \phi, \psi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

$$x = r \cos \psi \cos \phi, \quad y = r \cos \psi \sin \phi, \quad z = r \sin \psi, \quad J = r^2 \cos \psi.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^5 \cos^3 \psi \sin \psi \sin 2\phi d\phi d\psi dr &= -\frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [r^5 \cos^3 \psi \sin \psi \cos 2\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5 \cos^3 \psi \sin \psi d\psi dr \\
&= -\frac{1}{8} \int_0^1 r^5 [\cos^4 \psi]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \frac{1}{8} \int_0^1 r^5 dr = \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

130. Für  $0 \leq z \leq 1$  und  $n \in \mathcal{N}$  sei

$$I_n(a) = \int_0^a \int_0^{a-x_n} \dots \int_0^{a-x_n-x_{n-1}-\dots-x_2} 1 dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Wir beweisen mit der Induktion, daß

$$I_n(a) = \frac{1}{n!} a^n,$$

und damit  $V = I_n(1) = \frac{1}{n!}$ .

Es ist  $I_1(a) = a$ . Falls  $I_n(a) = \frac{1}{n!}a^n$ , dann ist auch

$$\begin{aligned} I_{n+1}(a) &= \int_0^a \left( \int_0^{a-x_{n+1}} \dots \int_0^{(a-x_{n+1})-x_n-\dots-x_2} 1 dx_1 \dots dx_n \right) dx_{n+1} \\ &= \int_0^a I_n(a-t) dt = \frac{1}{n!} \int_0^a (a-t)^n dt \\ &= -\frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} [(a-t)^{n+1}]_0^a = \frac{1}{(n+1)!} a^{n+1}. \end{aligned}$$

### 7.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen, Existenz und Eindeutigkeitsätze

**Definition 7.1** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Dann heißt die Gleichung

$$(D) \quad y' = f(x, y)$$

eine **Differentialgleichung erster Ordnung**. Unter einer **Lösung** von (D) über einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  versteht man eine differenzierbare Funktion

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

i)  $x \in I$  impliziert  $(x, \varphi(x)) \in U$ ;

ii)  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$  für alle  $x \in I$ .

$f$  ist ein sogenanntes "Richtungsfeld": In jedem Punkt  $(x, y) \in U$  ist durch  $y' = f(x, y)$  die Steigung des Graphen von  $\varphi$  gegeben. Gesucht sind differenzierbare Funktionen, deren Graph in jedem Punkt die vorgegebene Steigung hat.

Die allgemeine Situation ist wie folgt:

**Definition 7.2** Ist  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte Funktion, dann heißt

$$y' = f(x, y)$$

ein **System von Differentialgleichungen erster Ordnung**. ( $x$  bezeichnet eine Zahl auf  $\mathbb{R}$ ,  $y$  aus  $\mathbb{R}^n$ ). Unter einer **Lösung** dieses Systems über einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  versteht man eine differenzierbare Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

i) Graph  $(\varphi) \subset U$ ;

ii)  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$  für alle  $x \in I$ .

Ausgeschrieben sieht die Gleichung so aus:

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

wobei  $y = (y_1, \dots, y_n)$  und  $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_n(x, y))$ .



BEWEIS. Sei die Differentialgleichung erfüllt. Da  $\varphi$  und  $f$  stetig sind, ist auch  $\varphi'$  stetig und es gilt

$$\int_{x_0}^x \varphi'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt,$$

also

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

Ist umgekehrt die Integralgleichung erfüllt, dann ist  $\varphi$  differenzierbar und  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ , q.e.d. ■

**Definition 7.5** Sei  $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine Funktion. Man sagt,  $f$  genüge in  $U$  einer **Lipschitz-Bedingung** (in  $y$ ) mit der Lipschitzkonstanten  $L \geq 0$ , wenn für alle  $(x, y), (x, \bar{y}) \in U$  gilt:

$$\|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq L \|y - \bar{y}\|.$$

BEMERKUNG. Sei  $U = I \times \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - y_0\| < r\}$ ,  $y_0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $0 < r \leq \infty$ .  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  sei stetig partiell nach  $y_1, \dots, y_n$  differenzierbar. Dann genügt  $f$  in jeder kompakten Teilmenge  $K$  von  $U$  einer Lipschitz-Bedingung, wobei die Lipschitz-Konstante von  $K$  abhängen kann.

BEWEIS. O.B.d.A. sei  $K = [a, b] \times \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - y_0\| \leq \rho\}$ . Dann ist  $K$  konvex. Wir setzen

$$M = \sup \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| : (x, y) \in K, i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

$M$  ist endlich, da  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  stetig für  $i, j = 1, \dots, n$ .

Für  $(x, \bar{y}), (x, \bar{y} + h) \in K$  liefert die Taylorentwicklung:

$$f_i(x, \bar{y} + h) = f_i(x, \bar{y}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \bar{y} + \mathbf{h}_i h) h_j$$

mit  $0 \leq \mathbf{h}_i \leq 1$  für  $1, \dots, n$ .

Setzt man  $y = \bar{y} + h$ , dann ist für alle  $(x, y), (x, \bar{y}) \in K$ :

$$|f_i(x, y) - f_i(x, \bar{y})| \leq nM \max\{|h_1|, \dots, |h_n|\} \leq nM \|y - \bar{y}\|$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Also ist

$$\|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq n\sqrt{n}M \|y - \bar{y}\|,$$

und man hat mit  $L := n\sqrt{n}M$  eine (von  $K$  abhängige) Lipschitz-Konstante, q.e.d. ■

**Satz 7.6 (Eindeutigkeitsatz):** Sei  $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$  offen und  $F : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine stetige Funktion, die lokal der Lipschitz-Bedingung genügt. Sind  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = f(x, y)$$

über einem Intervall  $I \subset \mathbf{R}$  mit  $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$  für ein  $x_0 \in I$ , so ist  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$  für alle  $x \in I$ .

BEWEIS. Wir zeigen, daß  $\varphi_1(x)$  und  $\varphi_2(x)$  für alle  $x \geq x_0$  übereinstimmen. (Der Fall  $x \leq x_0$  geht analog). Sei

$$K := \{x \in I : x \geq x_0 \text{ und } \varphi_1 = \varphi_2 \text{ auf } [x_0, x]\}.$$

Zu zeigen ist also

$$K = \{x \in I : x \geq x_0\}.$$

Sei  $b := \sup K$ . Wir unterscheiden mehrere Fälle:

- (1) Ist  $b \notin I$ , dann ist  $I$  rechtsseitig offen und  $b$  ist Endpunkt von  $I$  (eventuell  $b = \infty$ ). Auf  $[x_0, b[$  ist  $\varphi_1 = \varphi_2$ , also ist  $K = \{x \in I : x \geq x_0\}$ .
- (2) Ist  $b \in I$ , dann existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $K$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . Es ist  $\varphi_1(x_\nu) = \varphi_2(x_\nu)$  für alle  $\nu \in \mathbf{N}$ .

Da  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  stetig sind, ist auch  $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ . Also ist  $b \in K$ .

( $\alpha$ ) Ist  $b$  Endpunkt von  $I$ , ist man fertig.

( $\beta$ ) Ist  $b$  nicht Endpunkt von  $I$ , dann sei

$$c := \varphi_1(b) = \varphi_2(b).$$

Es gibt ein  $\epsilon_1 > 0$  und ein  $\delta > 0$ , so daß in

$$U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n : |x - b| \leq \epsilon_1, \|y - c\| \leq \delta\}$$

die Funktion  $f$  definiert ist und einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten  $L$  genügt. O.B.d.A. ist  $\epsilon_1$  so klein, daß

$$\|\varphi_i(x) - c\| \leq \delta \text{ für } |x - b| \leq \epsilon_1 \quad (i = 1, 2).$$

Sei  $\epsilon := \min(\epsilon_1, \frac{1}{2L}) > 0$ .  $\varphi_i(x) = c + \int_b^x f(t, \varphi_i(t)) dt$  für  $i = 1, 2$ . Für  $|x - b| \leq \epsilon_1$  gilt:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| &\leq \left| \int_b^x \|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| dt \right| \\ &\leq \left| \int_b^x L \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| dt \right| \\ &\leq L|x - b| \sup_{|t-b| \leq \epsilon} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|. \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\sup_{|x-b| \leq \epsilon} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| \leq L\epsilon \sup_{|t-b| \leq \epsilon} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|,$$

woraus wegen  $L\epsilon \leq \frac{1}{2}$  folgt:

$$\sup_{|x-b| \leq \epsilon} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| = 0.$$

Also ist  $\varphi_1 = \varphi_2$  auf  $[b - \epsilon, b + \epsilon]$  im Widerspruch zur Definition von  $b$ . Der Fall ( $\beta$ ) kann also nicht eintreten. Sonst ist aber immer  $K = \{x \in I : x \geq x_0\}$ , q.e.d. ■



BEISPIEL. Wir bringen ein Beispiel einer Differentialgleichung, für die der Eindeigkeitsatz nicht gilt:

$$y' = y^{2/3}.$$

Eine spezielle Lösung ist  $\varphi_0(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbf{R}$ . Andere Lösungen sind

$$\psi_a(x) = \frac{1}{27}(x-a)^3 \quad (a \in \mathbf{R}).$$

Es gibt mehrere Lösungen  $\varphi$  mit  $\varphi(a) = 0$ , nämlich  $\varphi_0, \psi_a$  und folgende zusammengesetzte Lösungen: Ist  $b \leq a$  und  $c \geq a$ , dann ist  $\phi$  definiert durch

$$\phi(x) = \begin{cases} \psi_b(x) & \text{für } x \leq b \\ 0 & \text{für } b \leq x \leq c \\ \psi_c(x) & \text{für } x \geq c \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichung mit  $\phi(a) = 0$ .

**Satz 7.7** (*Existenzsatz von Picard-Lindelöf*): Sei  $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Sei  $(x, b) \in U$ . Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  und über dem Intervall  $I = [a - \epsilon, a + \epsilon]$  eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

mit  $\varphi(a) = c$ .

BEWEIS. Es gibt ein  $\epsilon_1 > 0$ , ein  $\delta > 0$  und ein  $L > 0$ , so daß  $U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n : |x-a| \leq \epsilon_1, \|y-c\| \leq \delta\} \subset U$  und

$$\|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\|$$

für alle  $(x, y), (x, \bar{y}) \in U_1$ .

Sei  $M := \sup\{\|f(x, y)\| : (x, y) \in U_1\}$ . Es gilt  $M < \infty$ , da  $f$  stetig und  $U_1$  kompakt sind. Setze

$$\epsilon := \min\left(\epsilon_1, \frac{\delta}{M}\right).$$

Der Beweis beruht im wesentlichen auf dem **Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren**: Für  $x \in I$  wird rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &:= c \\ \varphi_{k+1}(x) &:= c + \int_a^x f(t, \varphi_k(t)) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Behauptung: Die Funktionenfolge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$  konvergiert gleichmäßig auf  $I$  gegen eine Lösung  $\varphi$  der Differentialgleichung.

- (1) Zu zeigen: Die Funktionen  $f(t, \varphi_k(t))$  sind definiert für alle  $k \in \mathbf{N}$ . Dazu genügt es zu zeigen:

$$\|\varphi_k(x) - c\| \leq \delta \text{ für alle } k \in \mathbf{N}.$$

Beweis durch Induktion nach  $k$ :

$k = 0$  ist trivial.

$k \rightarrow k + 1$ :

$$\|\varphi_{k+1}(x) - c\| \leq \left| \int_a^x \|f(t, \varphi_k(t))\| dt \right| \leq |x-a|M \leq \epsilon M \leq \delta.$$

(2) Behauptung:

$$\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| \leq ML^k \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Beweis durch Induktion nach  $k$ :

$k = 0$ :

$$\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| = \left\| \int_a^x f(t, c) dt \right\| \leq M|x-a|.$$

$k \rightarrow k+1$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| &\leq \left\| \int_a^x (f(t, \varphi_{k+1}(t)) - f(t, \varphi_k(t))) dt \right\| \\ &\leq \left| \int_a^x L \|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| dt \right| \\ &\leq \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!} \left| \int_a^x |t-a|^{k+1} dt \right| = ML^{k+1} \frac{|x-a|^{k+2}}{(k+2)!}. \end{aligned}$$

(3) Für  $k \geq 1$  sei  $\psi_k := \varphi_k - \varphi_{k-1}$ . Dann ist

$$\varphi_k = \varphi_0 + \sum_{\ell=1}^k \psi_\ell.$$

Da die Reihe  $\sum_{\ell=1}^{\infty} \psi_\ell$  auf dem Intervall  $I = [a - \epsilon, a + \epsilon]$  durch die Reihe

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} ML^{\ell-1} \frac{\epsilon^\ell}{\ell!} = \frac{M}{L} (e^{L\epsilon} - 1)$$

majorisiert wird, konvergiert die Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$  auf  $I$  gleichmäßig.

(4)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) =: \varphi(x)$  für alle  $x \in I$ . Für  $k \in \mathbf{N}$ ,  $x \in I$  sei

$$\begin{aligned} \phi_k(x) &:= f(x, \varphi_k(x)) \\ \phi(x) &= f(x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Nach (1) ist  $(x, \varphi_k(x)), (x, \varphi(x)) \in U_1$  für alle  $x \in I$  und alle  $k \in \mathbf{N}$ . Daher ist

$$\|\phi_k(x) - \phi(x)\| \leq L \|\varphi_k(x) - \varphi(x)\|.$$

Da auf  $I$  die Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$  gleichmäßig gegen  $\varphi$  konvergiert, konvergiert dort auch  $(\phi_k)_{k \in \mathbf{N}}$  gleichmäßig gegen  $\phi$ . Für  $x \in I$  ist dann

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k+1}(x) = c + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x f(t, \varphi_k(t)) dt \\ &= c + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x \phi_k(t) dt = c + \int_a^x \phi(t) dt \\ &= c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt. \end{aligned}$$

Nach dem Satz ist  $\varphi$  also eine Lösung der Differentialgleichung mit  $\varphi(a) = c$ , q.e.d. ■

BEMERKUNG. Sei  $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  eine geeignete Funktion.

$$(D) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ist eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung. Durch Zurückführung auf ein System von Differentialgleichungen erhält man den folgenden Satz:

Bei entsprechenden Voraussetzungen über  $f$  gibt es zu jedem  $(a, c) \in U$  genau eine Lösung  $\varphi$  mit  $\varphi(a) = c_0$  und  $\varphi^{(i)}(a) = c_i$  für  $i = 1, \dots, n-1$ , wobei  $c = (c_0, \dots, c_{n-1})$ .

Damit man eine eindeutige Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung erhält, muß man also als Anfangswert nicht nur den Wert der Funktion, sondern auch den Wert der ersten  $(n-1)$ -Ableitungen der Lösung in einem Punkt  $a$  des Definitionsintervalls  $I$  vorschreiben.

In der Physik kommen häufig Differentialgleichungen 2. Ordnung für den Ort eines Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit vor. Anfangswert ist hier Ort und Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt.

BEMERKUNG. Die Voraussetzung, daß  $f$  einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist nicht notwendig. Peano hat bewiesen, daß die Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  bereits dann eine Lösung zu einem vorgegebenen Anfangswert besitzt, falls  $f$  nur stetig ist. Jedoch ist dann die Lösung i.a. nicht eindeutig (vgl. das Beispiel oben).

## Aufgaben

1. Sei  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbf{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  eine nach der zweiten Variablen stetig partiell differenzierbare Funktion mit  $0 \notin f(U)$ . Zeige, daß durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in U$  jeweils genau eine Lösung der Differentialgleichungen

$$(I) \quad y' = f(x, y) \quad \text{bzw.} \quad (II) \quad y' = \frac{-1}{f(x, y)}$$

geht, und daß die Lösungskurven von (I) und (II) sich im Punkt  $(x_0, y_0)$  rechtwinkelig schneiden.

2. Löse folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} (x^2 - x)y &= y^2 + y; \\ 2xy(x+1)y' &= y^2 + 1; \\ x(x^2 - 6y^2)dy &= 4y(x^2 + 3y^2)dx; \\ (ax + hy)dx + (hx + by)dy &= 0; \\ (\cos x - x \cos y)dy - (\sin y + y \sin x)dx &= 0. \end{aligned}$$

3. Bestimme die orthogonalen Kurvenscharen zu:

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= c; \\ y^2 &= cx; \\ xy &= c(x-1)^2; \\ y &= c \ln |x|. \end{aligned}$$

4. Mit Hilfe des Picardschen Iterationsverfahrens bestimme die durch den Punkt  $(0, 1)$  gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y' = xy \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

5. Sei  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Funktion, die in einer Umgebung jedes Punktes des  $\mathbf{R}^2$  einer Lipschitzbedingung genügt. Ferner gelte

$$f(-x, y) = -f(x, y) \text{ für alle } x, y \in \mathbf{R}.$$

Beweise: Ist  $a \in \mathbf{R}_+^*$ , so geht jede Lösung

$$\varphi : ] - a, a[ \rightarrow \mathbf{R}$$

der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

bei Spiegelung an der  $y$ -Achse in sich über.

