SAKS STRUKTUREN IN DER FUNKTIONALANALYSIS

DIPLOMARBEIT

Zur Erlangung des akademischen Grades
"Diplomingenieur"

in der Studienrichtung
Technische Mathematik

Eingereicht
von

Paul F.X. Müller

Angefertigt am Institut für Mathematik der
Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johannes Kepler Universität Linz

Eingereicht bei o.Univ. Prof. Dr. J.B. Cooper

Juni 1982

Abstract:

In dieser Arbeit werden einige Aspekte der Theorie der Saksräume und Saksalgebren dargelegt. Insbesondere wird die Beziehung zwischen den zwei natürlichen Spektren einer Saksalgebra an zwei wichtigen Beispielen (Saksalgebren von beschränkten stetigen bzw. holomorphen Funktionen) erörtert. Aufbauend auf einem verallgemeinerten Riesz'schen Darstellungssatz wird ein neuer Beweis des Spektralsatzes für unbeschränkte Operatoren im Hilbertraum geliefert.

Some aspects of the theory of Saks spaces and Saks algebras are dealt with. In particular, the relationship between the two natural spectra of a Saks algebra are illustrated by the important special cases of Saks algebras of bounded continuous resp. holomorphic functions. Finally a new proof of the spectral theorem for unbounded linear operators in Hilbert space using a generalised Riesz representation theorem is given.

INHALTSVERZEICHNIS:

EINLEITUNG

In dieser Diplomarbeit sollen einige Aspekte der Theorie der Saksräume und Saksalgebren dargestellt werden. Im ersten Kapitel sind einige Ergebnisse über Banachalgebren zusammengefaßt. (Vgl. Zelazko [11]). Die sollen als Bezugspunkte für die Theorie der Saksräume und Saksalgebren dienen. Wir steuern direkt auf die Gelfand Naimarksche Darstellungstheorie zu, denn diese hat sich als das entscheidende Instrumentarium bei der Behandlung von Banachalgebren erwiesen. Es werden jene Algebren charakterisiert, die sich via GNT, isometrisch mit $C(M(A))$ identifizieren lassen.

Um die allgemeinen Sätze zu illustrieren, diskutieren wir charakteristische Eigenschaften der Spektren von $C^b(X)$, $H^\infty(D)$ (Hoffmann [9]) und $L(S,\Sigma,\mu)$ (Gamelin [7]). Im zweiten und dritten Kapitel folgen wir über weite Strecken dem Buch von Cooper ([4]).
Im zweiten Kapitel führen wir das Konzept des Saksraumes ein. Ein normierter Raum $(E,\| \ \|)$ wird mit einer zusätzlichen Topologie τ versehen. Dem Tripel $(E,\| \ \|,\tau)$ läßt sich eine l.c. Topologie γ zuordnen, die folgende Extremaleigenschaften besitzt:

γ ist die feinste Vektorraumtopologie auf E, die in $B_{\| \ \|}$ mit τ übereinstimmt.
Diese Charakterisierung erlaubt es, topologische Eigenschaften von γ (wie Vollständigkeit, Kompaktheit, Beschränktheit, Folgenkonvergenz,...) durch Bedingungen an $\| \ \|$ und τ zu beschreiben.
Der Begriff des projektiven Limes für Saksräume wird eingeführt, um Saksräume aus einfachen Räumen aufbauen zu können. Mit allgemeinen Ergebnissen über projektive Limiten, läßt sich der Dualraum von $(C^b(X),\beta)$ (X ist vollständig regulär) auf einfache Weise mit den Radonmaßen auf X iden-

tifizieren. Mit ähnlichen Techniken erhält man den Riesz'-schen Darstellungssatz für vektorwertige Maße (vgl. Cooper Schachermayer [5]). R.C. Buck ([2],[3]) betrachtet auf $C^b(T)$ (T lokalkompakt) und auf $H^\infty(D)$ l.c. Topologien, die durch gewichtete Halbnormen erzeugt sind. Er nennt sie strikte Topologien. Die strikten Topologien auf $C^b(T)$ bzw. $H^\infty(D)$ lassen sich mit den gemischten Topologien γ der Saksräume $(C^b(T), \| \|, \tau_K)$ bzw. $(H^\infty(D), \| \|, \tau_K)$ identifizieren. $H^\infty(D)$ kann man zusätzlich mit der von $L^1(\partial D)$ induzierten Topologie ausstatten. Die gemischte Topologie des Saksraumes $(H^\infty(D), \| \|, \| \|_1)$ wird mit β_1 bezeichnet. Einer Arbeit von Cnop und Delbaen ([6]) folgend, können wir β_1 mit der Mackeytopologie des Dualen Paares $(H^\infty, L^1/H^1_o)$ identifizieren.
Saksalgebren verallgemeinern die Klasse der Banachalgebren in der selben Weise, wie dies vollständige Saksräume für die Klasse der Banachräume tun.
Die Menge der stetigen, mult. Funktionale bilden das Spektrum $M_\gamma(A)$ einer Saksalgebra $(A, \| \|, \tau)$. Somit erhält man eine verallgemeinerte GN Darstellung für Saksalgebren.

Anhand der Spektren von $C^b(X)$ und $H^\infty(D)$ lassen sich strukturelle Vorteile der gemischten Topologie erläutern. Während $M(C^b(X))$ mit der Stone-Cech Kompaktifizierung von X übereinstimmt, läßt sich $M_\gamma(C^b(X))$ mit X identifizieren. Im Spektrum $M(H^\infty(D))$ findet man neben D noch die (berüchtigten) Fiber. Das Spektrum $M_\gamma(H^\infty(D))$ ist mit D identisch.
In der allgemeinen Situation ist die Frage nach dem Zusammenhang von $M(A)$ und $M_\gamma(A)$ ist weitgehend ungeklärt. In H^∞ führt diese Frage auf das Korona Problem. Wir präsentieren hier einen Beweis des Korona Problems, der von T. Wolff stammt, und von T.W. Gamelin während der Conference on Banachspaces, Kent State Univ. vorgetragen wurde [8].
Im vierten Kapitel wird aufbauend auf den verallgemeinerten Darstellungssatz ein alternativer Beweis des Spektralsatzes entwickelt. Im beschränkten Fall folgen wir Buchwalter,

Bucchioni [1]. Der Beweis des unbeschränkten Falles stützt sich auf ein Lemma, das von Leinfelder [10] stammt.