### 7.3 Topologische Räume

Ein topologischer Raum ist eine Menge  $X$  mit einer **Topologie**, d.h. einer Teilfamilie  $\tau$  von  $\mathcal{P}(X)$ , sodaß

- $\emptyset, X \in \tau$ ;
- $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$ ;
- Falls  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine Familie aus  $\tau$  ist, dann ist die Vereinigung  $\bigcup U_\alpha$  auch aus  $\tau$ .

Die Mengen aus  $\tau$  heißen **offene** Mengen. Analog zum Fall eines metrischen Raumes können wir folgende Begriffe daraus ableiten:

$A$  ist eine **Umgebung** eines Punktes  $x$ , falls  $U \in \tau$  existiert, mit  $x \in U \subset A$ ;  $A$  ist **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A$  offen ist; das **Innere**  $A^0$  einer Menge  $A$  ist die Vereinigung aller  $U \in \tau$  mit  $U \subset A$ ; der **Abschluß**  $\bar{A}$  von  $A$  ist  $X \setminus (X \setminus A)^0$ .

Falls  $A \subset X$ , dann ist  $x \in X$

- ein **Berührungspunkt** von  $A$ , falls jede Umgebung  $U$  von  $x$  nichtleeren Durchschnitt mit  $A$  hat (d.h.  $x \in \bar{A}$ );
- ein **Häufungspunkt** von  $A$ , falls für jede Umgebung  $U$  von  $x$ ,  $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ;
- ein **isolierter Punkt** von  $A$ , falls  $x \in \bar{A}$  aber  $x$  kein Häufungspunkt von  $A$  (d.h.  $x$  hat eine Umgebung  $U$ , sodaß  $U \cap A = \{x\}$ ).

Mit  $A^d$  bezeichnen wir die Menge aller Häufungspunkte von  $A$ . Es gilt also  $\bar{A} = A \cup A^d$ .

Die Menge  $A$  ist **perfekt**, falls  $A = A^d$  (d.h.  $A$  besitzt keine isolierten Punkte). Der Rand  $\partial A$  einer Menge  $A \subset X$  ist  $\bar{A} \cap \overline{CA}$ , d.h. die Menge aller Punkte  $x$ , sodaß jede Umgebung  $U$  von  $x$  nichtleeren Durchschnitt mit  $A$  und  $CA$  hat.  $\partial A$  ist abgeschlossen, und es gilt  $\partial(\partial A) \subset \partial A$ .

Eine Folge  $(x_n)$  aus einem topologischen Raum  $X$  **konvergiert** gegen  $x$ , falls gilt: jede Umgebung von  $x$  enthält fast alle  $x_n$ . Eine Teilmenge  $A$  von  $X$  liegt **dicht** in  $X$ , falls  $\overline{A} = X$ .  $X$  ist **separabel**, falls eine dichte, abzählbare Teilmenge von  $X$  existiert.

Eine Funktion  $f : (X, \tau) \rightarrow (X_1, \tau_1)$  ist **stetig**, falls  $f^{-1}(U) \in \tau$  für jede offene Menge  $U \subset X_1$ . Ein **Homöomorphismus** ist eine Bijektion  $f$ , sodaß sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig sind. Falls  $\tau$  und  $\tau_1$  Topologien auf  $X$  sind, dann sagt man, daß  $\tau$  **feiner** als  $\tau_1$  (bzw.  $\tau_1$  **größer** als  $\tau$ ) ist, wenn  $\tau_1 \subset \tau$  (d.h. die Identitätsfunktion  $\tau - \tau_1$ -stetig ist). Die Begriffe “gleichmäßig stetig”, “Lipschitz-stetig”, “Cauchy”, “vollständig” sind keine topologischen Begriffe und lassen sich nicht mit Hilfe von offenen Mengen definieren (siehe unten—uniforme Räume).

Es gelten folgende Beziehungen ( $A, B$  sind Teilmengen des topologischen Raumes  $X$ ):

$$\begin{aligned} A^{00} &= A^0, \\ \overline{\overline{A}} &= \overline{A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow A^0 \subset B^0 \text{ und } \overline{A} \subset \overline{B}; \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, (A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0; \\ A^0 &= A \setminus \partial A, \overline{A} = A \cup \partial A; \\ \partial(A \cup B) &\subset \partial A \cup \partial B, \partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B; \\ \partial(X \setminus A) &= \partial A, \partial U = \overline{U} \setminus U \text{ (falls } U \text{ offen);} \\ \partial A = \emptyset &\Leftrightarrow A \text{ gleichzeitig offen und abgeschlossen.} \end{aligned}$$

Eine Teilfamilie  $\mathcal{B}$  von  $\tau$  ist eine **Basis**, falls jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist.  $\mathcal{B}_1$  ist eine **Subbasis**, falls die Familie  $\mathcal{B}$  aller Mengen, die endliche Durchschnitte von Mengen aus  $\mathcal{B}_1$  sind, eine Basis bilden.

BEISPIELE.  $\{\{x\} : x \in X\}$  ist eine Basis für die **diskrete** Topologie  $\tau_D (= \mathcal{P}(X))$  auf  $X$ .

$\{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}$  ist eine Subbasis, aber keine Basis.

$\{U(x, \frac{1}{n}) : x \in X, n \in \mathbf{N}\}$  ist eine Basis für die natürliche Topologie  $\tau_d$  eines metrischen Raumes. Falls der metrische Raum  $X$  zusätzlich separabel ist (etwa mit dichter Teilmenge  $\{x_n\}$ ), dann ist  $\{U(x_n, \frac{1}{m})\}_{m,n}$  eine (abzählbare) Basis. In  $\mathbf{R}$  ist die Familie

$$\{]x, y[ : x, y \in \mathbf{R}, x < y\}$$

eine Basis für die natürliche Topologie. Die Familie

$$\{]x, \infty[ : x \in \mathbf{R}\} \cup \{]-\infty, y[ : y \in \mathbf{R}\}$$

ist eine Subbasis.

Es ist oft nützlich, einige topologische Begriffe mit Hilfe von Basen bzw. Subbasen umzuformulieren.

Seien  $X, Y$  topologische Räume mit Subbasen  $\mathcal{B}$  bzw.  $\mathcal{B}_1$  und Basen  $\tilde{\mathcal{B}}$  bzw.  $\tilde{\mathcal{B}}_1$ . Es gilt:

1.

$$f : X \rightarrow Y \text{ ist stetig} \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{U \in \mathcal{B}_1} f(x) \in U \Rightarrow \bigvee_{U_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_1} (x \in U_1 \wedge f(U_1) \subseteq U);$$

2.

$$x_n \rightarrow x \text{ in } X \Leftrightarrow \bigwedge_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} \left( x \in U \Rightarrow \bigvee_{n \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n \geq \mathbf{N}} x_n \in U \right);$$

3. Sei  $A \subseteq X$ ,  $x \in X$ . Dann gilt:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \bigwedge_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} (x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset)$$

usw.

**Beispiele von topologischen Räumen:**

- I. Wie wir gesehen haben, hat jeder metrische Raum eine natürliche Topologie  $\tau_d$ . Die offenen Kugeln bilden eine Basis. Insbesondere kann man auf jeder Menge  $X$  die diskrete Topologie  $\tau_D$  definieren. In diesem Raum sind **alle** Teilmengen offen.
- II. Andererseits hat jede Menge  $X$  eine sogenannte **indiskrete** Topologie  $\tau_I$ . Hier sind nur  $\emptyset$  und  $X$  offen. In diesem Raum konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt! Außerdem ist jede Funktion mit Werten in einem solchen Raum stetig.
- III. Auf jeder Menge  $X$  können wir die **ko-endliche** bzw. **ko-abzählbare** Topologie wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \tau_{cf} &= \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ ist endlich}\} \\ \tau_{cc} &= \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ ist abzählbar}\}. \end{aligned}$$

IV. Die “particular point”-Topologie. Falls  $X$  eine Menge und  $x_0 \in X$ , dann ist

$$\tau_{pp} = \{U \subset X : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

eine Topologie. In diesem Raum gilt: die konstante Folge  $(x_0, x_0, x_0, \dots)$  konvergiert gegen jeden Punkt des Raumes. Andererseits gilt: Eine Folge konvergiert nur dann gegen  $x_0$ , wenn fast alle  $x_n$  gleich  $x_0$  sind. Besonders wichtig ist der Spezialfall, wo  $|X| = 2$ . Dieser Raum heißt der **Sierpinski-Raum**.

V. Die **Sorgenfrey-Gerade**: Dies ist der Raum  $\mathbf{R}$  versehen mit der Topologie  $\tau_{ho}$  mit Basis

$$\{[x, y[ : x, y \in \mathbf{R}, x < y\}$$

$\tau_{ho}$  ist feiner als die gewöhnliche Topologie auf  $\mathbf{R}$ . In  $(\mathbf{R}, \tau_{ho})$  konvergiert  $(x_n)$  gegen  $x \Leftrightarrow x_n \rightarrow x$  für die gewöhnliche Topologie, und fast alle  $x_n$  sind größer-gleich  $x$ .

Weitere verwandte Topologien auf  $\mathbf{R}$  sind

$$\begin{aligned} \tau_c^r &\quad \text{mit Basis } \{[x, \infty[ : x \in \mathbf{R}\}; \\ \tau_o^r &\quad \text{mit Basis } \{]x, \infty[ : x \in \mathbf{R}\}; \\ \tau_c^l &\quad \text{mit Basis } \{]-\infty, x] : x \in \mathbf{R}\}; \\ \tau_o^l &\quad \text{mit Basis } \{]-\infty, x[ : x \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Die Beispiele oben zeigen, daß verschiedene Topologien auf einer Menge durchaus die gleichen konvergenten Folgen bestimmen können. Daher ist es manchmal notwendig, den Begriff der Konvergenz zu erweitern. Wir erwähnen kurz zwei solche Möglichkeiten—**Filter und Netze**.

**Definition 7.8** Sei  $X$  eine nichtleere Menge. Ein **Filter** auf  $X$  ist eine nicht-triviale Familie  $\mathcal{F}$  von Teilmengen aus  $X$ , sodaß

- a)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \neq \emptyset$ ;
- b)  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ ;
- c)  $A \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$ .

Zum Beispiel ist die Familie  $\mathcal{N}(x)$  aller Umgebungen eines Punktes  $x$  aus einem topologischen Raum  $X$  ein Filter (der **Umgebungsfilter** von  $x$ ).

Eine Familie  $\mathcal{F}$  von nichtleeren Teilmengen von  $X$  ist eine **Filterbasis**, falls

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigvee_{C \in \mathcal{F}} C \subset A \cap B.$$

In diesem Fall ist

$$\tilde{\mathcal{F}} = \left\{ B \subset X : \bigvee_{A \in \mathcal{F}} A \subset B \right\}$$

ein Filter auf  $X$ —der von  $\mathcal{F}$  erzeugte Filter.

Weitere Beispiele von Filtern:

- a) Sei  $A$  eine nichtleere Teilmenge von  $X$ . Dann ist  $\{A\}$  eine Filterbasis. Der erzeugte Filter  $\mathcal{F}(A)$  besteht aus allen Teilmengen von  $X$ , die  $A$  enthalten.
- b) Sei  $(x_n)$  eine Folge aus  $X$ . Dann ist die Familie aller Mengen der Form  $\{x_n : n \geq m\}$  ( $m \in \mathbf{N}$ ) eine Filterbasis. Der erzeugte Filter ist der **Fréchet-Filter** der Folge.

**Konvergenz von Filtern:** Sei jetzt  $\mathcal{F}$  ein Filter auf einem topologischen Raum  $X$ . Wir sagen, daß  $\mathcal{F}$  gegen  $x$  konvergiert (geschrieben:  $\mathcal{F} \dot{\rightarrow} x$ ), falls gilt: Der Umgebungsfilter von  $x$  ist gröber als  $\mathcal{F}$  (d.h. jede offene Menge  $U$ , die  $x$  enthält, ist aus  $\mathcal{F}$ ). Zum Beispiel konvergiert eine Folge  $(x_n)$  genau dann gegen  $x$ , wenn der entsprechende Fréchet-Filter in diesem Sinn konvergiert.

Mit Hilfe von Filtern kann man viele topologische Begriffe ausdrücken:

- a) Der Abschluß: Sei  $A$  eine Teilmenge des topologischen Raumes  $X$ ,  $x \in X$ . Dann gilt:  $x$  liegt genau dann in  $\overline{A}$ , wenn ein Filter  $\mathcal{F}$  auf  $A$  existiert, so daß der von  $\mathcal{F}$  erzeugte Filter (in  $X$ ) gegen  $x$  konvergiert.

**BEWEIS.** Wir bemerken zunächst, daß ein Filter auf  $A$  zwar kein Filter auf  $X$ , wohl aber eine Filterbasis darauf ist. Wir nehmen an, daß ein Filter  $\mathcal{F}$  auf  $A$  existiert, sodaß der erzeugte Filter  $\tilde{\mathcal{F}}$  gegen  $x$  konvergiert und zeigen:  $x \in \overline{A}$ . Sei  $U$  eine Umgebung von  $x$ . Es existiert ein  $B \in \tilde{\mathcal{F}}$ , sodaß  $B \subset U$ . Da  $B \in \tilde{\mathcal{F}}$ , existiert  $C \in \mathcal{F}$  mit  $C \subset B \subset U$ . Damit ist  $U \cap A \neq \emptyset$ . Sei umgekehrt  $x \in \overline{A}$ . Es gilt:  $U \in \mathcal{N}(x) \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ .  $\{U \cap A : U \in \mathcal{N}(x)\}$  hat damit die gewünschte Eigenschaft. ■

- b) Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn gilt: Für jedes  $x \in X$  und jeden Filter  $\mathcal{F}$  auf  $X$ ,

$$\mathcal{F} \rightarrow x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x).$$

( $f(\mathcal{F})$  bezeichnet den Filter auf  $Y$ , der von der Filterbasis  $\{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$  erzeugt wird.)

**Netze:** Eine **gerichtete Menge** ist eine geordnete Menge  $(X, \leq)$ , sodaß für jedes Paar  $x, y$  aus  $X$  ein  $z$  aus  $X$  existiert, mit  $x \leq z, y \leq z$ .

Ein **Netz** auf einer Menge  $X$  ist eine Familie  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  von Elementen aus  $X$ , die von einer gerichteten Menge indiziert wird. Ein Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  auf einem topologischen Raum **konvergiert gegen**  $x \in X$ , falls gilt:

$U$  offen in  $X$ ,  $x \in U \Rightarrow$  es existiert  $\beta \in A$ , sodaß  $x_\alpha \in U$  für  $\alpha \geq \beta$ .

Wie im Fall von Filtern lassen sich alle topologischen Begriffe mit Hilfe von Netzen definieren. Zum Beispiel:

- a)  $x \in \overline{D} \Rightarrow$  es existiert ein Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  auf  $D$ , sodaß  $x_\alpha \rightarrow x$ ;  
 b)  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn gilt: Für jedes Netz  $(x_\alpha)$  auf  $X$  und jedes  $x \in X$ ,  
 $x_\alpha \rightarrow x \Rightarrow f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ .

In der Tat sind die Theorien von Netzen und Filtern äquivalent. Dies sieht man wie folgt:

Jedes Netz erzeugt einen Filter—den Fréchet-Filter (Definition wie im Fall einer Folge);

Jeder Filter definiert ein Netz: Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter. Dann ist  $\mathcal{F}$  selber eine gerichtete Menge (wir definieren  $A \leq B$ , falls  $B \subset A$ ). Für jedes  $A \in \mathcal{F}$  wähle  $x_A \in A$ . Dann ist  $(x_A)_{A \in \mathcal{F}}$  ein Netz.

### Die Konstruktion von topologischen Räumen

In diesem Kapitel diskutieren wir einige Methoden, um komplizierte Räume aus einfacheren zu konstruieren.

**A. Teilräume:** Falls  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum ist, dann besitzt jede Teilmenge  $A$  eine natürliche Topologie  $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ . Auf diese Art z. B. werden Teilmengen von  $\mathbf{R}^n$  mit Topologien versehen. Wir listen einige einfache Eigenschaften von Teilräumen auf:

- (a) Falls  $\mathcal{B}$  eine Basis für  $\tau$  ist, dann bildet  $\mathcal{B}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{B}\}$  eine Basis für  $\tau_A$ ;  
 (b) Im Falle eines metrischen Raumes  $(X, d)$  induziert  $\tau$  die von der Metrik  $d|_A$  definierte Topologie auf einer Teilmenge  $A$ ;  
 (c) Falls  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Funktion zwischen topologischen Räumen ist, dann ist die Einschränkung von  $f$  auf eine Teilmenge  $A$  stetig für die Topologie  $\tau_A$ . Andererseits gilt: Falls  $f$  seine Werte in einer Teilmenge  $B$  von  $Y$  annimmt, dann ist  $f$   $\tau_B$ -stetig;  
 (d) Eine Teilmenge  $C$  von  $A$  ist  $\tau_A$ -abgeschlossen  $\Leftrightarrow C$  hat die Gestalt  $C_1 \cap A$ , wobei  $C_1$  in  $X$  abgeschlossen ist. Insbesondere gilt: Ist  $A$  in  $X$  abgeschlossen, dann ist  $C$  genau dann in  $A$  abgeschlossen, wenn  $C$  in  $X$  abgeschlossen ist.



Eine topologische Eigenschaft heißt **erblich**, falls jede Teilmenge  $A$  eines Raumes mit dieser Eigenschaft auch die Eigenschaft besitzt. Ein Beispiel einer solchen Eigenschaft ist die Metrisierbarkeit (d.h. die Eigenschaft, daß die Topologie von einer Metrik induziert wird).

Das Beispiel des nicht separablen Teilraumes  $(\mathbf{R}, \tau_D)$  der separablen Niemitskii-Ebene zeigt, daß Separabilität keine erbliche Eigenschaft ist. Daher betrachtet man folgende Variante davon, die trivialerweise erblich ist.

**Definition 7.9** *Ein topologischer Raum ist **abzählbar erzeugt**, falls  $\tau$  eine abzählbare Basis besitzt. Z.B. ist jeder separable metrische Raum abzählbar erzeugt. Es ist klar, daß jeder abzählbar erzeugte Raum separabel ist. Teilräume von abzählbar erzeugten Räumen sind selber abzählbar erzeugt und damit separabel. Daher sind Teilräume von separablen metrischen Räumen auch separabel.*

**Produkt Räume:** Falls  $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$  topologische Räume sind, dann ist die Familie aller Mengen der Gestalt

$$U_1 \times \dots \times U_n$$

(mit  $U_i \in \tau_i$ ) die Basis einer Topologie auf  $X = \prod_{i=1}^n X_i$ , der **Produkttopologie**.

**Eigenschaften:**

- (a) Eine Funktion  $f$  von einem topologischen Raum  $Y$  in  $X$  ist genau dann stetig, wenn jedes  $\pi_k f$  stetig ist ( $\pi_k$  ist die natürliche Abbildung von  $X$  in  $X_k$ );
- (b) Eine Folge  $(x_r)$  in  $X$  konvergiert genau dann gegen  $x$ , wenn gilt:  $\pi_k(x_r) \rightarrow \pi_k(x)$  für  $k = 1, \dots, n$ ;
- (c)  $X$  ist separabel, falls jedes  $X_k$  separabel ist;
- (d)  $X$  ist metrisierbar, falls jedes  $X_k$  metrisierbar ist.

**Quotientenräume:** Viele Flächen sind als sogenannte Quotientenräume von Polygonen konstruiert. Z.B. ist der Torus der Quotientenraum von  $I^2$  bzgl. folgender Äquivalenzrelation:

$$\begin{aligned} (x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow & (x = x' \wedge y = y') \vee (y = 0 \wedge y' = 1 \wedge x = x') \\ & \vee (y = 1 \wedge y' = 0 \wedge x = x') \vee (x = 0 \wedge x' = 1 \wedge y = y') \\ & \vee (x' = 1 \wedge x = 0 \wedge y = y'). \end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt die allgemeine Konstruktion. Wir betrachten zwei Mengen  $X$  und  $Y$  und eine Surjektion  $f : X \rightarrow Y$ , d.h.  $Y$  ist der Quotientenraum von  $X$  bzgl. der Äquivalenzrelation:  $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ . Falls  $X$  eine Topologie  $\tau$  besitzt, dann definieren wir die **Quotiententopologie**  $\bar{\tau}$  auf  $Y$  wie folgt:

$$\bar{\tau} = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \in \tau\}$$

(d.h.  $\tau$  ist die feinste Topologie auf  $Y$ , für die  $f$  stetig ist). Die entscheidende Eigenschaft dieser Topologie ist folgende: eine Abbildung  $g$  von  $Y$  in einen topologischen Raum  $Z$  ist genau dann stetig, wenn  $g \circ f$  stetig ist.

BEISPIELE.

I. Weitere Flächen, die als Quotientenräume von Polygonen darstellbar sind: der Torus, die Bretzel, die projektive Ebene, die Kleinsche Fläche usw.

II. Die Gerade mit zwei Ursprüngen: Hier ist

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(\xi_1, 0) : \xi_1 \in \mathbf{R}\} \\ X_2 &= \{(\xi_1, 1) : \xi_1 \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

und  $Y = X_1 \cup X_2|_{\sim}$ , wobei

$$\begin{aligned} X \sim Y \Leftrightarrow (x = y) \vee & (x = (\xi_1, 0) \wedge y = (\xi_1, 1) \wedge \xi_1 \neq 0) \\ & \vee (x = (\xi_1, 1) \wedge y = (\xi_1, 1) \wedge \xi_1 \neq 0) \end{aligned}$$

III. Die eingezwickte Ebene: Das ist  $\mathbf{R}^2|_{\sim}$ , wobei

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee (x = (\xi_1, 0) \wedge y = (\eta_1, 0) \quad (\xi_1, \eta_1 \in \mathbf{R})).$$

(Dies ist ein nicht metrisierbarer Quotientenraum eines metrischen Raumes).

Allgemeiner: Falls  $X$  ein topologischer Raum ist, mit Teilraum  $X_0$ , dann ist  $Y = X|_{\sim}$  der Raum  $X$  mit  $X_0$  **auf einen Punkt reduziert**, wobei

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \wedge (x \in X_0 \wedge y \in X_0).$$

BEISPIEL. Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $X_1 = X \times I$ ,  $X_0 = X \times \{1\}$ . Der entsprechende Quotientenraum ist der **Kegel** über  $X$ . ( $X \times I$  ist der **Zylinder** über  $X$ ).

V. Graphen: Dies sind topologische Räume eines sehr speziellen Types. Sie werden definiert als Quotientenräume von Geraden, indem man gewisse Endpunkte identifiziert. Die formelle Definition ist wie folgt:  $I_1, \dots, I_n$  sind Kopien von  $[0, 1]$ . Wir bezeichnen die Endpunkte von  $I_i$  mit  $P_i$  bzw.  $Q_i$ .  $\{S_1, \dots, S_r\}$  ist eine Partition der Menge  $\{P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n\}$ . Der entsprechende Graph ist der Quotientenraum  $X|_{\sim}$ , wobei  $X$  die disjunkte Vereinigung  $I_1 \coprod \dots \coprod I_n$  ist und  $\sim$  die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee \left( \bigvee_i x \in S_i \wedge y \in S_i \right)$$

Unsere Konstruktionen von topologischen Räumen sind alle Spezialfälle von zwei allgemeinen Konstruktionen:

**Initialtopologien:** Gegeben ist eine Familie  $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$  von topologischen Räumen, eine Menge  $X$  und für jedes  $\alpha \in A$  eine Abbildung  $f_\alpha$  von  $X$  in  $X_\alpha$ . Die **Initialtopologie** auf  $X$  ist die größte Topologie darauf, für die jedes  $f_\alpha$  stetig ist. Eine Subbasis für diese Topologie bildet die Familie aller Mengen der Gestalt  $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ , wobei  $\alpha \in A$  und  $U_\alpha$  in  $X_\alpha$  offen ist. Die charakteristische Eigenschaft der Initialtopologie ist die Tatsache, daß eine Abbildung  $f$  von einem topologischen Raum  $Y$  in  $X$  genau dann stetig für die Initialtopologie ist, wenn jedes  $f_\alpha \circ f$  (von  $Y$  in  $X_\alpha$ ) stetig ist.

Beispiele von Initialtopologien sind Teilräume und Produkte. Weitere Beispiele sind:

**Unendliche Produkte:**  $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$  ist eine Familie von topologischen Räumen. Sei  $X = \prod X_\alpha$  das kartesische Produkt,  $\pi_\alpha$  die natürliche Projektion von  $X$  auf  $X_\alpha$ . Die **Produkttopologie** auf  $X$  ist die von den  $\pi_\alpha$  induzierte Initialtopologie.

Entsprechende Versionen der Aussagen über endliche Produkte (bzw. abzählbare Produkte von metrischen Räumen) sind auch hier gültig.

**Projektive Limiten:** Ein weiteres Beispiel einer Initialtopologie liefern die projektiven Limiten, die wie folgt definiert werden. Gegeben ist eine Folge  $(X_n, \pi_n)$  von topologischen Räumen und (für jedes  $n \geq 1$ ) eine stetige Abbildung  $\pi_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ . Ein **Faden** ist eine Folge  $(x_n)$  aus dem kartesischen Produkt  $\prod_{n=1}^\infty X_n$ , sodaß  $\pi_n(x_n) = x_{n-1}$  für jedes  $n$ . Die Menge  $X$  aller Faden ist ein abgeschlossener Teilraum des Produktraumes  $\prod_{n=1}^\infty X_n$  und wird mit  $\varprojlim X_n$  bezeichnet.

BEISPIELE.

1. **Durchschnitte:** Sei  $X_0$  eine Menge,  $X_n$  eine Folge von Teilmengen, sodaß  $X_n \subseteq X_{n-1}$  für jedes  $n$ . Wir nehmen an, daß jedes  $X_n$  mit einer Topologie  $\tau_n$  versehen ist, sodaß  $\tau_n \supseteq \tau_{n-1}|_{X_n}$  für jedes  $n$ .  $(X_n)$  bildet dann ein projektives Spektrum und der Limes ist **der (topologische) Durchschnitt** der  $X_n$ . Als konkretes Beispiel sei

$$\begin{aligned} X_0 &= C([0, 1]) \\ X_n &= C^n([0, 1]). \end{aligned}$$

Der Durchschnitt ist der Raum  $C^\infty([0, 1])$  aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf  $[0, 1]$ . Dieser Raum spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Distributionen.

2. Sei  $X_n = C([-n, n])$  und sei  $\pi_n$  die natürliche Restriktionsabbildung von  $X_n$  in  $X_{n-1}$ . Der projektive Limes ist der Raum  $C(\mathbf{R})$  aller stetigen Funktionen auf  $\mathbf{R}$ . Die entsprechende Topologie heißt **die Topologie der fast gleichmäßigen Konvergenz**.
3. Das Beispiel  $X_n = [n, \infty[$ , wobei  $X = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} X_n = \emptyset$  zeigt, daß ein projektiver Limes trivial sein kann. Der folgende Satz beschreibt Situationen, wo diese Pathologie nicht stattfinden kann:

**Satz 7.10** 1. Falls jedes  $\pi_n$  surjektiv ist, dann ist auch die natürliche Abbildung  $\bar{\pi}_n$  von  $X$  in  $X_n$  surjektiv;

2. (abstrakter Satz von Mittag-Leffler:) Falls jedes  $X_n$  ein vollständiger metrischer Raum ist, die  $\pi_n$  alle Kontraktionen sind und  $\pi_n(X_n)$  immer dicht in  $X_{n-1}$  liegt, dann liegt  $\bar{\pi}_n(X)$  dicht in  $X_n$  für jedes  $n$ .

**Finaltopologien:** Diese Konstruktion ist dual zu der der Initialtopologie.  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  ist eine Familie von topologischen Räumen,  $X$  eine Menge. Für jedes  $\alpha$  ist eine Abbildung  $f_\alpha$  von  $X_\alpha$  in  $X$  gegeben. Dann ist

$$\left\{ U \subseteq X : \bigwedge_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha \right\}$$

eine Topologie auf  $X$ —die **Finaltopologie**.

Beispiele von Finaltopologien sind Quotientenräume. Weitere Beispiele sind disjunkte Vereinigungen und induktive Limiten.

**Zusammenhang:**

**Definition 7.11** Der topologische Raum  $(X, \tau)$  ist **zusammenhängend**, falls es keine Darstellung

$$X = U \cup V$$

gibt, wobei  $U, V$  offen und disjunkt sind (außer der trivialen Fälle  $U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset$ ). Allgemeiner: eine Teilmenge  $A \subseteq X$  ist zusammenhängend, wenn  $A$  mit der induzierten Topologie  $\tau_A$  zusammenhängend ist. Diese Definitionen können wie folgt formuliert werden:

- (a)  $X$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\emptyset$  und  $X$  die einzigen Teilmengen von  $X$  sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind;
- (b)  $A \subseteq X$  ist genau dann zusammenhängend, wenn gilt: Falls  $U, V$  disjunkte, offene Teilmengen von  $X$  sind, mit  $A \subseteq U \cup V$ , dann ist  $A \subseteq U$  oder  $A \subseteq V$ .

Beispiele von zusammenhängenden Räumen sind:

$$(X, \tau_I), \quad (X, \tau_{cf}) \quad (\text{falls } |X| = \infty);$$

Räume, die nicht zusammenhängend sind:

$$(X, \tau_D) \quad (\text{falls } |X| > 1), \quad Q, \quad (\mathbf{R}, \tau_{ho}).$$

**Hilfssatz 7.12** Falls  $A$  ein zusammenhängender Teilraum von  $X$  ist, dann ist auch jede Menge  $B$  mit  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$  zusammenhängend.

BEWEIS. Sei  $B$  wie oben mit  $B \subseteq U \cup V$ , wobei  $U$  und  $V$  in  $X$  offen und disjunkt sind. Es gilt dann  $U \cap A = \emptyset$  oder  $V \cap A = \emptyset$ , da  $A$  zusammenhängend ist. Damit ist  $U \cap \overline{A} = \emptyset$  bzw.  $V \cap \overline{A} = \emptyset$  und daher  $U \cap B$  bzw.  $V \cap B = \emptyset$ . q.e.d. ■

**Satz 7.13** Eine Teilmenge von  $\mathbf{R}$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $A$  ein Intervall ist.

BEWEIS.

- (a) Wir beweisen zunächst, daß jedes Intervall  $I$  zusammenhängend ist.

Fall 1)  $I = \mathbf{R}$ : Sei  $U$  eine nicht-leere Teilmenge von  $\mathbf{R}$ , die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Wir zeigen:  $U = \mathbf{R}$ . Wenn nicht, dann ist  $U$  eine disjunkte Vereinigung  $\bigcup_n I_n$  von offenen Intervallen, wobei mindestens eines davon nicht gleich  $\mathbf{R}$  ist. Damit hat dieses Intervall einen endlichen Endpunkt  $a$ . Es ist klar, daß  $a \notin U$  aber  $a \in \overline{U}$ —Widerspruch.

Fall 2)  $I$  ist ein offenes Intervall. Dann ist  $I$  zu  $\mathbf{R}$  homöomorph – q.e.d.

Fall 3)  $I$  ist ein abgeschlossenes oder halboffenes Intervall. Dann ist  $I$  der Abschluß seines Inneren und damit zusammenhängend nach dem Hilfssatz.

- (b) Wir zeigen jetzt, daß eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbf{R}$  ein Intervall ist. Es ist klar, daß jede zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbf{R}$  folgende Eigenschaft genießt: Falls  $a, b \in A$  mit  $a < b$ , dann gilt:  $x \in A$  für jedes  $x$  zwischen  $a$  und  $b$ . (Sonst wäre  $A$  in  $] - \infty, x[ \cup ] x, \infty[$  enthalten). Es ist eine leichte Übungsaufgabe zu zeigen, daß Mengen mit dieser Eigenschaft Intervalle sind. ■

**Satz 7.14** Sei  $A$  eine nicht-leere, zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes  $X$ ,  $\mathcal{A}$  eine Familie von zusammenhängenden Mengen, sodaß  $B \cap A \neq \emptyset$  für jedes  $B \in \mathcal{A}$ . Dann ist  $A \cup (\bigcup \mathcal{A})$  zusammenhängend.

BEWEIS. Sei  $A \cup (\bigcup \mathcal{A})$  in  $U \cup V$  enthalten, wobei  $U$  und  $V$  offen und disjunkt in  $X$  sind. O.B.d.A. können wir annehmen, daß  $V \cap A = \emptyset$ . Für jedes  $B \in \mathcal{B}$  gilt:  $U \cap B$  oder  $V \cap B$  ist leer. Da  $B \cap A \neq \emptyset$ , kann nur der zweite Fall eintreten. Damit gilt

$$V \cap (A \cup (\bigcup \mathcal{A})) = \emptyset.$$

■

**Korollar 7.15** (a) Sei  $\mathcal{A}$  eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von  $X$ , sodaß  $\bigcap \mathcal{A}$  nicht leer ist. Dann ist  $\bigcup \mathcal{A}$  zusammenhängend.

(b) Sei  $X$  ein topologischer Raum mit folgender Eigenschaft: Falls  $x, y \in X$ , dann existiert eine zusammenhängende Teilmenge, die sowohl  $x$  als auch  $y$  enthält. Dann ist  $X$  zusammenhängend.

(c) Sei  $(A_n)$  eine Folge von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raumes, sodaß für jedes  $n$ ,  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ . Dann ist  $\bigcup_n A_n$  zusammenhängend.

Mit Hilfe dieser Kriterien sieht man leicht:

- a) daß  $\mathbf{R}^n$  zusammenhängend ist;
- b) (allgemeiner) daß Produkte von zusammenhängenden Räumen zusammenhängend sind;
- c) daß sternförmige (insbesondere konvexe) Teilmengen von  $\mathbf{R}^n$  zusammenhängend sind.

**Satz 7.16** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Surjektion, wobei  $X$  zusammenhängend ist. Dann ist  $Y$  zusammenhängend.

BEWEIS. Falls  $Y$  nicht zusammenhängend wäre, dann würde eine nicht triviale Teilmenge  $U$  von  $Y$  existieren, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Dann hätte  $f^{-1}(U)$  die gleichen Eigenschaften in  $X$  – Widerspruch.