In den ersten beiden Abschnitten des ersten Kapitels finden sich kaum Beweise, denn sie sind in jedem Standardlehrbuch über Banachalgebren nachzulesen. Die spezifischen Eigenschaften der Spektren von H^∞ und L^∞ wurden bewiesen. Im zweiten und dritten Kapitel wurden die Sätze größtenteils bewiesen. Unser Grundsatz war es, Aussagen über konkrete Räume und Algebren zu beweisen, und allgemeine Sätze hin und wieder unbewiesen zu lassen.

Ich möchte mich hier bei Herrn Professor J.B. Cooper aufrichtig bedanken. Seiner Geduld während der Betreuung, und seiner wirkungsvollen Unterstützung bei der Ausarbeitung dieses Manuskriptes, ist es zu verdanken, daß diese Diplomarbeit erstens überhaupt und zweitens termingerecht fertiggestellt werden konnte.

Frau Margarete Horner hat dieses Manuskript geschrieben. Sie hat unter - doch ziemlich - nervenaufreibenden Bedingungen eine wunderschöne Arbeit zustandegebracht. Herzlichen Dank!

I. BANACHALGEBREN

In diesem Kapitel behandeln wir die Theorie der Banachalgebren. Ziel ist die Gelfand Naimarksche Darstellungstheorie. Die wichtigen Sätze und Begriffe werden anhand der folgenden Beispiele erläutert, bzw. motiviert.

$C(S)$ — Der Raum, der auf dem topologischem Raum S stetigen Funktionen. $C^b(S)$ bezeichnet den Teilraum der beschränkten Funktionen. Er ist mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |x(t)|$ ausgestattet.

$L(H)$ — Der Raum der stetigen linearen Operatoren auf dem Hilbertraum H. Er ist mit der Operatornorm $\|T\| = \sup\limits_{x\in B_{\|\ \|}} \|Tx\|$ ausgestattet.

$\ell^p, (1\leq p\leq\infty)$ — Der Raum aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die gilt: $\Sigma|a_n|^p < \infty$. Er ist mit der Norm $\|a\|_p=(\Sigma|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ ausgestattet. Das Cauchyprodukt zweier Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wie folgt definiert:

$$(a_n)*(b_n) = (c_n) \text{ wobei } c_n := \sum_{k+l=n} a_k b_l .$$

$H^\infty(D)$ — Der Raum der auf D beschränkten und holomorphen Funktionen, wobei $D = \{\lambda\in\mathbb{C}, |\lambda|<1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{C}$ ist. Er ist mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup\limits_{\lambda\in D} |x(\lambda)|$ ausgestattet.

$L^\infty(S,\Sigma,\mu)$ — Der Raum der bezüglich des Wahrscheinlichkeitsraums (S,Σ,μ) meßbaren und wesentlich beschränkten Funktionen auf S. Er ist mit der Norm $\|x\|_\infty = \inf\{c>0:\mu(\{t\in S : |x(t)| > c\}) = 0\}$ ausgestattet.

1. GRUNDLEGENDE DEFINITIONEN

Definition 1.1.:

Ein linearer Vektorraum A über $\mathbb{C}$ heißt Algebra, falls auf A eine Multiplikation existiert, d.h. eine Abbildung von $A \times A$ in A sodaß

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z \\ x(y+z) &= xy + xz \\ (x+y)z &= xz + yz \\ a(xy) &= x(ay) = (ax)y \\ (ab)x &= a(bx) \end{aligned}$$

für alle x,y,z aus A und alle a aus $\mathbb{C}$.

Eine Algebra A heißt Algebra mit eins, falls in A ein Element e existiert, sodaß für alle x aus A gilt:

$$ex = xe = x.$$

Eine Algebra A heißt kommutativ, falls für alle x,y aus A gilt:

$$xy = yx.$$

Bemerkung 1.2.:

Existiert ein Einselement, so ist es eindeutig bestimmt.

Definition 1.3.:

Ein normierter Raum $(A, \| \ \|)$ heißt normierte Algebra, falls A eine Algebra ist, und die Norm submultiplikativ ist, d.h.

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|.$$

Ist $(A, \| \ \|)$ vollständig, so spricht man von einer Banach Algebra.

Beispiel 1.4.:

(1) Mit der punktweisen Addition und Multiplikation ist der Vektorraum $(C[0,1], \| \, \|_\infty)$ eine normierte kommutative Algebra.

(2) Mit der punktweisen Addition und der Hintereinanderausführung als Multiplikation ist $(L(H), \| \, \|)$ eine normierte Algebra, falls $\| \, \|$ die Operatornorm ist.

(3) Die Folgenräume $\ell^p(\mathbb{N})$ werden durch das Cauchyprodukt zu normierten kommutativen Algebren.

Definition 1.5.:

Eine Teilmenge I einer Algebra heißt Ideal, falls I ein Teilraum ist, und für alle z aus der Algebra gilt

$$zI \subseteq I$$
$$\text{und} \quad Iz \subseteq I.$$

Definition 1.6.:

Sei A eine Algebra mit Eins, man nennt x aus A invertierbar, falls ein y in A existiert, sodaß

$$xy = e \quad \text{und} \quad yx = e$$

sonst heißt x singulär.

Satz 1.7.:

Sei A eine Algebra mit Eins. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1) x ist regulär;

2) x liegt in keinem eigentlichen Ideal.

Bemerkung 1.8.:

In jeder Algebra mit Eins ist jedes eigentliche Ideal in einem maximalen Ideal enthalten.

Wir werden im folgenden Satz die invertierbaren Elemente und deren topologische Struktur behandeln.

Satz 1.9.:

Sei A eine Banachalgebra mit Eins. Sei x aus A und $\|e-x\| < 1$. Dann ist x regulär, und $x^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (e-x)^k$.