■

Dieser Satz impliziert den klassischen Zwischenwertsatz der Analysis I. Eine weitere Konsequenz ist, daß Quotientenräume von zusammenhängenden Räumen auch zusammenhängend sind. Insbesondere sind die Flächen, die als Quotientenräume von Polygonen konstruiert wurden, alle zusammenhängend.

Falls  $x$  ein Element des Raumes  $X$  ist, dann definieren wir die **Zusammenhangskomponente**  $C(x)$  wie folgt:  $C(x)$  ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen, die  $x$  enthält. In einem zusammenhängenden Raum  $X$  gilt:  $C(x) = X$  für jedes  $x \in X$ . Andererseits gilt für  $X = Q$ , daß  $C(x) = \{x\}$  für jedes  $x$ . Es folgt sofort aus der Definition und den obigen Ergebnissen, daß  $C(x)$  zusammenhängend und abgeschlossen ist.

Es gibt einige Varianten des Begriffes “zusammenhängend”, die manchmal von Bedeutung sind:

**Definition 7.17** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  ist

- a) **lokalzusammenhängend**, falls jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebungsbasis  $\mathcal{B}(x)$  besitzt, sodaß jedes  $U$  aus  $\mathcal{B}(x)$  zusammenhängend ist;
- b) **wegzusammenhängend**, falls für jedes Paar  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $c : [0, 1] \rightarrow X$  existiert, sodaß  $c(0) = x$ ,  $c(1) = y$ .
- c) **lokal-wegzusammenhängend**, falls jeder Punkt  $x$  eine Umgebungsbasis  $\mathcal{B}(x)$  besitzt, wobei jedes  $U \in \mathcal{B}(x)$  wegzusammenhängend ist.

Typische Beispiele von Räumen mit der letzten Eigenschaft sind offene Teilmengen von  $\mathbf{R}^n$ . Es ist klar, daß wegzusammenhängende Räume zusammenhängend sind. Sonst gibt es keine Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften. Es gilt allerdings:

**Satz 7.18** Falls  $X$  lokal-wegzusammenhängend ist, dann gilt:  $X$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist. (Damit stimmen die Begriffe “zusammenhängend” bzw. “wegzusammenhängend” für offene Teilmengen von  $\mathbf{R}^n$  überein.)

BEMERKUNG. In der Funktionentheorie spielt dieser Satz eine wichtige Rolle—siehe Vorlesung “Funktionentheorie”).

### Trennungsaxiome

**Definition 7.19** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt

$$T_0, \text{ falls } x \neq y \text{ in } X \Rightarrow \bigvee_{U \in \tau} (x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U);$$

$$T_1, \text{ falls } x \neq y \text{ in } X \Rightarrow \bigvee_{U \in \tau} (x \in U \wedge y \notin U);$$

$$T_2, \text{ falls } x \neq y \text{ in } X \Rightarrow \bigvee_{U, V \in \tau} U \cap V = \emptyset \wedge x \in U \wedge y \in V.$$

BEISPIELE.  $(X, \tau_T)$  ist nicht  $T_0$  (falls  $|X| \geq 2$ ). Der Sierpinski-Raum ist  $T_0$ , nicht aber  $T_1$ .  $(X, \tau_{cf})$  ist  $T_1$  aber nicht  $T_2$  (falls  $X$  unendlich). Metrische Räume sind  $T_2$ .

Folgende Stabilitätseigenschaften gelten trivialerweise für diese Eigenschaften:

$(X, \tau)$  ist  $T_?$  und  $\tau_1 \supseteq \tau \Rightarrow (X, \tau_1) \text{ } T_?$ ;

jeder Teilraum eines  $T_?$ -Raumes ist  $T_?$ ;

Produkte von  $T_?$ -Räumen sind  $T_?$  ( $? = 0, 1, 2$ ).

(Warnung: Quotientenräume von  $T_2$ -Räumen sind nicht notwendigerweise  $T_2$ ).

Es ist nützlich, diese Definitionen umzuformulieren: Zum Beispiel sind folgende Bedingungen äquivalent zur Tatsache, daß  $X$  ein  $T_1$ -Raum ist:

- a) jede einpunktige Teilmenge  $\{x\}$  von  $X$  ist abgeschlossen;
- b)  $\tau$  ist feiner als  $\tau_{cf}$ ;
- c) für  $x \in X$  gilt  $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}(x)} N$ .

Falls  $X$  ein  $T_1$ -Raum ist und  $x \in X$  bzw.  $y_1, \dots, y_n$  Punkte sind, die von  $x$  verschieden sind, dann existiert eine Umgebung  $N$  von  $x$  mit  $y_1 \notin N, \dots, y_n \notin N$ .

Daraus folgt leicht: Falls  $x$  ein Häufungspunkt einer Teilmenge  $A$  eines  $T_1$ -Raumes ist, dann enthält jede Umgebung  $N$  von  $x$  unendlich viele Punkte aus  $A$ .

Ein Raum  $(X, \tau)$  ist genau dann  $T_2$ , wenn

- a) für jedes  $x \in X$  gilt  $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}(x)} \overline{N}$ ; oder
- b) falls  $x, y \in X$  die Eigenschaft haben, daß für einen Filter  $\mathcal{F}$  auf  $X$  gilt:  $\mathcal{F} \rightarrow x$  und  $\mathcal{F} \rightarrow y$ , dann stimmen  $x$  und  $y$  überein (d.h. in  $T_2$ -Räumen haben konvergierende Filter (und daher konvergierende Folgen) eindeutig bestimmte Grenzwerte);
- c) die Diagonalmenge  $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$  ist eine abgeschlossene Menge in  $X \times X$ .

Daraus folgt: Falls  $f, g$  stetige Abbildungen von einem topologischen Raum  $X$  in einen  $T_2$ -Raum  $Y$  sind, dann ist die Koinzidenzmenge

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen. Insbesondere, falls  $f$  und  $g$  auf einer dichten Teilmenge von  $X$  übereinstimmen, dann ist  $f = g$ .

**Definition 7.20**  $(X, \tau)$  ist **regulär**, falls für jedes Paar  $x, C$ , wobei  $C$  abgeschlossen und  $x \notin C$  disjunkte, offene Mengen  $U$  und  $V$  existieren mit  $x \in U$ ,  $C \subseteq V$ .  $(X, \tau)$  ist **vollständig regulär**, falls für  $x, C$  wie oben eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  existiert, mit  $f(x) = 0$  und  $f(C) = 1$ .  $(X, \tau)$  ist **normal**, falls für jedes Paar  $C, D$  von disjunkten abgeschlossenen Teilmengen von  $X$ , disjunkte offene Mengen  $U, V$  existieren, sodaß  $C \subseteq U$ ,  $D \subseteq V$ .  $X$  ist

$$\begin{array}{ll} T_3, & \text{falls } X \text{ } T_2 \text{ und regulär ist;} \\ T_{3\frac{1}{2}}, & \text{falls } X \text{ } T_2 \text{ und vollständig regulär;} \\ T_4, & \text{falls } X \text{ } T_2 \text{ und normal ist.} \end{array}$$

Es gilt die Kette von Implikationen:

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Nur die Implikation  $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$  ist nicht trivial (siehe unten).

**BEISPIELE.** Jeder indiskrete Raum  $(X, \tau_I)$  (mit  $|X| \geq 2$ ) ist normal aber nicht  $T_0$ . Der Sierpinski-Raum ist normal aber nicht vollständig regulär.

Der folgende Raum ist  $T_2$  aber nicht  $T_3$ . Sei  $X = \mathbf{R}$ ,  $K = \{\frac{1}{k} : k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ .  $\tau$  ist die Topologie mit Basis

$$\left\{ \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[ : x \neq 0, n \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ \setminus K : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

$(\mathbf{R}, \tau)$  ist  $T_2$  aber nicht  $T_3$ .

**Definition 7.21** Seien  $A$  und  $B$  disjunkte Mengen in einem topologischen Raum  $X$ . Dann sind  $A$  und  $B$  **schwach-trennbar**, falls disjunkte offene Mengen  $U$  und  $V$  existieren, mit  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$ ;

**stark-trennbar**, falls eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  existiert, mit  $f = 0$  auf  $A$  und  $f = 1$  auf  $B$ .

Offensichtlich sind stark-trennbare Mengen schwach-trennbar. Mit Hilfe dieser Begriffe können wir die obige Definition wie folgt umschreiben:

$X$  ist genau dann  $T_2$ , wenn disjunkte Punkte schwach trennbar sind;

$X$  ist genau dann (vollständig) regulär, wenn gilt: jede abgeschlossene Menge ist von jedem nicht in  $C$  liegenden Punkt schwach (stark) trennbar.

$X$  ist genau dann normal, wenn disjunkte, abgeschlossene Teilmengen schwach getrennt werden können.

**Satz 7.22**  $(X, \tau)$  ist genau dann regulär, wenn für jedes  $x \in X$  die Familie  $\{\overline{N} : N \in \mathcal{N}(x)\}$  eine Umgebungsbasis für  $x$  ist.

Um die Definition der vollständigen Regularität umzuformulieren, führen wir folgende Schreibweise ein: Falls  $X$  ein topologischer Raum ist, dann bezeichnet  $C(X)$  den Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf  $X$ . Falls  $f \in C(X)$ , dann schreiben wir

$$\begin{aligned} Z(f) &= \{x \in X : f(x) = 0\} \\ C(f) &= \{x \in X : f(x) \neq 0\}. \end{aligned}$$

**Satz 7.23**  $(X, \tau)$  ist genau dann vollständig regulär, wenn  $\tau$  mit der Initialtopologie, die von den Funktionen aus  $C(X)$  definiert wird, übereinstimmt.

Wir werden jetzt zeigen, daß aus  $T_4$  die Bedingung  $T_{3\frac{1}{2}}$  folgt. Zunächst die Bemerkung, daß  $X$  genau dann normal ist, wenn gilt: Sei  $C$  abgeschlossen,  $U$  offen mit  $C \subseteq U$ . Dann existiert eine offene Menge  $V$  mit

$$C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

Für den nächsten Beweis benützen wir die sogenannten **dyadischen Zahlen**  $Q_d$ , wobei

$$Q_d = \{r \in \mathbf{Q} : r = k \cdot 2^{-n} \text{ mit } k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}.$$

$Q_d$  liegt dicht in  $\mathbf{R}$  und die Familie

$$\{]x, \infty[ : x \in Q_d\} \cup \{]-\infty, y[ : y \in Q_d\}$$

bildet eine Subbasis für die natürliche Topologie auf  $\mathbf{R}$ .

**Satz 7.24 (Das Lemma von Urysohn.)** Seien  $A, B$  abgeschlossene, disjunkte Teilmengen eines normalen Raumes. Dann sind  $A$  und  $B$  stark-trennbar.



BEWEIS. Für jede dyadische Zahl  $r \in [0, 1]$  werden wir unten eine offene Menge  $U(r)$  finden, sodaß

$$A \subseteq U(0) \subseteq U(r) \subseteq U(1) = X \setminus B$$

und  $\overline{U(r)} \subseteq U(r')$ , falls  $r < r'$ . Mit Hilfe dieser Familie definieren wir eine Funktion  $f$  wie folgt:

$$f(x) = \inf\{r : x \in U(r)\}.$$

Es gilt:  $f(x) = 0$  für  $x \in A$ ,  $f(x) = 1$  für  $x \in B$ ;

$$\{x : f(x) < a\} = \bigcup_{r < a} U(r) \quad (\text{eine offene Menge})$$

$$\{x : f(x) > a\} = \bigcup_{r > a} X \setminus \overline{U(r)} \quad (\text{auch eine offene Menge}).$$

Damit ist  $f$  stetig. Wir müssen nur mehr die Mengen  $U(r)$  konstruieren. Zunächst wählen wir  $U(\frac{1}{2})$ , sodaß

$$A \subseteq U\left(\frac{1}{2}\right) \subseteq \overline{U\left(\frac{1}{2}\right)} \subseteq X \setminus B (= U(1)).$$

Beim nächsten Schritt wählen wir  $U(\frac{1}{4})$  und  $U(\frac{3}{4})$ , sodaß

$$A \subseteq U\left(\frac{1}{4}\right) \subseteq \overline{U\left(\frac{1}{4}\right)} \subseteq U\left(\frac{1}{2}\right) \subseteq \overline{U\left(\frac{1}{2}\right)} \subseteq U\left(\frac{3}{4}\right) \subseteq \overline{U\left(\frac{3}{4}\right)} \subseteq U(1) \dots$$

usw. ■

Aus dem Lemma von Urysohn folgt die Implikation:  $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$ .

**Satz 7.25 Der Satz von Tietze.** Sei  $X$  ein  $T_4$ -Raum,  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge,  $f : A \rightarrow [-1, 1]$  stetig. Dann existiert eine stetige  $\tilde{f} : X \rightarrow [-1, 1]$ , sodaß  $\tilde{f}|_A = f$ .

BEWEIS. Wir konstruieren induktiv eine Folge  $(f_n)$  von stetigen Funktionen, sodaß  $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  die gewünschten Eigenschaften hat.

$n = 1$ : Sei

$$A_1 = \left\{x \in A : -1 \leq f \leq -\frac{1}{3}\right\},$$

$$B_1 = \left\{x \in A : \frac{1}{3} \leq f \leq 1\right\}.$$

Es existiert eine stetige Funktion  $f_1$  von  $X$  in  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ , sodaß  $f_1 = -\frac{1}{3}$  auf  $A_1$  bzw.  $f_1 = \frac{1}{3}$  auf  $B_1$ . Sei  $g_1 = f - f_1$ . Es gilt:  $g_1(A) \subseteq [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ . Wir setzen

$$A_2 = \left\{x \in A : -\frac{2}{3} \leq g_1 \leq -\frac{2}{9}\right\}$$

$$B_2 = \left\{x \in A : \frac{2}{9} \leq g_1 \leq \frac{2}{3}\right\}.$$

Wir bekommen eine stetige Funktion  $f_2 : X \rightarrow [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ , sodaß  $f_2 = -\frac{2}{9}$  auf  $A_2$  und  $f_2 = \frac{2}{9}$  auf  $B_2$ .  $g_2 = g_1 - f_2$  bildet  $A$  in  $[-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}]$  ab. Auf diese Art konstruieren wir eine Folge  $(f_n)$  von stetigen Funktionen auf  $X$ , sodaß

a)  $|f_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$  auf  $X$ ;

$$b) \quad \left| f - \sum_{k=1}^n f_k \right| \leq \left( \frac{2}{3} \right)^n \quad \text{auf } A.$$

$\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  hat dann die gewünschten Eigenschaften. ■

### Kompaktheit

Sei  $A$  eine Teilmenge einer gegebenen Menge  $X$ . Eine **Überdeckung** von  $A$  (in  $X$ ) ist eine Familie  $\mathcal{U}$  von Teilmengen von  $X$ , sodaß  $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ . Jede Teilfamilie von  $\mathcal{U}$ , die  $A$  überdeckt, heißt eine **Teilüberdeckung**. Die Überdeckung  $\mathcal{U}$  ist **offen**, falls jedes  $V \in \mathcal{U}$  offen ist.

**Definition 7.26** Eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt **quasi-kompakt**, falls jede offene Überdeckung von  $A$  (in  $X$ ) eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Man sieht leicht, daß  $A$  genau dann quasi-kompakt in  $X$  ist, wenn der Raum  $(A, \tau_A)$  quasi-kompakt ist. Der Raum  $A$  heißt **kompakt**, falls er quasi-kompakt und  $T_2$  ist.

Die Definition der Quasi-Kompaktheit läßt sich wie folgt umformulieren. Jede Familie  $\mathcal{C}$  von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  hat die **endliche Durchschnittseigenschaft**. D.h.: Falls  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$ , dann existiert eine endliche Teilfamilie  $C_1, \dots, C_n$  von  $\emptyset$ , sodaß  $C_n \cap \dots \cap C_1 = \emptyset$ .

Eine endliche Vereinigung  $C_1 \cup \dots \cup C_n$  von quasi-kompakten Mengen ist auch quasi-kompakt. Daher gilt: In einem  $T_2$ -Raum ist eine endliche Vereinigung von kompakten Mengen wieder kompakt.

**BEISPIEL.** Das Intervall mit drei Eckpunkten ist nicht kompakt, obwohl es die Vereinigung von zwei kompakten Teilmengen ist.

Beispiele von kompakten Mengen sind abgeschlossene, beschränkte Teilmengen von  $\mathbf{R}^n$ . Die Räume  $(X, \tau_I)$  sind alle quasi-kompakt aber nicht kompakt (außer wenn  $|X| = 1$ ).  $(X, \tau_D)$  ist nur dann kompakt, wenn  $X$  endlich ist.  $(X, \tau_{cf})$  ist quasi-kompakt.

**Hilfssatz 7.27** Sei  $A$  eine kompakte Teilmenge des  $T_2$ -Raumes  $X$ ,  $x \notin A$ . Dann sind  $x$  und  $A$  schwach-trennbar.

**BEWEIS.** Sei  $y \in A$ . Es existieren disjunkte, offene Mengen  $U_y$  und  $V_y$  mit  $x \in U_y$ ,  $y \in V_y$ .  $\{V_y : y \in A\}$  ist eine offene Überdeckung von  $A$  und hat daher eine endliche Teilüberdeckung  $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$ . Dann trennen  $U$  und  $V$   $x$  und  $A$ , wobei

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i} \quad \text{bzw.} \quad V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}.$$

■

**Satz 7.28** Seien  $A, B$  disjunkte, kompakte Teilmengen eines  $T_2$ -Raumes  $X$ . Dann sind  $A$  und  $B$  schwach (und damit stark-) trennbar.

**BEWEIS.** Ähnlich. ■

Es folgt sofort aus dem Hilfssatz, daß ein kompakter Teilraum eines  $T_2$ -Raumes automatisch abgeschlossen ist. Außerdem ist jede abgeschlossene Teilmenge eines quasi-kompakten Raumes selber quasi-kompakt (und damit ist jeder abgeschlossene Teilraum eines kompakten Raumes kompakt). Daher ist ein kompakter Raum normal.

**Satz 7.29** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, wobei  $X$  quasi-kompakt ist. Dann ist  $f(X)$  quasi-kompakt.

BEWEIS. Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $f(X)$  in  $Y$ . Dann ist  $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$  eine offene Überdeckung von  $X$  und hat daher eine endliche Teilüberdeckung  $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$ .  $\{U_1, \dots, U_n\}$  ist dann eine Überdeckung von  $f(X)$ . ■

Damit sind Quotientenräume von quasi-kompakten Räumen auch quasi-kompakt.

**Korollar 7.30** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig, wobei  $X$  kompakt und  $Y$   $T_2$ . Dann ist  $f$  abgeschlossen, d.h.

$$A \text{ abgeschlossen in } X \Rightarrow f(A) \text{ abgeschlossen in } Y.$$

Daher ist eine stetige Bijektion  $f : X \rightarrow Y$  ( $X, Y$  wie oben) automatisch ein Homöomorphismus.

In der Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen" wird folgende Charakterisierung von kompakten Teilmengen von  $C(I)$  verwendet, um den Existenzsatz von Peano zu beweisen:

**Satz 7.31 Satz von Arzela-Ascoli.** Eine abgeschlossene, gleichmäßige beschränkte Teilmenge  $A$  von  $C(I)$  ist genau dann kompakt, wenn  $A$  gleichgradig-stetig ist. ( $C(I)$  betrachtet man als metrischen Raum mit der Supremumsnorm).

**Kompaktheit in metrischen Räumen:** In metrischen Räumen gibt es verschiedene äquivalente Charakterisierungen von kompakten Mengen, die wir jetzt untersuchen.

**Definition 7.32** Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist

a) **total beschränkt**, falls

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{x_1, \dots, x_n \in X} A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon);$$

b) **folgen-kompakt**, falls jede Folge  $(x_n)$  aus  $A$  eine konvergierende Teilfolge hat (mit Grenzwert aus  $A$ );

c)  **$\sigma$ -kompakt**, falls jede Folge  $(x_n)$  aus  $A$  einen Häufungspunkt  $x \in A$  hat, d.h. ein  $x$ , sodaß

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \{n : d(x_n, x) < \epsilon\} \text{ ist unendlich.}$$

Unser Hauptsatz über Kompaktheit lautet wie folgt:

**Satz 7.33** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a)  $X$  ist kompakt;

b)  $X$  ist vollständig und total beschränkt;

c)  $X$  ist  $\sigma$ -kompakt;

d)  $X$  ist folgenkompakt.

Der Beweis gliedert sich in eine Reihe von Hilfssätzen.

**Hilfssatz 7.34** Sei  $(X, d)$  folgenkompakt. Dann ist  $X$  separabel.

BEWEIS. Für jedes  $\epsilon > 0$  existiert (nach dem Lemma von Zorn) eine Teilmenge  $A_\epsilon$  von  $X$ , die maximal ist bzgl. der folgenden Eigenschaft:

$$x, y \in A, x \neq y \Rightarrow d(x, y) \geq \epsilon.$$

$A_\epsilon$  ist endlich (sonst enthält  $A_\epsilon$  eine Folge  $(x_n)$  von verschiedenen Elementen. Diese Folge hat keine konvergente Teilfolge).  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n}$  ist dann eine dichte, abzählbare Teilmenge von  $X$ . ■

**Hilfssatz 7.35** Falls  $(X, d)$  folgenkompakt ist, dann ist  $X$  kompakt.

BEWEIS. Nach dem Hilfssatz ist  $X$  separabel und besitzt daher eine abzählbare Basis  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung.

Behauptung:  $\mathcal{U}$  enthält eine abzählbare Teilüberdeckung. Denn sei  $x \in X$ . Es existiert ein  $U_x \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U_x$  und damit ein  $U_{n_x}$  mit  $x \in U_{n_x} \subseteq U_x$ . Die Familie  $\{U_{n_x} : x \in X\}$  ist damit eine abzählbare Teilüberdeckung.

Sei nun  $(V_n)$  eine abzählbare Teilüberdeckung von  $\mathcal{U}$ . Wir nehmen an, daß keine endliche Teilfamilie von  $(V_n)$   $X$  überdeckt und führen dies zum Widerspruch. Es existiert damit für jedes  $n$  ein  $x_n \notin \bigcup_{k \leq n} V_k$ . Die Folge  $(x_n)$  besitzt eine konvergierende Teilfolge  $(x_{n_k})$ . Sei  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . Es existiert  $N$  mit  $x \in V_N$ . Damit sind fast alle  $x_{n_k}$  aus  $V_N$ —Widerspruch. ■

**Hilfssatz 7.36** Falls  $(X, d)$  kompakt ist, dann ist  $X$   $\sigma$ -kompakt.

BEWEIS. Sei  $(x_n)$  eine Folge aus  $X$ . Wir zeigen, daß  $(x_n)$  einen Häufungspunkt besitzt. Sei

$$B_k = \overline{\{x_k, x_{k+1}, \dots\}}.$$

Aus der Kompaktheit folgt  $\bigcap B_k \neq \emptyset$  (endliche Durchschnittseigenschaft). Jedes  $x \in \bigcap B_k$  ist ein Häufungspunkt für  $(x_n)$ . ■

**Hilfssatz 7.37** Falls  $X$   $\sigma$ -kompakt ist, dann ist  $X$  folgenkompakt.

BEWEIS. Sei  $(x_n)$  eine Folge,  $x$  ein Häufungspunkt. Wir konstruieren wie folgt eine Teilfolge, die gegen  $x$  konvergiert.

Wähle  $n_1$  so, daß  $d(x, x_{n_1}) < 1$ ;

Wähle  $n_2 > n_1$ , sodaß  $d(x, x_{n_2}) \leq \frac{1}{2}$ ;

⋮

Wähle  $n_k > n_{k-1}$ , sodaß  $d(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{k}$  usw. ■

**Hilfssatz 7.38** Sei  $(X, d)$  kompakt. Dann ist  $X$  total-beschränkt und vollständig.

BEWEIS. Es ist klar, daß  $X$  totalbeschränkt ist.

Vollständigkeit: Sei  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge. Eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  konvergiert gegen  $x$ . Man sieht leicht, daß  $(x_n)$  auch gegen  $x$  konvergiert. ■

**Hilfssatz 7.39** Sei  $(X, d)$  total-beschränkt und vollständig. Dann ist  $X$  kompakt.

BEWEIS. Zunächst zeigen wir, daß jede Folge aus einem total beschränkten Raum eine Cauchy Teilfolge besitzt. Denn es gibt endlich viele offene Kugeln mit Radius 1, etwa  $U_1^1, \dots, U_{n_1}^1$ , die  $X$  überdecken. Eine davon enthält unendlich viele Terme der Folge. Wir bezeichnen diese Kugel mit  $U_1$ . Es existieren damit eine Teilfolge  $(x_n^1)$  von  $(x_n)$ , sodaß  $(x_n^1)$  in  $U_1$  liegt.  $U_1$  ist selber totalbeschränkt. Damit können wir eine Teilfolge  $(x_n^2)$  von  $(x_n^1)$  finden und eine Kugel  $U_2$  vom Radius  $\frac{1}{2}$ , sodaß  $(x_n^2)$  in  $U_2$  liegt. Auf diese Weise konstruieren wir

- a) eine Folge  $(U_k)$  von offenen Kugeln, wobei der Radius von  $U_k$  gleich  $2^{-k+1}$  ist;
- b) eine Folge  $((x_n^k)_n)_k$  von Folgen, sodaß  $(x_n^k)_n$  eine Teilfolge von  $(x_n^{k-1})_n$  ist. Außerdem liege  $(x_n^k)$  in  $U_k$ . Betrachte das Schema

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & & \\ \mathbf{x}_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & \dots & & \\ x_1^2 & \mathbf{x}_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Die Diagonalfolge  $(x_n^n)$  ist dann eine Cauchy Teilfolge von  $(x_n)$ .

Falls  $X$  noch dazu vollständig ist, dann konvergiert diese Teilfolge. Daher ist  $X$  folgenkompakt und damit kompakt.

Damit ist der Hauptsatz bewiesen. ■

**Korollar 7.40** Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung des kompakten metrischen Raumes  $(X, d)$ . Es existiert ein  $\eta > 0$ , sodaß jede Teilmenge  $A$  von  $X$  mit Durchmesser  $< \eta$  in einem  $U$  aus  $\mathcal{U}$  enthalten ist.

BEWEIS. Wir können annehmen, daß  $\mathcal{U}$  endlich ist, etwa  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ . Wäre die Aussage falsch, dann würde eine Folge  $(A_n)$  von Teilmengen existieren, mit  $\text{diam } A_n \leq \frac{1}{n}$ , sodaß  $A_n$  in keinem  $U_j$  enthalten ist. Wähle  $x_n \in A_n$  und sei  $(x_{n_k})$  eine konvergierende Teilfolge von  $(x_n)$ , etwa  $x_{n_k} \rightarrow x$ . Es existiert  $i$  und  $\epsilon > 0$  mit  $x \in U(x, \epsilon) \subseteq U_i$  und damit ein  $N$ , sodaß  $d(x, x_N) < \frac{\epsilon}{3}$  und  $\text{diam}(A_N) < \frac{\epsilon}{3}$ . Es gilt dann

$$A_N \subseteq U(x, \epsilon) \subseteq U_i$$

—Widerspruch. ■

Eine solche Zahl  $\eta$  heißt **Lebesgue-Zahl** für die Überdeckung.

Wir beweisen jetzt einen berühmten Satz von Tychonov, der zeigt, daß Produkte von quasi-kompakten Räumen quasi-kompakt sind. Dazu verwenden wir folgenden Begriff:

**Definition 7.41** Ein **Ultrafilter** auf einer Menge  $X$  ist ein Filter, der maximal bzgl. der Relation "enthalten in" ist, d.h.: Falls  $\mathcal{G}$  ein weiterer Filter auf der Menge ist, mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ , dann gilt:  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ . Es folgt sofort aus dem Lemma von Zorn, daß jeder Filter in einem Ultrafilter enthalten ist. Ultrafilter können wie folgt charakterisiert werden:

**Satz 7.42** Ein Filter  $\mathcal{F}$  auf einer Menge  $X$  ist genau dann ein Ultrafilter, wenn gilt:

$$A \subseteq X \Rightarrow A \in \mathcal{F} \text{ oder } X \setminus A \in \mathcal{F}.$$

BEWEIS.  $\Rightarrow$ : Es existiere  $A \subseteq X$  mit  $A \notin \mathcal{F}$  und  $X \setminus A \notin \mathcal{F}$ . Sei  $\mathcal{G} = \{B \subseteq X : A \cup B \in \mathcal{F}\}$ .  $\mathcal{G}$  ist ein Filter,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ , aber  $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$  da  $X \setminus A \in \mathcal{G}$ —Widerspruch.

$\Leftarrow$ : Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter mit dieser Eigenschaft und sei  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ . Wir zeigen:  $A \in \mathcal{G} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ . Wenn  $A \notin \mathcal{F}$ , dann gilt  $X \setminus A \in \mathcal{F}$  und damit  $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{G}$ —Widerspruch.

Falls  $a \in X$ , dann ist die Menge aller Teilmengen von  $X$ , die  $a$  enthalten, ein Ultrafilter. Ein Ultrafilter  $\mathcal{U}$  ist genau dann von dieser Form, wenn  $\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A \neq \emptyset$ . Solche Ultrafilter heißen **fixiert**. Sonst ist ein Ultrafilter **frei**. Das typische Beispiel eines freien Ultrafilters ist ein Ultrafilter, der feiner ist als der Frechet-Filter auf  $\mathbf{N}$  (d.h. der Filter aller co-endlichen Teilmengen von  $\mathbf{N}$ ). ■

Der Zusammenhang mit Kompaktheit (bzw. Quasi-Kompaktheit) wird im folgenden Satz hergestellt:

**Satz 7.43** a) Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter auf einem quasi-kompakten Raum  $X$ . Dann besitzt  $\mathcal{F}$  einen Häufungspunkt  $x$  (d.h.  $x$  liegt im Abschluß jeder Menge von  $\mathcal{F}$ );

b) Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter auf einem topologischen Raum mit  $\mathcal{F} \rightarrow x$ . Dann ist  $x$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{F}$ .

c)  $x$  ist genau dann ein Häufungspunkt eines Filter  $\mathcal{F}$ , wenn ein Filter  $\mathcal{G}$  existiert, mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  und  $\mathcal{G} \rightarrow x$ .

d) Sei  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf einem topologischen Raum  $X$ ,  $x$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{U}$ . Dann konvergiert  $\mathcal{U}$  gegen  $x$ ;

Kombinieren wir diese Aussagen, so bekommen wir das Ergebnis: In einem quasi-kompakten Raum konvergiert jeder Ultrafilter.

Umgekehrt gilt: Sei  $X$  ein topologischer Raum, in dem jeder Ultrafilter konvergiert. Dann ist  $X$  quasi-kompakt.

BEWEIS. Wir beweisen, daß abgeschlossene Teilmengen von  $X$  die endliche Durchschnittseigenschaft besitzen. Sei daher  $\mathcal{C}$  eine Familie von abgeschlossenen Mengen, sodaß für jede endliche Teilfamilie  $C_1, \dots, C_n$  gilt:

$$C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset.$$

Wir behaupten:  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$ .

Aus obiger Eigenschaft folgt, daß die Familie aller solchen endlichen Durchschnitte eine Filterbasis bildet. Diese Filterbasis ist in einem Filter enthalten und dieser wiederum in einem Ultrafilter  $\mathcal{U}$ .  $\mathcal{U}$  ist nach Voraussetzung konvergent, etwa gegen  $x$ .  $x$  ist ein Häufungspunkt von  $\mathcal{U}$  und damit enthalten in

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \overline{C} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

■

**Satz 7.44** Sei  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine Familie von quasi-kompakten Räumen. Dann ist das Produkt  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  auch quasi-kompakt. Die gleiche Aussage gilt für kompakte Räume.

BEWEIS. Sei  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ .  $\pi_\alpha(\mathcal{U})$  ist ein Ultrafilter auf  $X_\alpha$  und damit konvergent — etwa gegen  $x_\alpha$ . Daraus folgt leicht, daß  $\mathcal{U} \rightarrow x$  (wobei  $x = (x_\alpha)$ ).

■

### Uniforme Räume

Uniforme Räume sind Strukturen, die eine Stellung zwischen topologischen und metrischen Räumen einnehmen. Sie spielen die gleiche Rolle bei gleichmäßiger Stetigkeit wie topologische Räume bei Stetigkeit.

**Definition 7.45** Eine Pseudometrik auf einem Raum  $X$  ist eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}_+$ , sodaß

- a)  $d(x, y) = d(y, x)$  ( $x, y \in X$ );
- b)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  ( $x, y, z \in X$ );
- c)  $d(x, x) = 0$  (folgt aus a) und b)).

Eine Familie  $\mathcal{D}$  von Pseudometriken auf  $X$  heißt **trennend**, falls

- d)  $x \neq y \Rightarrow$  es existiert  $d \in \mathcal{D}$  mit  $d(x, y) \neq 0$  ( $x, y \in X$ ).

Eine Familie  $\mathcal{D}$  heißt **ein Kegel**, falls

- e)  $d_1, d_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow \max(d_1, d_2) \in \mathcal{D}$ ;
- f)  $d \in \mathcal{D}, l > 0 \Rightarrow ld \in \mathcal{D}$ .

Falls  $\mathcal{D}$  ein trennender Kegel auf  $X$  ist, dann ist eine Pseudometrik  $d$  auf  $X$  **gleichmäßig stetig** bzgl.  $\mathcal{D}$ , falls gilt

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{d_1 \in \mathcal{D}} \bigwedge_{x, y \in X} d_1(x, y) \leq 1 \Rightarrow d(x, y) \leq \epsilon.$$

Wir bezeichnen mit  $\tilde{\mathcal{D}}$  die Familie aller Pseudometriken auf  $X$ , die bzgl.  $\mathcal{D}$  gleichmäßig stetig sind.

Eine **Uniformität** auf  $X$  ist ein trennender Kegel  $\mathcal{D}$  von Pseudometriken auf  $X$  (wobei wir zwei solche Uniformitäten  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{D}_1$  identifizieren, falls  $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}_1$ ). (Genauer:  $\mathcal{D}$  heißt eine **Basis** für die Uniformität).