Satz 1.10.:

Sei A eine Banachalgebra. Sei y regulär, und $\|x\| \leq \|y^{-1}\|^{-1}$.

Dann ist $x+y$ regulär und es gilt:

$$(x+y)^{-1} = y^{-1} + y^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (y^{-1} x)^k$$

Bemerkung 1.11.:

Die Menge der invertierbaren Elemente bezeichnet man mit Inv A oder mit A^{-1}.

Die obigen Ergebnisse über invertierbare Elemente, bilden die Grundlage der nun folgenden Aussagen über Ideale.

Satz 1.12.:

Sei A eine Banachalgebra mit Eins, I ein eigentliches Ideal in A.

Dann ist auch der Abschluß von I ein eigentliches Ideal in A.

Folgerung:

Maximale Ideale einer Banachalgebra mit Eins sind stets abgeschlossen.

Satz (Gelfand Mazur) 1.13.:

A sei eine Banachalgebra mit Eins. Ist nun jedes Element in A, sofern es nicht Null ist, invertierbar, so ist A eindimensional.

Definition 1.14.:

Sei A eine Algebra mit Eins, sei x in A. Unter dem Spektrum von x versteht man $\{\lambda \mid x-\lambda e$ ist singulär$\}$. Man bezeichnet es mit $\sigma_A(x)$.

Bemerkung 1.15.:

Falls klar ist, in welcher Algebra das Spektrum betrachtet wird, schreibt man $\sigma(x)$.

Beispiel 1.16.:

Sei S ein topologischer Raum. x sei eine stetige Funktion auf S. $x-\lambda 1$ ist genau dann in $C(S)$ singulär, wenn O im Bild von $x-\lambda 1$ enthalten ist. Daher gilt

$$\sigma(x) = \mathrm{Im}(x) \quad \text{für} \quad x \in C(S).$$

In $C^b(S)$ ist $\sigma(x)$ gleich $\overline{\mathrm{Im}\,(x)}$.

E sei ein Banachraum, T ein linearer stetiger Operator von E in E. Dann ist $\sigma(T)$ das klassische Spektrum.

Satz 1.17.:

Sei A eine Banachalgebra mit Eins, x aus A. Dann gilt:

a) $\sigma(x) \subseteq \{\lambda \in C : |\lambda| \leq \|x\|\}$.

b) $\sigma(x)$ ist nicht leer und kompakt.

<u>Satz (Spektralabbildungssatz für Polynome) 1.18.:</u>
Sei A eine Banachalgebra mit Eins, p ein Polynom über $\mathbb{C}$. Dann gilt für jedes x aus A

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)).$$

<u>Beweis:</u>

Sei λ aus $\sigma(x)$. p habe den Grad n. Dann hat $g(t) := p(t) - p(\lambda)$ die Nullstelle $y=\lambda$ und ist ebenfalls von Grad n. $\{\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\}$ sei die Menge der Nullstellen von g. Wir schreiben daher $g(x) = a(x-\lambda e)(x-\lambda_1 e)\ldots(x-\lambda_{n-1}e)$. Da der Faktor $x-\lambda e$ singulär ist, ist auch $g(x) = p(x) - p(\lambda)e$ singulär. Somit gilt: $p(\lambda)$ ist in $\sigma(p(x))$.

Sei andererseits w aus $\sigma(p(x))$: $g(t) := p(t) - w$. g habe die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann schreiben wir wieder $g(x) = a(x-\lambda_1 e)\ldots(x-\lambda_n e)$. Da g singulär ist, muß mindestens ein Faktor, z.B. $(x-\lambda_i e)$ singulär sein. Daher existiert ein λ_i in $\sigma(x)$, sodaß $p(\lambda_i) = w$.

<u>Definition 1.19.:</u>
Sei A eine Banachalgebra, x aus A.

$$\|x\|_\rho := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

heißt Spektralradius von x.

Mit Hilfe des nächsten Satzes kann der Spektralradius selbst dann berechnet werden, wenn das Spektrum nicht bekannt ist.

<u>Satz 1.20.:</u>
Sei A eine Banachalgebra, x in A. Dann gilt

$$\|x\|_\rho = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Der Limes auf der rechten Seite der Gleichung existiert stets.

Bemerkung 1.21.:

Im Falle von Algebren ohne Eins, läßt sich die hier skizzierte Theorie ebenfalls ableiten. Dann nämlich bettet man A in die direkte Summe von A und $\mathbb{C}$ ein. Diese wird mit $A(e)$ bezeichnet. $A(e)$ besitzt nun das Einselement $(0,1)$. Die Aussagen über Ideale lassen sich für reguläre Ideale übertragen.

2. GELFAND NAIMARKSCHE DARSTELLUNGSTHEORIE

Das Anliegen dieses Abschnittes ist es, jene Algebren A zu charakterisieren, die sich isometrisch in die Algebra $C(S)$ abbilden lassen.

Der Raum S wird so gewählt, daß sich die Eigenschaften von A auf $C(S)$ übertragen.

Dergestalt hat sich die Gelfand Naimark Transformation zu einem mächtigen Instrument bei der Behandlung konkreter Algebren entwickelt erwiesen.
So fußt beispielsweise die abstrakte Theorie der Hardyräume auf den Eigenschaften der GNT der Algebra L^{∞}.

2.1. Das Spektrum von Algebren

2.1.1. Maximale Ideale und komplexe Homomorphismen:

Definition 2.1.1.1.:

Sei A eine normierte Algebra. Ein Funktional auf A mit Werten in $\mathbb{C}$ heißt komplexer Homomorphismus, falls für alle x,y aus A gilt:

$$f(xy) = f(y)\, f(x).$$

<u>Satz 2.1.1.2.:</u>
Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Dann gilt:

1) Jeder nichtverschwindende komplexe Homomorphismus hat Norm Eins.
   Der Nullraum eines nichtverschwindenden komplexen Homomorphismus ist ein maximales Ideal in A.

2) Zu jedem maximalen Ideal M in A existiert genau ein komplexer Homomorphismus, sodaß dessen Nullraum mit M übereinstimmt.

<u>Definition 2.1.1.3.:</u>
Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Wir definieren:

$$M(A) := \{f \mid f \text{ ist komplexer Homomorphismus auf } A\}.$$

Dazu gleichwertig wäre die folgende Definition:

$$M(A) := \{M \mid M \text{ ist maximales Ideal in } A\}.$$

$M(A)$ wird als Spektrum von A bezeichnet. Es finden sich auch die Bezeichnungen Strukturraum, Homomorphismusraum, Trägerraum für $M(A)$.

2.1.2. Die Gelfandtopologie:

Die obigen Betrachtungen zeigen, daß $M(A)$ in der Einheitskugel von A' enthalten ist.
Eine Möglichkeit, den Trägerraum zu topologisieren besteht nun darin, ihn mit der Topologie $\sigma(A',A)$ zu versehen.
Unter Verwendung des Satzes von Alaoglu gilt der folgende

<u>Satz 2.1.2.1.:</u>
Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins, so ist $(M(A),\sigma(A',A))$ ein kompakter Hausdorffraum.

2.1.3. Gelfand-Naimark-Transformation:

Wir werden nun einen Algebrenhomomorphismus konstruieren, der es ermöglicht, eine kommutative Banachalgebra mit Eins in $C(M(A))$ abzubilden. Der Homomorphismus wird durch folgende Transformation definiert:

$$\begin{aligned} GNT : A &\to C(M(A)) \\ x &\to \hat{x} \end{aligned}$$

wobei $\hat{x}$ wie folgt definiert ist $\hat{x}$: $\begin{aligned} M(A) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$

Da $M(A)$ die schwach* Topologie trägt, ist $\hat{x}$ tatsächlich stetig.

Satz 2.1.3.1.: (Gelfand)

A sei eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Dann gilt:

1) $\begin{aligned} GNT : A &\to C(M(A)) \\ x &\to \hat{x} \end{aligned}$

   ist ein normverkleinernder Algebrenhomomorphismus.

2) $GNT\ (A)$ ist eine Teilalgebra von $C(M(A))$.

3) $GNT\ (A)$ trennt Punkte von $M(A)$.

4) $GNT\ (A)$ enthält die konstanten Funktionen.

Beweis:

1) $\|\hat{x}\| = \sup |\hat{x}(f)| = \sup\limits_{f \in M(A)} |f(x)| \leq \sup\limits_{f \in M(A)} \|f\| \|x\| = \|x\|$

2) klar

3) Seien f und g aus $M(A)$ verschieden. Dann existiert ein x aus A, sodaß $f(x) \neq g(x)$. D.h. es existiert ein $\hat{x}$ aus $C(M(A))$, sodaß $\hat{x}(f) \neq \hat{x}(g)$.

4) Für jedes f aus $M(A)$ gilt: $\hat{e}(f) := f(e)$. Somit enthält $GNT(A)$ die konstante Einsfunktion und mit 2) [illegible]en.

Bemerkung 2.1.3.2.:

Im Abschnitt 2.1.5. werden wir jene Algebren charakterisieren, für die GNT eine surjektive Abbildung ist. Das technische Hilfsmittel dabei wird der Satz von Stone Weierstrass sein. Der obige Satz besagt nun, daß man jene Algebren suchen muß, für die GNT (A) selbstadjungiert ist, denn die übrigen Voraussetzungen des Satzes von Stone Weierstrass sind bereits erfüllt.

Satz 2.1.3.3.:

Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Dann gilt für jedes x aus A

$$\sigma(x) = \mathrm{Im}\,(\hat{x}).$$

Daraus folgt unmittelbar der wichtige

Satz 2.1.3.4.: (Gelfand Beurling)

Sei A eine Banachalgebra mit Eins. Dann gilt für jedes x aus A

$$\lim \|x^n\|^{1/n} = \|x\|_\rho = \|\hat{x}\|_\infty$$

2.1.4. Halbeinfache Algebren:

Da uns an der Frage gelegen ist, wann Algebren durch die GNT isomorph in $C(M(A))$ eingebettet werden können, müssen die Fragen der Injektivität und Surjektivität der GNT auf Eigenschaften der Algebren zurückgeführt werden.

Definition 2.1.4.1.:

Sei A eine kommutative Banachalgebra. Der Durchschnitt aller maximalen Ideale heißt das Radikal von A und wird mit [illegible] (A) bezeichnet.

Satz 2.1.4.2.:
Sei A eine Banachalgebra mit Eins. Dann gilt:
Die GNT ist genau dann injektiv, wenn Rad (A) = {O}.

Bemerkung 2.1.4.3.:
Kommutative Algebren, die die Bedingung Rad (A) = {O} erfüllen, nennt man halbeinfach.

2.1.5. Algebren mit Involution:

Jetzt werden jene Bedingungen angegeben, die bewirken, daß die GNT surjektiv und isometrisch ist.
Entscheidend dafür ist die Existenz einer Involution auf A.

Definition 2.1.5.1.:
Eine Abbildung * von A in A heißt Involution auf A, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} (x+y)^* &= x^* + y^* \\ (tx)^* &= \bar{t}\, x^* \\ x^{**} &= x \\ (xy)^* &= y^* x^* \end{aligned}$$

$(x,y \in A,\ t \in \mathbb{C})$.

Bezeichnung 2.1.5.2.:
Sei x aus einer Algebra mit Involution. x heißt selbstadjungiert, falls gilt:

$$x^* = x$$

Definition 2.1.5.3.:
Banachalgebren A mit Involution, die der Beziehung

$$\|x^*\| \leq \|x\| \qquad (x \text{ aus } A)$$

genügen, nennt man Banach* Algebren.

Bemerkung 2.1.5.4.:
Zu jeder Banachalgebra $(A, \|\ \|)$ mit stetiger Involution existiert eine zu $\|\ \|$ äquivalente Norm auf A, sodaß A zu einer Banach* Algebra wird. (Als neue Norm wählt man $\max(\|x\|, \|x^*\|)$.