Falls  $\mathcal{D}$  eine trennende Familie von Pseudometriken auf  $X$  ist, dann ist die Familie  $\overline{\mathcal{D}}$  aller Pseudometriken der Gestalt

$$\max(l_1 d_1, \dots, l_n d_n),$$

wobei die  $l_i$  positive reelle Zahlen sind und  $d_1, \dots, d_n$  eine endliche Familie aus  $\mathcal{D}$  ist, ein Kegel und damit eine Basis für eine Uniformität auf  $X$ .  $\mathcal{D}$  heißt dann eine **Subbasis** für diese Uniformität.

### Beispiele von uniformen Räumen:

- I. Metrische Räume: Falls  $(X, d)$  ein metrischer Raum ist, dann ist  $\{d\}$  eine Subbasis für eine Uniformität auf  $X$  — **die metrische Uniformität**.
- II. Topologische Räume: Falls  $X$  ein  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raum und  $f$  eine stetige Funktion von  $X$  in  $\mathbf{R}$  ist, dann ist

$$d_f : (x, y) \rightarrow |f(x) - f(y)|$$

eine Pseudometrik auf  $X$ . Die Familien  $\{d_f : f \in C(X)\}$  bzw.  $\{d_f : f \in C^b(X)\}$  sind Kegel und erzeugen damit Uniformitäten auf  $X$  — die  $C(X)$ - bzw.  $C^b(X)$ -**Uniformität**. ( $C^b(X)$  bezeichnet die Menge der beschränkten Funktionen in  $C(X)$ ).

Mit Hilfe von Uniformitäten definieren wir:

**Gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen:**  $f : (X, \mathcal{D}) \rightarrow (Y, \mathcal{D}_1)$  ist gleichmäßig-stetig, falls gilt:

$$\bigwedge_{d_1 \in \mathcal{D}_1} \bigvee_{d \in \mathcal{D}} \bigwedge_{x, y \in X} d(x, y) \leq 1 \Rightarrow d_1(f(x), f(y)) \leq 1;$$

**Cauchy-Netze:** Ein Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  aus  $(X, \mathcal{D})$  ist Cauchy, falls

$$\bigwedge_{d \in \mathcal{D}} \bigvee_{\gamma \in A} \bigwedge_{\alpha, \beta \geq \gamma} d(x_\alpha, x_\beta) \leq 1;$$

**Konvergenz:** Ein Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  aus  $X$  konvergiert gegen  $x$ , falls

$$\bigwedge_{d \in \mathcal{D}} \bigvee_{\beta \in A} \bigwedge_{\alpha \geq \beta} d(x_\alpha, x) \leq 1;$$

**Vollständigkeit:**  $(X, \mathcal{D})$  ist **vollständig**, falls jedes Cauchy-Netz aus  $X$  konvergent ist.

**Eine Topologie:** Falls  $d$  eine Pseudometrik auf  $X$  ist, dann definieren wir offene und abgeschlossene Kugeln wie folgt:

$$\begin{aligned} U_d(x, \epsilon) &= \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\} \\ \overline{U_d(x, \epsilon)} &= \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Die Familie aller Kugel  $\{U_d(x, \epsilon) : x \in X, d \in \mathcal{D}, \epsilon > 0\}$  ist eine Basis für eine Topologie auf  $X$  — **die von der Uniformität erzeugte Topologie**. (In der Tat bilden die Mengen  $\{U_d(x, 1) : d \in \mathcal{D}, x \in X\}$  eine Basis.)

**Satz 7.46** *Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  ist genau dann uniformisierbar (d.h.  $\tau$  wird von einer Uniformität erzeugt), wenn  $X$   $T_{3\frac{1}{2}}$  ist.*



BEWEIS.

- a) Falls  $X$  ein  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raum ist, dann trennt die Familie  $C(X)$   $X$ . Die  $C(X)$ -Uniformität erzeugt die ursprüngliche Topologie.
- b) Sei  $\mathcal{D}$  eine Uniformität auf  $X$ , die  $\tau$  erzeugt.  $\tau$  ist  $T_2$ . Denn für  $x \neq y$  aus  $X$  existieren  $d \in \mathcal{D}$  und  $l > 0$ , sodaß  $d(x, y) = l$ .  $U_d(x, \frac{l}{3})$  und  $U_d(y, \frac{l}{3})$  sind disjunkte offene Mengen.  $\tau$  ist  $T_{3\frac{1}{2}}$ : Sei  $x \in X$  und  $C$  in  $X$  abgeschlossen, sodaß  $x \notin C$ . Es existiert ein  $d \in \mathcal{D}$ , sodaß  $U_d(x, 1) \cap C = \emptyset$ . Die Funktion

$$f : y \mapsto \inf\{d(y, z) : z \in C\}$$

ist stetig,  $f(x) \geq 1$  und  $f = 0$  auf  $C$ .

q.e.d. ■

Analog wie im topologischen Fall können wir folgende Konstruktionen auf uniformen Räumen durchführen. Initialuniformitäten, Finaluniformitäten, Produkte, Teilräume, disjunkte Vereinigungen, produktive Limiten, induktive Limiten.

**Initialstrukturen:** Gegeben ist eine Familie  $(X_\alpha, \mathcal{D}_\alpha)$  von uniformen Räumen, eine Menge  $X$  und, für jedes  $\alpha \in A$ , eine Abbildung  $f_\alpha : X \mapsto X_\alpha$ . Dann ist die Familie aller Pseudometriken der Gestalt

$$(x, y) \rightarrow d(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \quad (\alpha \in A, d \in \mathcal{D}_\alpha)$$

eine Subbasis für eine Uniformität auf  $X$ —die **Initialuniformität**. Beispiele davon sind Teilräume, Produkte, Durchschnitte, projektive Limiten.

**Finalstrukturen:** Gegeben ist eine Familie  $(X_\alpha, \mathcal{D}_\alpha)$  von uniformen Räumen, eine Menge  $X$  und für jedes  $\alpha \in A$  eine Abbildung  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ . Wir definieren eine Uniformität auf  $X$  wie folgt:  $\mathcal{D}$  ist die Menge aller Pseudometriken auf  $X$ , sodaß für jedes  $\alpha$ ,  $d \circ f_\alpha$  auf  $X_\alpha$  gleichmäßig stetig ist. (Warnung: Es ist nicht immer der Fall, daß  $\mathcal{D}$  die Punkte aus  $X$  trennt.) Beispiele von Finalstrukturen sind: disjunkte Vereinigungen, Vereinigungen, induktive Limiten usw.

**Die kanonische Darstellung eines uniformen Raumes:** Sei  $(X, \mathcal{D})$  ein uniformer Raum. Für jedes  $d$  aus  $X$  definieren wir einen vollständigen metrischen Raum  $\widehat{X}_d$  wie folgt: Zunächst ist  $X_d$  der Quotientenraum  $X|_{\sim}$ , wobei  $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ .  $X_d$  ist ein metrischer Raum (mit der Metrik

$$([x], [y]) \rightarrow d(x, y),$$

die wir auch mit  $d$  bezeichnen werden).  $\widehat{X}_d$  ist die Vervollständigung von  $(X_d, d)$ . Falls  $d \leq d_1$ , dann existiert eine natürliche Abbildung  $\pi_{d_1, d}$  von  $\widehat{X}_{d_1}$  in  $\widehat{X}_d$  (mit Lipschitz-Konstante  $\leq 1$ ).

$$\{\pi_{d_1, d} : \widehat{X}_{d_1} \rightarrow \widehat{X}_d; d, d_1 \in \mathcal{D}, d \leq d_1\}$$

ist ein projektives System. Sein projektiver Limes ist vollständig und heißt **die Vervollständigung** von  $X$ , geschrieben:  $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{D}})$ . Dieser Raum besitzt folgende universelle Eigenschaft:

Es existiert ein uniformer Isomorphismus  $i : X \rightarrow \widehat{X}$ , sodaß  $i(X)$  dicht in  $\widehat{X}$  liegt. Falls  $f : X \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig ist, wobei  $Y$  vollständig, dann existiert eine (eindeutig bestimmte) gleichmäßig-stetige Erweiterung  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow Y$ .

Falls  $X$  vollständig, dann ist  $i$  surjektiv, d.h. der vollständige Raum  $X$  ist der projektive Limes des obigen Spektrums von vollständigen metrischen Räumen. Diese Darstellung heißt die **kanonische Darstellung** von  $X$ .

**Definition 7.47** Ein uniformer Raum  $(X, \mathcal{D})$  ist **kompakt**, falls  $(X, \tau_\infty)$  kompakt ist;  
**totalbeschränkt**, falls

$$\bigwedge_{d \in \mathcal{D}} \bigvee_{x_1, \dots, x_n \in X} X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_d(x_i, 1);$$

**präkompakt**, falls  $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{D}})$  kompakt ist.

**Satz 7.48** Für einen uniformen Raum  $(X, \mathcal{D})$  gilt:  $X$  ist genau dann totalbeschränkt, wenn  $X$  präkompakt ist.

Jeder kompakte, topologische Raum  $(X, \tau)$  ist  $T_4$  und daher uniformisierbar. In der Tat gilt:

**Satz 7.49** Falls  $(X, \tau)$  kompakt ist, dann existiert **genau eine** Uniformität  $\mathcal{D}$  auf  $X$ , die  $\tau$  erzeugt.

Als Beispiele von Vervollständigungen bringen wir einen einheitlichen Zugang zu einigen wichtigen sogenannten Kompaktifizierungen:

**Die Samuel-Kompaktifizierung:** Sei  $(X, \mathcal{D})$  ein uniformer Raum. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_p &= \{d \in \mathcal{D} : X_d \text{ ist präkompakt} \} \\ &= \{d \in \mathcal{D} : \widehat{X}_d \text{ ist kompakt} \}. \end{aligned}$$

Die Vervollständigung von  $(X, \mathcal{D}_p)$ , d.h. der projektive Limes des Systems

$$\{\pi_{d_1, d} : \widehat{X}_{d_1} \rightarrow \widehat{X}_d : x, x_1 \in \mathcal{D}_p, d \leq d_1\}$$

ist ein kompakter uniformer Raum  $\sigma X$ , der  $X$  als dichten Teilraum enthält.  $\sigma X$  heißt die **Samuel-Kompaktifizierung** von  $X$  und besitzt folgende universelle Eigenschaft: Jede gleichmäßig-stetige Abbildung  $f$  von  $X$  in einen kompakten Raum  $Y$  hat eine (eindeutig bestimmte) stetige Erweiterung  $\widehat{f}$ , wobei  $\widehat{f} : \sigma X \rightarrow Y$ .

**Die Stone-Čech-Kompaktifizierung:** Die Stone-Čech-Kompaktifizierung eines  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raumes  $X$  ist die Vervollständigung  $\beta X$  von  $X$  bzgl. der  $C^b$ -Uniformität (bzw. die Samuel-Kompaktifizierung von  $X$  bzgl. der  $C(X)$ -Uniformität.)  $\beta X$  enthält  $X$  als dichte Teilmenge und jede stetige Abbildung  $f$  von  $X$  in einen kompakten Raum  $Y$  hat eine stetige Erweiterung  $\widetilde{f}$ , wobei  $\widetilde{f} : \beta X \rightarrow Y$ .

**Die Reelkompaktifizierung**  $\nu X$  eines  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raumes  $X$  ist die Vervollständigung von  $X$  bzgl. der  $C(X)$ -Uniformität.

## Aufgaben

1. Sei  $S^1 = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 : \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1\}$ ; ferner sei  $f : S^1 \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Abbildung. Zeige, daß eine orthonormale Basis  $e_1, e_2$  von  $\mathbf{R}^2$  existiert mit  $f(e_1) = f(e_2)$ .
2. Zeige, daß  $\mathbf{R}^n$  nicht die Fixpunkteigenschaft besitzt.

3. Gebe explizit einen Homöomorphismus  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow B_2^n$  an.

$$(B_2^n := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 := (\sum \xi_i^2)^{\frac{1}{2}} < 1\})$$

4. Berechne die eulersche Charakteristik folgender Mannigfaltigkeiten:  $S^2, nT, (nT, K), (nT, P)$

5. Seien  $\partial B_3^\infty := \{x \in \mathbf{R}^3 : \max_{1 \leq i \leq 3} |\xi_i| = 1\}$  und

$$\partial B_3^1 := \{x \in \mathbf{R}^3 : \sum_{i=1}^3 |\xi_i| = 1\}$$

Zeige explizit, daß

$$\chi(\partial B_3^\infty) = \chi(\partial B_3^1) = 2$$

6. Sei  $d$  eine Metrik auf  $X$ . Zeige, daß  $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$  und  $d_2(x, y) = \arctan d(x, y)$  Metriken auf  $X$  sind.

7. Zeige, daß die Abstandsfunktion  $d(\cdot, A)$  Lipschitz - stetig ist mit den Konstanten 1.

8. Für  $p > 0$  sei

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (x = (\xi_1, \dots, \xi_n))$$

Skizziere für  $n = 2$  folgende Mengen

$$\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_{\frac{1}{2}} \leq 1\} \text{(i)}$$

$$\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_1 \leq 1\} \text{(ii)}$$

$$\text{(iii)} \quad \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_3 \leq 1\}.$$

9. Zeige, daß  $(x, y) \mapsto \|x - y\|_{\frac{1}{4}}$  keine Metrik auf  $\mathbf{R}^2$  ist.

10. Sei  $f : X \rightarrow Y$  Lipschitz-stetig: Zeige:

a)  $(x_n)$  Cauchy in  $X \Rightarrow f(x_n)$  Cauchy in  $Y$ .

Gilt die gleiche Aussage

b) falls  $f$  gleichmäßig stetig?

c) falls  $f$  stetig?

11. Zeige:  $\pi_k : I^{\mathbf{N}} \rightarrow I$  ist Lipschitz-stetig. (Berechne die Lipschitz-Konstante von  $\pi_k$ ).

12. Zeige  $x_n \rightarrow x$  in  $I^{\mathbf{N}} \Leftrightarrow \bigwedge_{k \in \mathbf{N}} \pi_k(x_n) \rightarrow \pi_k(x)$ .

13. Die tryadische Darstellung  $\sum a_n/3^n$  einer Zahl  $x \in [0, 1]$  ist nicht eindeutig bestimmt. Trotzdem ist die Abbildung

$$(\xi_n) \mapsto \sum 2\xi_n/3^n$$

von  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$  auf die Cantormenge injektiv. Beweise dies.

14. Ist  $Q^2$  dicht in  $\mathbf{R}^2$  (mit der Postamtmetriek).
15. Zeige  $\ell^2$  ist separabel. Für welche  $p$  ist  $\ell^p$  separabel?
16. Sei  $f : (X, d) \rightarrow (X, d_1)$  stetig. Zeige:
- $\bar{d} : (x, y) \mapsto d(x, y) + d_1(f(x), f(y))$  ist eine Metrik auf  $X$ .
  - $d$  und  $\bar{d}$  sind (topologisch) äquivalent.
  - $f$  ist Lipschitz-stetig bezgl.  $\bar{d}$ .
17. Sei  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d_1)$  stetig. Zeige:  $U \subseteq Y$  ist eine  $G_\delta$ -Menge  $\Rightarrow f^{-1}(U)$  ist eine  $G_\delta$  in  $X$ .
18. Seien  $X_0 \subseteq X_1$  Teilmengen des metrischen Raumes  $X$ . Zeige:  
 $X_1$  eine  $G_\delta$ -Menge in  $X$  und  $X_0$  eine  $G_\delta$ -Menge in  $X_1 \Rightarrow X_0$  ist  $G_\delta$  in  $X$ .
19. Sei  $X$  metrisch,  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann gilt:
- $$A = \bigcap U_n, \text{ wobei } U_n = \{x \in X : d(x, A) < \frac{1}{n}\} \text{ offen.}$$
- (d.h.  $A$  ist eine  $G_\delta$ -Menge)
20. Bestimme eine explizite Metrik  $d$  auf  $\mathbf{R} \setminus Q$ , sodaß  $(\mathbf{R} \setminus Q, d)$  vollständig ist.  
 Aufgabe Zeige:  $\{T \in M_n(C) : T \text{ diagonalisierbar}\}$  liegt dicht in  $M_n(C)$ . ( $M_n(C)$  bezeichnet die Familie aller  $n \times n$  komplexen Matrizen mit der natürlichen Topologie.)
21. Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Zeige:  $X$  und  $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$  sind homöomorph.
22. Sei  $(U_n)$  eine Folge von Teilmengen des metrischen Raumes  $X$ . Zeige:  $G = \bigcap U_n$  ist zu einem abgeschlossenem Teilraum von  $\prod U_n$  homöomorph.
23.  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  heißt von unten halbstetig (l.s.c.), falls gilt: für jedes  $t \in \mathbf{R}$  ist die Menge  $\{f > t\}$  offen. Zeige:  $A$  ist genau dann offen, wenn gilt  $\chi_A$  ist l.s.c.
24. Sei  $(f_n)$  eine (nach oben beschränkte) Folge von Funktionen von  $X$  in  $\mathbf{R}$ , wobei jedes  $f_n$  l.s.c. ist. Zeige:  $f = \sup_n f_n$  ist l.s.c.
25. Sei  $X \neq \emptyset$  ein vollständiger metrischer Raum,  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  l.s.c. Zeige, daß eine offene, nicht-leere Teilmenge  $U$  von  $X$  existiert, mit  $\sup\{f(x) : x \in U\} < \infty$  (Verwende den Satz von Baire mit  $A_n = \{f \leq n\}$ .)
26. Sei  $(E, |||)$  ein Banachraum,  $|||_1$  eine zweite, von unten halbstetige Norm auf  $E$ . Zeige:  $|||_1$  ist stetig. (Benutze 30.)
27. Zeige:  $Q$  ist keine  $G_\delta$ -Menge in  $\mathbf{R}$  (benutze den Satz von Baire).
28. Sei  $X$  eine abzählbare Menge. Zeige: es existiert eine Familie  $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$  von unendlichen Teilmengen von  $X$ , wobei  $A$  überzählbar ist, sodaß  $X_\alpha \cap X_\beta$  endlich ist, falls  $\alpha \neq \beta$ . (Wähle  $X = \mathbf{Q}, A = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ . Für  $\alpha \in A$ , sei  $X_\alpha$  die Elemente einer injektiven Folge von Rationalzahlen, die gegen  $\alpha$  konvergiert).