Beispiel 2.1.5.5.:
Die folgenden Algebren stellen wichtige Beispiele von Banach*Algebren dar:

$$\begin{array}{ll} C([0,1]) & x^* : t \to \overline{x(1-t)} \\ L(H) & T^* : h \to T(h) \\ H^\infty(U) & x^* : z \to x(\bar{z}) \\ \ell^1(z) & x^* : n \to \bar{x}_{-n} \end{array}$$

Für die Zwecke der Darstellungstheorie benötigen wir aber eine stärkere Verbindung der Norm mit der Involution.

Definition 2.1.5.6.:
Eine Banach Algebra A, die die Bedingung $\|x\, x^*\| = \|x\|^2$ $(x \in A)$ erfüllt, heißt B* Algebra.

Da $C(K)$ mit der Standardinvolution die obige Bedingung erfüllt, muß man von Algebren, die man isometrisch in $C(K)$ einbetten will, dasselbe verlangen.

Später werden wir sehen, daß diese Bedingung auch hinrei-
[illegible]

Satz 2.1.5.7.:
Sei A eine kommutative B^* Algebra mit Eins. Dann ist die GNT eine Isometrie von A in $C(M(A))$.

Bemerkung 2.1.5.8.:
Ein isometrischer Algebrenhomomorphismus ist injektiv.

Um jene Bedingungen zu charakterisieren, die zur Surjektivität der GNT führen, benötigt man den Satz von Stone-Weierstraß.

Satz 2.1.5.9.:
Sei K kompakt, B eine Teilalgebra von $C(K)$, sodaß

1) B ist selbstadjungiert;
2) B trennt Punkte in K;
3) B enthält die Einsfunktion.

Dann ist B dicht in $C(K)$.

Bemerkung 2.1.5.10.:
Wir wissen bereits, daß das Bild einer kommutativen Banachalgebra mit Eins (unter der GNT) die Bedingungen 2) und 3) der Voraussetzung des obigen Satzes erfüllt.

Definition 2.1.5.11.:
Eine kommutative B^* Algebra heißt symmetrisch, falls die GNT ein *Algebrenmorphismus ist, d.h. falls für alle x aus A gilt:

$$\bar{\hat{x}} = (x^*)\hat{}$$

Satz 2.1.5.12.:

Sei A eine kommutative Banach Algebra mit Eins. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) A ist symmetrisch

2) $e+x^*x$ ist invertierbar (für alle $x \in A$)

3) $h^* = h$ impliziert $\sigma(h) \subseteq R$, d.h. hermitesche Elemente haben reelles Spektrum.

Beweis:

$1 \Longrightarrow 2$: Sei f in $M(A)$. $f(e+x^*x) = f(e) + x^*x(f) = 1 + |\hat{x}|^2(f) > 0$. Somit ist $e+x^*x$ in keinem maximalen Ideal.

$2 \Longrightarrow 3$: Sei h selbstadjungiert und $z = u+iy$, dann ist $(h-\bar{z}e) = u^2(e+v^*v)$ wobei $v = h - uy^{-1}e$. Mit 2 ist dann aber $h - ze$ invertierbar.

$3 \Longrightarrow 1$: $Re(x) := 2^{-1}(x+x^*)$, $Im(x) := (2i)^{-1}(x-x^*)$. Da $f(Re(x))$ und $f(Im(x))$ für jedes f aus $M(A)$ reell sind gilt: $\widehat{x^*}(f) = (Re(\hat{x}))(f) - i\,(Im(\hat{x}))(f) = \overline{(Re(\hat{x})) + iIm(\hat{x}))(f)} = \overline{\hat{x}(f)}$. $(x \in A,\ f \in M(A))$.

Bemerkung 2.1.5.13.:

Die im Beweis verwendeten Elemente $Re(x)$ und $Im(x)$ heißen die hermiteschen Komponenten von x.
$Re(x)$ und $Im(x)$ sind selbstadjungiert.

<u>Bemerkung 2.1.5.14.:</u>
Banachalgebren mit Eins, die nicht notwendigerweise kommutativ sein müssen, heißen symmetrisch, falls die Bedingung 2 des obigen Satzes erfüllt ist.

Ein entscheidender Schritt im Beweis des Hauptsatzes 2.1.5.18. ist der folgende

<u>Satz 2.1.5.15.:</u>
Eine kommutative B^* Algebra mit Eins ist symmetrisch.

<u>Bemerkung 2.1.5.16.:</u>
Für kommutative B^* Algebren ist die Menge GNT (A) selbstadjungiert. Daher ist der Satz von Stone Weierstraß anwendbar.

<u>Beispiel 2.1.5.17.:</u>
Symmetrische Algebren

> $C([0,1])$ mit der Standard-Involution; $\ell^1(Z)$ mit
> mit der Involution aus Beispiel 2.1.5.5.

Nichtsymmetrische Algebren

> $C([0,1])$ mit der Involution aus Beispiel 2.1.5.5.
> $H^\infty(U)$ mit der Involution aus Beispiel 2.1.5.5.

Ziel unserer bisherigen Bemühungen war die Bestimmung jener Banachalgebren, auf denen die GNT als isometrischer Isomorphismus wirkt. Der folgende Satz gibt die Antwort.

<u>Satz 2.1.5.18.:</u>
Sei A eine kommutative B^* Algebra mit Eins. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} GNT : A &\to C(M(A)) \\ x &\to \hat{x} \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Abschließend seien noch einmal jene Punkte hervorgehoben, die die GNT so wichtig bei der Untersuchung von Banachalgebren machen. Erstens werden Algebren durch GNT in Algebren der Sorte $C(K)$ abgebildet.
Zweitens geschieht die Transformation so, daß sich die algebraischen Eigenschaften von A in $C(K)$ wiederspiegeln, z.B.

A enthält die Eins $\Longleftrightarrow$ K ist kompakt;
x aus A ist invertierbar $\Longleftrightarrow$ $\hat{x}$ hat keine Nullstelle

2.2. Gelfand Naimark Transformation konkreter Algebren:

Wir beenden nun die Betrachtung der allgemeinen Theorie der Banach Algebren, und widmen uns jetzt einigen wichtigen Beispielen.

Zuerst bestimmen wir das Spektrum von $C^b(X)$.
Für X kompakt stimmt $M(C^b(X))$ mit X überein. Ist X vollständig regulär, so können wir X mit einer dichten Teilmenge von $M(C^b(X))$ identifizieren. Diese Tatsache wird später dazu verwendet, um $M(C^b(X))$ mit der Stone Čech Kompaktifikation βX zu identifizieren.

Dann werden die Eigenschaften der Algebra H^∞ kurz dargelegt. Weiters bringen wir einige Sätze, die die Schwierigkeiten, die bei der Untersuchung von $M(H^\infty)$ auftreten, beleuchten sollen.

Das Spektrum der Algebra L^∞ ist äußerst kompliziert. Einige charakteristische Eigenschaften der Topologie von $M(L^\infty)$ werden angegeben.

2.2.1. Die Algebren $C^b(X)$, $C_o(X)$:

Sei X ein topologischer Raum. $C^b(X)$ bezeichne die Menge der stetigen und beschränkten komplexwertigen Funktionen auf X. Ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum, so bezeichnet $C_o(X)$ die Menge der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X, die bei ∞ verschwinden.

$C^b(X)$ und $C_o(X)$ bilden unter der punktweisen Addition und Multiplikation Algebren.
Die Norm wird erklärt durch $\|f\| = \sup |f(x)|$. $C^b(X)$ besitzt stets ein Einselement. $C_o(X)$ nur dann, wenn X kompakt ist.
In der folgenden Behandlung des Spektrums spielen die Abbildungen

$$\delta_t : C(X) \to C$$
$$f \to f(t)$$

eine wichtige Rolle.

Satz 2.2.1.1.: (GNT auf $C^b(X)$)
Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist die Abbildung $\delta : t \to \delta_t$ ein topologischer Isomorphismus von X auf $M(C^b(X))$.

Bemerkung 2.2.1.2.:
Daraus folgt, daß die GNT, bis auf Isomorphie, die Identität auf $C^b(X)$ ist.

Satz 2.2.1.3.:
Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist die Abbildung $\delta : t \to \delta_t$ ein topologischer Isomorphismus von X auf $M(C_o(X))$.

Satz 2.2.1.4.:
Sei X ein vollständig regulärer Hausdorffraum. Dann ist die Abbildung

$$\delta : X \to M(C^b(X))$$
$$t \to \delta_t$$

ein topologischer Isomorphismus von X in einen dichten Teilraum von $M(C^b(X))$.

2.2.2. Die Algebra $H^\infty(D)$:

In diesem Kapitel behandeln wir holomorphe und harmonische Funktionen auf $D = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$, die gewissen Beschränktheitsbedingungen unterliegen. Zunächst einige vorbereitende Sätze aus der Funktionentheorie.

2.2.2.1. Randwerte:

Satz 2.2.2.1.1.:
Sei $p > 1$, $U(z)$ sei harmonisch in D. Existiert ein $c > 0$, sodaß für jedes $r < 1$ gilt

$$\|U(re^{i\vartheta})\|_p = \int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta < c,$$

dann existiert ein F aus $L_p([-\pi,\pi])$, sodaß für alle $r < 1$

$$U(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-t)} F(t)\, dt$$

Bemerkung 2.2.2.1.2.:
Um die Funktion F zu konstruieren, wird die Tatsache verwendet, daß beschränkte Mengen des Dualraumes eines Banachraumes schwach*-kompakt sind.

Die Abbildung $t \to \dfrac{1 - r^2}{1+r^2 - 2r\cos t}$ heißt <u>der Poisson-Kern</u> und wird mit $P_r(t)$ bezeichnet.

<u>Satz 2.2.2.1.3.:</u>
Sei $U(z)$ harmonisch in D. Existiert ein $c \geq 0$, sodaß für jedes $r < 1$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta \leqslant c,$$

dann gibt es ein endliches signiertes Maß μ auf $[-\pi,\pi]$ sodaß

$$U(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t) d\mu(t).$$

<u>Bemerkung 2.2.2.1.4.:</u>
Dieser Satz hat folgende Umkehrung.

<u>Satz 2.2.2.1.5.:</u>
Ist $\infty > p \geq 1$ und F aus $L_p([-\pi,\pi])$ und $U(re^{i\vartheta}) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t) F(t) dt$. Dann ist U harmonisch in D und es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta \leqslant c$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\vartheta}) - F(\vartheta)|^p \, d\vartheta \to 0 \quad \text{falls} \quad r \to 1$$

Unter den selben Voraussetzungen wie oben, können wir auch Aussagen über das punktweise Verhalten harmonischer Funktionen auf dem Rand von D herleiten.

Satz 2.2.2.1.6.:
$U(z)$ sei eine harmonische Funktion in D. Existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodaß für jedes $r < 1$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta \leq c \qquad p \geq 1$$

dann gilt

1) Der Limes $\lim_{r \to 1} U(re^{i\vartheta}) := \tilde{u}(\vartheta)$ existiert für fast jedes ϑ aus $[-\pi,\pi]$;

2) $\tilde{u}$ ist in $L_p([-\pi,\pi])$.

Ist weiters p echt größer als Eins, so haben wir

3) $U(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t)\tilde{u}(t)dt$

Ist $p = 1$ so gilt eine schwächere Aussage.

4) $U(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t)(\tilde{u}(t)dt + d\sigma(t))$

(σ ist ein geeignetes singuläres Maß auf dem Intervall).

2.2.2.2. Die Hardyräume $H^p(D)$:

Im folgenden werden gewisse Räume $H^p(D)$ von holomorphen Funktionen eingeführt und isometrisch in $L_p([-\pi,\pi])$ eingebettet. Daraus ergibt sich dann die Möglichkeit, H^p Räume als Dualräume aufzufassen.
Für $1 < p \leq \infty$ folgen diese Resultate aus den Sätzen des vorigen Abschnittes. Für $p = 1$ liegt das Resultat tiefer und ist eine Konsequenz des Satzes von F. und M. Riesz.

Definition 2.2.2.2.1.:
$H^p(D)$ $1 < p \leq \infty$, bezeichnet jene analytischen Funktionen f auf D, für die der Ausdruck $\|f\| := \lim\limits_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta$ beschränkt ist.