29. Konstruiere Beispiele:

- a) eines Raums  $X$  mit verschiedenen Topologien  $\tau_1, \tau_2$  mit den gleichen konvergierenden Folgen;
- b) eines Raumes  $X$  mit einer Teilmenge  $A$  und  $x \in \overline{A}$ , sodaß keine Folge aus  $A$  gegen  $x$  konvergiert.

30. Folgende Aussagen sind äquivalent

- (i)  $f : X \rightarrow Y$  ist stetig
- (ii)  $\forall B \subseteq Y \ f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$
- (iii)  $\forall B \subseteq Y \ \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$

31. Seien  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  stetig. Ist  $f$  surjektiv und  $g \circ f$  ein Homöomorphismus, so sind  $f$  und  $g$  Homöomorphismen.

32. Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Teilmengen von  $X$ . Zeige:

$$\overline{\bigcup_n A_n} = \bigcup_n \overline{A_n} \cup \bigcap_m \overline{\bigcup_n A_{n+m}}$$

33. Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Bijektion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (i)  $f$  ist ein Homöomorphismus
- (ii)  $\forall A (\subseteq X)$  abg.:  $f(A)$  ist abgeschlossen
- (iii)  $\forall U (\subseteq X)$  offen  $f(U)$  ist offen

34. Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv,  $x_1 R x_2 :\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ . Ist  $f$  abgeschlossen oder offen, so ist  $X/R$  homöomorph zu  $Y$ .

35. Sei  $X$  ein separabler topologischer Raum,  $U$  eine offene Teilmenge. Zeige:  $U$  ist auch separabel.

36. Welche Buchstaben des Alphabets haben einen euler'schen Weg?

37. Zeige: Es existieren höchstens 5 regelmäßige Polytope. (Bezeichne mit  $p$  die Seitenzahl einer Seitenfläche des Polytops, bzw. mit  $q$  die Anzahl der Kanten, die im einen Eckpunkt gemeinsam zusammenkommen. Aus der Formel  $V - E + F = 2$ , leite die Beziehungen

$$E = \frac{2q}{2p + 2q - pq}, \quad V = \frac{4p}{2p - 2q - pq}, \quad F = \frac{4q}{2p + 2q - pq}$$

ab. Zeige: Die einzigen positiven ganzen Zahlen  $p, q$  für die  $E, V, F$  aus  $\mathbb{N}$  gilt, sind  $\{3, 3\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 3\}, \{3, 5\}$ .

(Zusatzfrage: Was sind die entsprechenden Polytope?)

38. Seien  $\{X_i\}_{i \in I}$  zusammenhängende Räume. Zeige:  $\prod_{i \in I} X_i$  ist auch zusammenhängend.

39. Sei  $f : X \times Y \rightarrow Z$  surjektiv und getrennt stetig (d.h. für jedes  $x \in X$  ist die Abbildung  $y \mapsto f(x, y)$  stetig bzw. für jedes  $y \in Y$  ist  $x \mapsto f(x, y)$  stetig.) Zeige  $X$  und  $Y$  zusammenhängend  $\Rightarrow Z$  zusammenhängend.
40. Seien  $A$  und  $B$  abgeschlossene Teilmengen eines topologischen Raumes  $X$ . Zeige:  $A \cup B$  und  $A \cap B$  zusammenhängend  $\Rightarrow A$  und  $B$  zusammenhängend.
41. Zeige: Die Menge aller Polynome ist ein zusammenhängender Teilraum von  $C([0, 1])$ .
42. Zeige:  $X$  ist genau dann zusammenhängend, wenn gilt: Jede stetige Funktion  $f$  von  $X$  in  $\{0, 1\}$  ist konstant.
43. Die Menge aller Drehungen (als Teilmenge des Raumes  $M_2$  der reellen  $2 \times 2$  Matrizen) ist zusammenhängend. Ist die Menge aller orthonormalen  $2 \times 2$  Matrizen zusammenhängend?
44. Falls  $X$  ein lokalzusammenhängender Raum ist, dann ist  $C(x)$  offen für jedes  $x \in X$ . Gilt die umgekehrte Aussage?
45. Sei  $X = \mathbf{R}^n$ . Wir betrachten  $X$  als einen topologischen Raum mit der sogenannten Zariski Topologie. Das ist die Topologie, die Mengen der Gestalt  $\{x \in X : p(x) \neq 0\}$  ( $p$  eine Polynom) als Subbasis hat. Zeige:  $X$  ist  $T_1$ , nicht aber  $T_2$ .
46. Sei  $X$  eine Teilmenge von  $\mathbf{R}$ , die die Fixpunkteigenschaft besitzt. Zeige:  $X$  ist ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall. (Zeige zunächst, daß  $X$  zusammenhängend ist.)
47. Falls  $X$  und  $Y$   $T_2$ -Räume sind, dann ist  $X \times Y$  auch  $T_2$ .
48. Sei  $X$  ein  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raum und bezeichne mit  $A$  die Menge aller stetigen Funktionen von  $X$  in  $[0, 1]$ . Zeige:  $x \mapsto (f(x))_{f \in A}$  ist ein Homöomorphismus von  $X$  auf eine Teilmenge von  $[0, 1]^A$ .
49. Sei  $X$  ein  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raum mit abzählbarer Basis  $(U_n)$ . Wähle eine dichte abzählbare Teilmenge  $\{x_n\}$  aus  $X$ . Sei  $f : X \rightarrow [0, 1]$  eine stetige Funktion, sodaß  $f(x) = 1$  und  $f = 0$  auf  $X \setminus U$ . Benutze die Funktionen  $(f_n)$  wie oben um zu zeigen, daß  $X$  zu einem Teilraum von  $[0, 1]^{\mathbf{N}}$  homöomorph ist.
50. Gelten die Aussagen: Jeder  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raum mit abzählbarer Basis ist normal? Jeder  $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raum mit abzählbarer Basis ist metrisierbar?
51. Ein topologischer Raum ist Lindelöf, falls gilt: Jede offene Überdeckung hat eine abzählbare Teilüberdeckung. Zeige: Jeder separabler metrischer Raum ist Lindelöf.
52. Das stetige Bild eines Lindelöf-Raums ist Lindelöf.
53. Sei  $X$  ein topologischer Raum mit der folgenden Eigenschaft: Jede abzählbare offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung. Zeige: Jede stetige reellwertige Funktion auf  $X$  ist beschränkt.
54. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K$  ein kompakter Teilraum,  $U$  offen mit  $K \subseteq U \subseteq X$ . Zeige:  $d(K, X \setminus U) > 0$ .
55. Sei  $X$  kompakt,  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  l.s.c. Zeige:  $f$  ist nach oben beschränkt.

56. Zeige: Ein Lindelöf Raum mit der Eigenschaft von der Aufgabe 69. ist kompakt.
57. Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von einem topologischen Raum  $X$ ,  $A$  eine Teilmenge von  $X$ . Zeige:
- $A$  ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt:  $\bigwedge_{U \in \mathcal{U}} A \cap U$  ist  $\tau_U$ -abgeschlossen
  - $\overline{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{A \cap U}$ . (Abschluß in  $(U, \tau_U)$ ).
58. Eine Familie  $\{A_\alpha\}$  in  $X$  ist **lokal-endlich**, falls gilt  $\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{U \in \mathcal{N}(x)} \{\alpha : U \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$  ist endlich. Zeige: Falls  $\{A_\alpha\}$  lokal-endlich, dann gilt:  $\overline{\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha}$
59. Sei  $f : X \rightarrow [0, 1]$  stetig. Zeige:  $f^{-1}(\{0\})$  ist eine  $G_\delta$ -Menge und  $f^{-1}([0, 1])$  ist eine  $F_\sigma$ -Menge.
60. Sei ein  $T_4$ -Raum,  $A \subseteq X$  eine abgeschlossene  $G_\delta$ -Menge,  $U \subseteq X$  eine offene  $F_\sigma$ -Menge. Zeige: Es existiert
- eine stetige Funktion  $f$  von  $X$  in  $[0, 1]$ , mit  $A = f^{-1}(\{0\})$ ;
  - eine stetige Funktion  $g$  von  $X$  in  $[0, 1]$ , mit  $U = f^{-1}([0, 1])$ .
- (ad.a): Sei  $X \setminus A = \bigcup C_n$ . Es existiert eine Folge  $(f_n)$  von stetigen Funktionen, wobei  $f_n = 0$  auf  $A$  und  $f_n = 1$  auf  $C_n$ . Benutze die  $(f_n)$ , um  $f$  zu konstruieren.)
61. Sei  $r : X \rightarrow X$  eine Retraktion. Gilt die Aussage:  $X_0 = r(X)$  ist abgeschlossen
- immer?
  - wenn  $X$  ein  $T_2$ -Raum ist?
62. Beweise den Satz von Dini: Sei  $K$  kompakt,  $(f_n)$  eine Folge von stetigen Funktionen von  $K$  in  $\mathbf{R}$ , sodaß  $f_n \downarrow 0$  punktweise. Dann gilt:  $f_n \rightarrow 0$  gleichmäßig auf  $K$ . (Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, aber fest gewählt. Zeige: Zu jedem  $x \in K$  existieren eine Umgebung  $U_x$  und eine natürliche Zahl  $n_x$ , sodaß  $f_{n_x} < \varepsilon$  auf  $U_x$ . Benutze die Kompaktheit, um die Existenz eines  $N$  nachzuweisen, sodaß  $f_N < \varepsilon$  auf  $K$ .)
63. Seien  $x, y \in \mathbf{R}^*$ . Zeige:  $x < y \vee x = y \vee x > y$ . (Betrachte die Mengen  $\{n : \xi_n < \eta_n\}$ ,  $\{n : \xi_n = \eta_n\}$ ,  $\{n : \xi_n > \eta_n\}$ ).
64. Sei  $(s_n)$  eine Folge aus  $\mathbf{R}$ . Zeige:  $x \in \mathbf{R}$  ist der Grenzwert einer Teilfolge von  $(s_n) \Leftrightarrow \bigvee_{n \in \mathbf{N}^* \setminus \mathbf{N}} s_n^* \sim x$ .
65.  $x \in \mathbf{R}^*$  heißt endlich, falls  $\bigvee_{n \in \mathbf{N}} |x| < n$ . Zeige:  $x$  ist endlich  $\Leftrightarrow \bigvee_{x_0 \in \mathbf{R}} x \sim x_0$ .
66. Zeige:  $A \subseteq \mathbf{R}$  ist beschränkt  $\Leftrightarrow (x \in A^* \Rightarrow x$  ist endlich).
67. Zeige:  $A \subseteq \mathbf{R}$  ist kompakt  $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in A^*} \bigvee_{x_0 \in A} x \sim x_0$ .
68. Zeige: Sei  $f : A \rightarrow B$  stetig, wobei  $A, B \subseteq \mathbf{R}$  und  $A$  kompakt ist. Zeige, daß  $f(A)$  kompakt ist (benutze 83).

69. Wähle  $n \in \mathbf{N}^*$  unendlich groß. Sei  $(s_n)$  eine beschränkte Folge. Zeige:  $\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k$  ist endlich.

Wir schreiben  $x = oxLIM(s_n)$ , wobei  $x \in \mathbf{R}$  so ist, daß  $x \sim \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k$ .

70. Zeige:  $oxLIM(s_n + t_n) = oxLIM(s_n) + oxLIM(t_n)$   
 $s_n \geq 0 (n \in \mathbf{N}) \Rightarrow oxLIM s_n \geq 0$
71.  $\liminf_n(s_n) \leq oxLIM(s_n) \leq \limsup(s_n)$   
 $oxLIM(s_{n+1}) = oxLIM(s_n)$
72. Bestimme die Homöomorphismus-Klassen des lateinischen Alphabets (sans serife).
73. Sei  $C$  eine kompakte, konvexe Teilmenge von  $\mathbf{R}^2$ , welche  $B^2$  enthält. ( $B^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ ). Zeige:  $C$  ist homöomorph zu  $B^2$ .
74. Gebe einen Homöomorphismus von  $B^2$  auf  $I^2$  an.
75. Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow S^1$  heißt **unwesentlich**, falls eine stetige Abbildung  $g : X \rightarrow \mathbf{R}$  existiert so, daß  $f(x) = \exp(2\pi i g(x))$ . Zeige, daß jede nicht surjektive Abbildung  $f : X \rightarrow S^1$  unwesentlich ist.

$f, g : X \rightarrow S^1$   $f(x) \neq -g(x)$  ( $x \in X$ ). Zeige:  $f$  ist genau dann unwesentlich, wenn  $g$  unwesentlich ist.

$f : X \rightarrow S^1$  sei unwesentlich,  $g : X \rightarrow S^1$  stetig. Ferner gelte

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < 2.$$

Dann ist  $g$  unwesentlich.

76. Zeige:  $2^{\mathbf{N}}$  ist zur Cantormenge homöomorph.
77. Es existiert eine stetige Funktion  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  so, daß  $\overline{f(\mathbf{R})} = \mathbf{R}^2$ .
78. Sei  $a_1/4 + a_2/4^2 + a_3/4^3 + \dots$  die Entwicklung der reellen Zahl  $t \in [0, 1]$  zur Basis 4 ( $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ). Teile das Quadrat  $[0, 1]^2$  folgendermaßen in 4 Teilquadrate:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Jedes der kleineren Quadrate wird nun seinerseits in 4 Teilquadrate zerlegt, und diese erhalten folgende Numerierung:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 21 & 22 \\ 10 & 13 & 20 & 23 \\ 03 & 02 & 31 & 30 \\ 00 & 01 & 32 & 33 \end{vmatrix}$$

Diesen Prozeß führe man ins Unendliche fort! Nach  $n$  Schritten erhält man eine Zerlegung des Einheitsquadrates in  $4^n$  Teilquadrate, deren genaue Position durch die Angabe eines  $n$ -Tupels von Zahlen  $a_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$  festgelegt ist.



Zeige: Bezeichnet  $Q_{a_1 \dots a_n}$  das durch  $a_1 \dots a_n$  definierte abgeschlossene Teilquadrat, so existiert  $\lim_n Q_{a_1 \dots a_n}$  für alle Folgen  $a_1 \dots a_n$ .

Durch  $p : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2 \sum \frac{a_i}{4^i} \rightarrow \lim Q_{a_1 \dots a_n}$  wird eine stetige Funktion definiert. (Jede Zahl der Form  $\frac{m}{4^n}$  ( $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $m \leq 4^n$ ) besitzt zwei Darstellungen, nämlich  $\frac{a_1}{4} + \dots + \frac{a_n}{4^n}$  und  $\frac{a_1}{4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{4^{n-1}} + \frac{a_n-1}{4^n} + \frac{3}{4^{n+1}} + \dots$ ).

$p$  ist surjektiv aber nicht injektiv.

79. Sei  $X$  eine Menge. Welche der folgenden Familien von Teilmengen von  $X$  sind Topologien?

$$\tau_{cf} = \{A : X \setminus A \text{ ist endlich} \cup \emptyset\};$$

$$\tau_{cc} = \{A : X \setminus A \text{ ist abzählbar} \cup \emptyset\}.$$

80. Sei  $X$  eine unendliche Menge. Welche Folgen konvergieren für  $\tau_{cf}$ ?

81. Sei  $X$  eine überabzählbare Menge. Welche Folgen konvergieren für  $\tau_{cc}$ ?

82. Welche Folgen konvergieren in  $(\mathbf{R}, \tau_{ho})$ ? Ist dieser Raum separabel?

83. Seien  $A$  bzw.  $B$  Teilmengen der topologischen Räume  $X$  bzw.  $Y$ . Zeige:

$$(A \times B)^o = A^o \times B^o;$$

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B};$$

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \partial B).$$

84. Seien  $A, B$  offene Teilmengen des Raumes  $X$  mit  $X = A \cup B$ ,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß  $f|_A$  bzw.  $f|_B$  stetig ist. Zeige:  $f$  ist stetig.

85. Gilt die obige Aussage:

wenn man voraussetzt, daß  $A$  und  $B$  abgeschlossen sind;

wenn  $A$  und  $B$  durch eine willkürliche Familie von offenen Mengen, die  $X$  überdecken, ersetzt?