Bemerkung 2.2.2.2.2.:
$H^p(D)$ $1 < p \leq \infty$ ist jener Teilraum des $L_p([-\pi,\pi])$ dessen Elemente die Bedingung $\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)e^{in\vartheta}d\vartheta = 0$ $(n \in N)$ erfüllen. Das folgt aus den Randwertsätzen 2.2.2.1.1. und 2.2.2.1.5. Somit ist $H^p(D)$ der Annihilator von linspan $\{e^{in\vartheta} | n \geq 1\}$. Das heißt aber

$$H^p = (L^q/H^q_o)' \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Um $H^1(D)$ als Dualraum darstellen zu können, benötigt man den

Satz 2.2.2.2.3.: (F. und M. Riesz)
Sei μ ein endliches reguläres Borelmaß auf $[-\pi,\pi]$, sodaß

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} d\mu(t) = 0 \qquad (n \in N)$$

dann ist μ absolut stetig bezüglich des Lebesgue Maßes.

Bemerkung 2.2.2.2.4.:
Wir können somit $H^1(D)$ mit jenen Maßen identifizieren, die die Menge $\{e^{int} | n \in \mathbb{N}\}$ annihilieren. Die abgeschlossene lineare Hülle dieser Menge in $\mathbb{C}([-\pi,\pi])$ wird mit A_o bezeichnet. Es gilt somit

$$H^1(D) = (C([-\pi,\pi])/A_o)'$$

2.2.2.3. Maximale Ideale in H^∞:

Wir werden jetzt die Algebra der beschränkten holomorphen Funktionen auf D genauer behandeln.
Ausgestattet mit der Norm $\|f\| = \sup_{z\in D} |f(z)|$ ist $H^\infty(D)$ eine Banachalgebra mit Eins.

Bemerkung 2.2.2.3.1.:
$H^\infty(D)$ ist keine B^*-Algebra, da auf $H^\infty(D)$ keine Involution existieren kann, die die Bedingung $\|x^*x\| = \|x\|\|x\|$ erfüllt. Diese Behauptung läßt sich verifizieren, indem man zeigt, daß die GNT nicht surjektiv ist.
Man betrachte die Abbildung

$$H^\infty(D) \overset{GNT}{\rightarrow} C(M(H^\infty)) \overset{p}{\rightarrow} C^b(D);$$

Wir werden später sehen, daß sich D mit einer Teilmenge von $M(H^\infty)$ identifizieren läßt. Damit gilt:
Wäre nun GNT surjektiv, so wäre $p\circ GNT$ eine surjektive Abbildung von $H^\infty(D)$ in die Menge der gleichmäßig stetigen Funktionen auf D. Dies ist nicht möglich, denn $z \to \bar{z}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht in H^∞.
Eine Darstellung von $M(H^\infty(D))$ durch Auswertungsfunktionale ist nicht möglich. Trotzdem kann man signifikante Aussagen über das Spektrum herleiten.

Satz 2.2.2.3.2.:
Die Abbildung GNT : $H^\infty(D) \to C(M(H^\infty(D)))$ ist eine Isometrie.
$f \to \hat{f}$

Beweis:
Folgende Klasse von Funktionen wird betrachtet

$$\varphi_z : H^\infty(D) \to \mathbb{C}, \quad f \to f(z) \qquad z \in D$$

Nach Satz 2.1.3.1. gilt $\|f\| \geq \|\hat{f}\|_\infty$.

Andererseits haben wir:

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\varphi\in M(H)} |\hat{f}(\varphi)| \geq \sup_{z\in D} |f(\varphi_z)| =$$

$$= \sup_{z\in D} |f(z)| = \|f\|.$$

Bemerkung 2.2.2.3.3.:

Um das Spektrum von $H^\infty(D)$ zu beschreiben, bedient man sich der folgenden Abbildung

$$\pi : M(H^\infty) \to \bar{D}$$
$$\varphi \to \varphi(Id_D)$$

Die Eigenschaften von π werden im folgenden Satz charakterisiert.

Satz 2.2.2.3.4.:

Die oben definierte Abbildung ist stetig und surjektiv. π eingeschränkt auf $\pi^{-1}(D)$ ist ein Homeomorphismus von einer offenen Teilmenge Δ in $M(H^\infty(D))$ auf D.

Beweis: π ist stetig, weil $M(H^\infty(D))$ die Gelfandtopologie trägt. Weiters liegt jeder Punkt $z \in D$ im Bild von π denn $\pi(\varphi_z) = \varphi_z(Id_D) = z$. Da aber $M(H^\infty(D))$ kompakt ist, und π stetig ist, ist auch $\pi(M(H^\infty(D)))$ kompakt und umfaßt daher $\bar{D}$. Sei nun $z \in D$ und $\pi(\varphi) = z$. Dann ist $\varphi(f) = 0$ für jedes f das in z verschwindet. Denn $f(z) = 0$ impliziert $f = (Id-z)g$: somit gilt $\varphi(f) = \varphi(Id-z)\varphi(g) = 0$. Betrachtet man nun $f-f(z)e$, so gilt $0 = \varphi(f-f(z)e) = \varphi(f)-f(z)$. Damit ist π auf dem Urbild von D injektiv. Setzt man schließlich $\Delta := \pi^{-1}(D)$ so bildet die offene Menge Δ auf D ab. Da nun die Gelfandtopologie auf Δ mit der natürlichen Topologie auf D übereinstimmt, ist die Abbildung π homeomorph.

Bemerkung 2.2.2.3.5.:

Die offene Kreisscheibe D steht also mit den Auswertungsfunktionalen in engstem Zusammenhang, dabei wird Δ mit D identifiziert. Es treten jedoch noch andere Homomorphismen auf, die durch π auf den Kreisrand abgebildet werden. Die topologische Struktur dieser Homeomorphismen ist äußerst kompliziert, und wird jetzt behandelt.