86. Die Zariski Topologie auf  $\mathbf{R}^n$  hat als basis die Mengen  $U$ , sodaß  $\mathbf{R}^n \setminus U$  die Nullstellenmenge eines Polynomes ist. Ist diese Topologie  $T_0$  bzw.  $T_1$  bzw.  $T_2$ ?

87. Benütze ein Zusammenhangsargument, um zu zeigen, daß  $S^1$  und  $I$  nicht homöomorph sind.

88. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Die Vereinigung von zwei zusammenhängenden Räumen ist zusammenhängend;

Der Durchschnitt von zwei zusammenhängenden Räumen ist zusammenhängend;

Das Produkt von zwei zusammenhängenden Räumen ist zusammenhängend;

Jeder Teilraum eines zusammenhängenden Raumes ist zusammenhängend.

89. Seien  $x, y$  Element eines topologischen Raumes. Ein **Weg** von  $x$  nach  $y$  ist eine stetige Abbildung  $f : I \rightarrow X$ , sodaß  $f(0) = x$ ,  $f(1) = y$ . Zeige: Falls  $X$  nicht zusammenhängend ist, dann existieren Punkte  $x$  und  $y$ , die nicht durch einen Weg verbunden sind.

90. Sei  $X$  ein topologischer Raum. Zeige:  $X$  ist genau dann nicht zusammenhängend, wenn es eine stetige surjektive Funktion  $f$  von  $X$  auf  $\{0, 1\}$  gibt.

91. Zeige: Die Abbildung

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx$$

ist eine Metrik auf  $C([0, 1])$ . (Welche Folgen konvergieren bzgl. dieser Metrik?)

92. Sei  $(A_n)$  eine Folge von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raumes, sodaß  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$  für jedes  $n$ . Zeige:  $\bigcup_n A_n$  ist zusammenhängend.

93. Sei  $X$  ein metrischer Raum, sodaß für jedes  $x, y \in X$  und jedes  $\epsilon > 0$  eine  $\epsilon$ -Kette von  $x$  nach  $y$  existiert (d.h. eine Folge  $x_1, \dots, x_n$  mit  $x_1 = x$ ,  $x_n = y$  und  $d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon$  für jedes  $i$ ). Gilt dann:  $X$  ist zusammenhängend?

94. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Jeder Teilraum eines kompakten Raumes ist kompakt;

Falls  $A$  und  $B$  kompakte Teilmengen eines Raumes  $X$  sind, dann ist auch  $A \cap B$  kompakt;

Jeder kompakte metrische Raum ist separabel;

Jeder kompakte Raum ist separabel.

95. Seien  $X$  und  $Y$  kompakte metrische Räume. Zeige:  $X \times Y$  ist kompakt.

96. Sei  $X$  kompakt,  $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen mit  $\bigcap C_\alpha = \emptyset$ . Zeige: Es existiert eine endliche Teilfamilie  $(C_1, \dots, C_n)$  mit  $C_1 \cap \dots \cap C_n = \emptyset$ .

97. Ein topologischer Raum  $X$  besitzt die Fixpunkteigenschaft, falls jede stetige Selbstabbildung  $f$  auf  $X$  einen Fixpunkt hat. Zeige:  $[0, 1]$  besitzt diese Eigenschaft. Zeige: Falls  $X$  die Fixpunkteigenschaft besitzt, dann auch  $Y$ , wenn  $X$  und  $Y$  homöomorph sind.

98. Zeige:  $I = [0, 1]$  besitzt die Fixpunkteigenschaft (FPE).

FPE besitzt, dann besitzt auch  $X_0$  diese Eigenschaft.

Zeige, daß folgende Mengen nicht die FPE besitzen:  $\mathbf{R}$ ,  $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < 1\}$ .

Gebe eine kompakte Teilmenge von  $\mathbf{R}^2$  an, welche nicht die FPE besitzt.

Zeige, daß aus dem Brouwer'schen Fixpunktsatz folgt:  $\partial I^2$  ist kein Retrakt von  $I^2$ .

99.  $(0, 1]$  besitzt nicht die FPE.

Seien  $U, V$  offene (nicht leere) und disjunkte Teilmengen von  $X$ . Zeige:  $U \cup V$  besitzt nicht die FPE.

100. Welche der folgenden Räume besitzen die Fixpunkteigenschaft?

$$S^1, \quad \{x \in \mathbf{R}^2 : \frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} = 1\}, \quad \mathbf{R}, \quad \{x \in \mathbf{R}^2 : \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} = 1\} \quad \{x \in \mathbf{R}^2 : \xi_1^2 + \xi_2^2 < 1\}.$$

101. Eine Teilmenge  $X_0$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt ein Retrakt, falls eine stetige Funktion  $r : X \rightarrow X_0$  existiert, sodaß  $r(x) = x$ , falls  $x \in X_0$ . Welche der folgenden Teilmengen sind Retrakte?

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{R}^2 \quad S^1 \subset \mathbf{R}^2 \quad S^1 \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}.$$

102. Zeige: Falls  $X$  die Fixpunkteigenschaft besitzt, dann auch jedes Retrakt von  $X$ .
103. Zeige: Eine offene, nichtleere konvexe Teilmenge von  $\mathbf{R}^2$  besitzt nicht die Fixpunkteigenschaft.
104.  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  heißt von unten halbstetig (l.s.c.), wenn für alle  $t \in \mathbf{R}$  die Menge  $[f > t]$  offen in  $X$  ist. Zeige:

$$A(\subseteq X) \text{ offen} \Leftrightarrow I_A \text{ ist l.s.c.}$$

Seien  $f_n : X \rightarrow \mathbf{R}$  l.s.c. Zeige:

$$\sup_n f_n \text{ ist l.s.c.}$$

Sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  l.s.c. Zeigen Sie, daß eine offene Teilmenge  $U$  von  $X$  existiert mit

$$\sup_{x \in U} f(x) < \infty.$$

105. Zeige:

$$\{T \in M_n(\mathbf{C}) : T \text{ ist diagonalisierbar}\}$$

liegt dicht in  $M_n(\mathbf{C})$ .

106.  $[0, 1]^{\mathbf{R}}$  ist nicht metrisierbar.
107.  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  liegt dicht in  $(\mathbf{R}, \tau_{cc})$ , aber kein  $r \in \mathbf{Q}$  ist Grenzwert einer Folge aus  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ .
108. Seien  $X, Y$  metrische Räume. Zeige:  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn gilt:

$$\bigwedge_{A, B \subseteq X} d(A, B) = 0 \Rightarrow d(f(A), f(B)) = 0.$$

109. Sei  $U$  eine offene Teilmenge eines Banachraumes  $E$  und  $f : U \rightarrow E$  eine Kontraktion. Zeige, daß die Abbildung  $g : U \rightarrow E$ ,  $x \mapsto x - f(x)$  ein Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $V$  von  $E$  ist.
110. Sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum,  $Y$  ein metrischer Raum und  $f : X \times Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung so, daß

$$\bigvee_{K < 1} \bigwedge_{x, y \in X} d(f(x, z), f(y, z)) \leq Kd(x, y).$$

Für jedes  $z \in Y$  sei  $x(z)$  der eindeutig bestimmte Fixpunkt, also  $f(x(z), z) = x(z)$ . Zeige: die Funktion  $z \rightarrow x(z)$  ist stetig.

111. Sei  $X$  ein separabler topologischer Raum und  $U(\subseteq X)$  offen. Zeige, daß  $U$  separabel ist.

112. Gebe ein Beispiel eines separablen topologischen Raumes  $X$  sowie eines Unterraumes  $Y$  an so, daß  $Y$  nicht separabel ist.
113. Sei  $(X, \leq)$  eine geordnete Menge und  $\tau := \{\{y : y \geq x\} : x \in X\}$ . Ist  $\tau$  eine Topologie auf  $X$ ?
114. Seien  $D$  bzw.  $d$  zwei vollständige Metriken auf  $X$ . Ferner sei  $d \leq D$ ,  $(X, D)$  separabel und für alle  $y \in X$  bzw.  $r > 0$  sei  $\{x \in X : D(x, y) \leq r\}$  abgeschlossen in  $(X, d)$ . Zeige, daß die identische Funktion  $(X, d) \rightarrow (X, D)$  auf einer dichten  $G_\delta$ -Menge stetig ist.
115. Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbf{R}^+$  l.s.c.

$$g_n(x) := \inf\{f(z) + nd(x, z) : z \in X\}.$$

Zeige:

- (i)  $|g_n(x) - g_n(y)| \leq nd(x, y)$  ( $n \in \mathbf{N}$ );  
 (ii)  $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$  ( $\forall x \in X, n \in \mathbf{N}$ ).

116. Sei  $h(z) = \lim_n g_n(x)$ . Zeige:  $h = f$ .  
 (Diese Beispiele zeigen, daß eine Funktion  $f$  auf einem metrischen Raum genau dann l.s.c. ist, wenn  $f$  der Grenzwert einer monoton steigenden Folge von stetigen Funktionen ist.)
117. Zeige: Ist  $A$  eine  $G_\delta$ -Menge von  $B$  und  $B$  eine  $G_\delta$ -Menge von  $C$ , so ist  $A$  eine  $G_\delta$ -Menge von  $C$ .
118. Sind  $A$  bzw.  $B$  offene disjunkte Teilmengen von  $X$ , gilt  $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \emptyset$ .
119. Seien  $X$  bzw.  $Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung von  $X$  in  $Y$ . Zeige:  $f$  ist genau dann stetig, wenn auf  $X$  eine topologisch äquivalente Metrik  $d'$  existiert so, daß  $f : (X, d') \rightarrow Y$  Lipschitz-stetig ist.
120.  $A \subseteq X$  heißt lokal abgeschlossen, wenn jedes  $x \in A$  eine offene Umgebung  $U$  in  $X$  besitzt derart, daß  $A \cap U$  in  $U$  abgeschlossen ist. Zeige:  $A$  lokal abgeschlossen  $\Leftrightarrow A = C \cap V$  mit  $C$  abgeschlossen und  $V$  offen.
121. Sei  $X$  ein vollständig metrischer Raum und  $A_n$  eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  mit  $A_n \supseteq A_{n+1}$ . Gilt:  $\bigcap A_n \neq \emptyset$ ?
122. Eine Mengenfamilie  $(A_i)_{i \in I}$  heißt lokal endlich:  $\Leftrightarrow \forall x \in X \exists U \in \mathcal{N}(x) \{i \in I : A_i \cap U \neq \emptyset\}$  ist endlich. Zeige: Ist  $(A_i)$  eine lokal endliche Familie von abgeschlossenen Mengen, so ist  $\bigcup A_i$  abgeschlossen.
123. Folgende Aussagen sind äquivalent:  
 (i)  $f : X \rightarrow Y$  ist stetig;  
 (ii)  $\forall B \subseteq Y \ f^{-1}(B)^\circ \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ ;  
 (iii)  $\forall B \subseteq Y \ \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ .
124. Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  seien stetig. Zeige: Ist  $f$  surjektiv und  $g \circ f$  ein Homöomorphismus, so sind  $f$  und  $g$  Homöomorphismen.

125. Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig injektiv und  $(V_i)$  eine offene Überdeckung von  $Y$ . Ist  $f : f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$  für alle  $i$  ein Homöomorphismus, so ist  $f$  ein Homöomorphismus.
126. Sei  $A$  eine zusammenhängende Teilmenge von  $X$ ,  $B \subseteq X$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $(X \setminus B) \cap A \neq \emptyset$ . Zeige:  $\partial A \cap B \neq \emptyset$ .
127.  $X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x \in \mathbf{Q}) \wedge y \in [0, 1]\} \vee \{(x \notin \mathbf{Q}) \wedge y \in [-1, 0]\}$ . Zeige:
- (i)  $X$  ist zusammenhängend aber nicht lokal zusammenhängend.
  - (ii) Ist  $f : [0, 1] \rightarrow X$  stetig, so ist  $f$  konstant.
128.  $A, B \subseteq X$ ,  $A, B$  abgeschlossen und nicht leer;  $A \cup B$  und  $A \cap B$  seien zusammenhängend. Dann sind  $A$  und  $B$  zusammenhängend.
129. Sei  $X$  ein abzählbarer metrischer Raum. Zeige, daß zu jedem Punkt  $x$  von  $X$  und jeder Umgebung  $U$  von  $x$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  existiert, so daß  $V^\circ = \overline{V}$ .
130. Seien  $X, Y$  zusammenhängend,  $A \subseteq X, B \subseteq Y$ . Zeige:
- (i)  $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$  (dies gilt allgemein!).
  - (ii)  $A \neq X, B \neq Y \Rightarrow X \times Y \setminus A \times B$  ist zusammenhängend.
131. Seien  $X_i$  ( $i \in I$ ) zusammenhängende Räume. Zeige, daß  $\prod X_i$  zusammenhängend ist.
132.  $X$  ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn jede Zusammenhangskomponente einer offenen Teilmenge offen ist.
133.  $X, Y$  zusammenhängend,  $f : X \times Y \rightarrow Z$  sei in jeder Komponente stetig. Zeige, daß  $f(X \times Y)$  zusammenhängend ist.
134. Sei  $X$  vollständig regulär. Zeige, daß  $X$  homöomorph ist zu einer Teilmenge von  $[0, 1]^I$  ( $I := \{f : X \rightarrow [0, 1]; f \text{ ist stetig}\}$ ).
135. Ist  $X$  normal, so läßt sich jede l.s.c. Funktion  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  als punktwiser Limes stetiger Funktionen schreiben.
136. Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $Y$  ein metrischer Raum und  $f_n : X \rightarrow Y$  eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen  $f(x) := \lim f_n(x)$ . Zeige, daß  $f$  in  $x_0$  genau dann stetig ist, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbf{N}, U \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in U d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon.$$

137. Ein topologischer Raum  $X$  heißt ein Lindelöf Raum, falls jede offene Überdeckung  $(U_i)$  eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt. Zeige, daß jeder separable metrische Raum ein Lindelöf Raum ist.
138. Sei  $X$  regulär und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Zeige, daß zu jedem  $x \in X$  und zu jedem  $U \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U$  eine offene Umgebung  $V_x$  von  $x$  existiert, so daß  $\overline{V_x} \subseteq U$ . Ist  $X$  darüberhinaus ein Lindelöf Raum, so existiert eine Folge  $(x_n)$  derart, daß  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{x_n}$ . Zeige, daß

$$W_1 := U_1 \quad W_{n+1} := U_{n+1} \setminus \bigcup_{i \leq n} \overline{V_{x_i}} \quad (\text{wobei } U_i \in \mathcal{U}, U_i \supseteq \overline{V_{x_i}})$$

eine lokalendliche Überdeckung ist.

139. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $X$  und  $K(\subseteq U)$  kompakt. Zeige:  $d(K, \partial U) > 0$ .
140.  $X$  kompakt. Dann ist  $X$  genau dann zusammenhängend, wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  und zu je zwei Punkten  $x, y$  eine endliche Folge  $(x_i)_{i=1}^n$  existiert mit  $x_1 = x$ ,  $x_n = y$   $d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon$  für jedes  $i$ .
141. Seien  $A, B$  abgeschlossene Teilmengen eines normierten Raumes  $E$ ;  $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ . Zeige: Ist entweder  $A$  oder  $B$  kompakt, so ist  $A + B$  abgeschlossen.
142.  $X$  kompakt,  $f_n \in C(X)$ ,  $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \forall x \in X$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Zeige: Ist  $f(x) = \lim f_n(x)$  stetig, so konvergiert die Folge  $f_n$  in  $C(X)$  gegen  $f$ . (Satz von Dini)
143.  $X$  kompakt,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$  stetig. Dann ist  $F : Y \rightarrow C(X)$   $F(y)(x) := f(x, y)$  stetig.
144.  $X$  kompakt,  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  l.s.c. Dann nimmt  $f$  auf  $X$  ihr Supremum an.
145. Ist  $\mathcal{B}$  eine Basis der Topologie von  $X$ , so ist  $X$  genau dann kompakt, wenn jede offene Überdeckung  $(U_i)$   $U_i \in \mathcal{B}$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt. (Dies gilt auch für jenen Fall, daß  $\mathcal{B}$  lediglich eine Subbasis ist.)
146. Sei  $X$  ein metrischer Raum. Zeige, daß  $X$  genau dann kompakt ist, falls für jeden metrischen Raum  $Y$  die Projektion  $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$  abgeschlossen ist. (Um zu zeigen, daß unter dieser Voraussetzung jede Folge  $(x_n)$  in  $X$  eine konvergente Teilfolge besitzt, wähle für  $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{R}$ ).
147. Zeige, daß der Hilbertwürfel die Fixpunkteigenschaft hat. (Bezeichnet  $P_n$  die Projektion auf die ersten  $n$  Koordinaten, so hat jede der Abbildungen  $P_n \circ f \circ P_n$  einen Fixpunkt  $x_n$ . Wähle einen Häufungspunkt  $x$  von  $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$
148. Ist  $C$  eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von  $l^2$ , so existiert zu jedem  $x \notin C$  genau ein  $y \in C$  mit  $\|x - y\| = d(x, C)$ . Zeige, daß die hierdurch bestimmte Abbildung Lipschitzstetig ist.
149. Jede abgeschlossene konvexe Teilmenge  $C$  des Hilbertwürfels ist ein Retrakt.