Definition 2.2.2.3.6.:

Es sei $z \in \bar{D} \setminus D$. Dann heißt $\pi^{-1}(z)$ der Fiber M_z über z. D.h. $M_z := \{\Phi \in M(H^\infty) \mid \Phi(Id_D) = z\}$.

Bemerkung 2.2.2.3.7.:

Da π stetig ist, sind die Fiber abgeschlossen in der Gelfandtopologie.

Wir werden zunächst sehen, daß sich die Fiber durch die Auswertungsfunktionale "approximieren" lassen.

Satz 2.2.2.3.8.:

Sei f in H^∞, z aus $\bar{D} \setminus D$. $\{z_n\} \in D$ mit $z_n \to z$. Falls der Limes $\lim f(z_n)$ existiert, gibt es einen komplexen Homomorphismus φ in M_z, sodaß $\varphi(f) = \lim f(z_n)$.

Beweis:

$I := \{g \in H^\infty \mid \lim g(z_n) = 0\}$.

I ist ein Ideal in H^∞, I ist daher in einem maximalen Ideal enthalten. Es existiert also ein komplexer Homomorphismus φ, sodaß für alle g in I gilt:

Die Funktionen $(Id - ze)$ und $(f - (\lim f(z_n))e)$ liegen in I. Somit haben wir:

$0 = \varphi(Id-ze) = \varphi(Id) - z$. Also ist φ in M_z.

$0 = \varphi(f-\lim f(z_n)e) = \varphi(f) - \lim (f(z_n))$.

Satz 2.2.2.3.9.:

Sei f in H^∞, z in $\bar{D} \setminus D$. Existiert ein Homomorphismus φ im Fiber M_z, sodaß $\varphi(f) = 0$, dann gibt es eine Folge z_n in D, sodaß $\lim z_n = z$ und $f(z_n) = 0$.

Zu diesem Satz gibt es ein Korollar, das Auskunft über die Bilder von Fiber gibt.

Korollar 2.2.2.3.10.:

Sei f in H^∞ und z in $\bar{D} \setminus D$. M_z sei der Fiber bezüglich z. Dann gilt: $\hat{f}(M_z)$ besteht aus jenen $y \in \mathbb{C}$ für die eine Folge z_n in D existiert, sodaß $\lim z_n = z$ und $\lim f(z_n) = y$.

Bemerkung 2.2.2.3.11.:

Daraus sieht man, daß die Fiber extrem viele Homomorphismen enthalten.

Wir betrachten nun $M(H^\infty) \setminus D = \bigcup_{z \in T} M_z$, mit $T = \{z \mid z \in \mathbb{C} \wedge |z|=1\}$. Die Algebra $H^\infty(D)$ ist rotationsvariant, weiters induziert jede Rotation einen Homomorphismus auf $M(H^\infty(D))$ der D auf D abbildet. Alle Fiber sind also zueinander homomorph. Man könnte nun vermuten, daß $M(H^\infty(D))$ topologisch isomorph zu $T \times M_{z_1}$ ist (T sei der Torus).

Dies ist aber nicht der Fall. Die topologische Struktur von $M(H^\infty(D)) \setminus D$ ist viel komplizierter. Einen ersten Einblick gibt der folgende Satz.

Satz 2.2.2.3.12.:

Es sei
$$W_+ := \bigcup_{\operatorname{Im} z>0} M_z$$
$$W_- := \bigcup_{\operatorname{Im} z<0} M_z$$

Dann gibt es für jedes φ in M_1 drei Möglichkeiten:

1) φ liegt im Abschluß von W_+;
2) φ liegt im Abschluß von W_-;
3) φ liegt weder im Abschluß von W_+ noch im Abschluß von W_-.

Alle diese Fälle treten auf, und sie schließen einander wechselseitig aus.

Beweis:
Sei u eine harmonische Funktion auf D, die die Randwerte

$$u(z) = \begin{cases} 0 \ \dots \ \operatorname{Im} z > 0 \\ 1 \ \dots \ \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

annimmt. v sei die zu u harmonisch konjugierte Funktion

$$v(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, Q_r(\vartheta - t)\, dt$$

wobei

$$Q_r(t) = \frac{2r \sin t}{1 + r^2 - 2r \cos t}$$

Setzt man nun $f = e^{u+iv}$ so ist f in H^∞, und $|f| = e^u$. Da f auf $T \setminus \{-1,+1\}$ stetig ist gilt:

$$|\hat{f}(t)| = 1 \quad \text{für } t \text{ aus } \bar{W}_+$$
$$|\hat{f}(t)| = e \quad \text{für } t \text{ aus } \bar{W}_-.$$

Somit haben W_+ und W_- disjunkten Abschluß.

$\pi(\bar{W}_+)$ und $\pi(\bar{W}_-)$ sind kompakt; damit gilt:

$$\pi(\bar{W}_+) = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\alpha) \geq 0\}$$
$$\pi(\bar{W}_-) = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\alpha) \leq 0\}.$$

Damit finden wir φ_1, φ_2 in M_1, die in $\bar{W}_+$ bzw. in $\bar{W}_-$ liegen.

Es existiert aber auch ein $\varphi \in M_1$, das weder in $\bar{W}_+$ noch in $\bar{W}_-$ liegt:
Aus der Poisson-Darstellung von u erkennt man, daß

$$|f|(t) = e^{u(t)} = \sqrt{e} \quad (t \in [0,1])$$

also existiert ein Fiber φ in M_1, sodaß $|\varphi(f)| = \sqrt{e}$, dieses φ liegt weder in $\bar{W}_1$ noch in $\bar{W}_-$.

2.2.3. Die Banachalgebra $L^\infty(S,\Sigma,\mu)$:

(S,Σ,μ) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Mit der punktweisen Addition und Multiplikation ist $L^\infty(S,\Sigma,\mu)$ eine Banachalgebra. Definiert man auf $L^\infty(S,\Sigma,\mu)$ die Involution: $f^* = \bar{f}$, so wird $L^\infty(S,\Sigma,\mu)$ eine B^*Algebra.

Satz 2.1.5.18 besagt nun, daß $L^\infty(S,\Sigma,\mu)$ isometrisch-isomorph zu $C(M(L^\infty))$ ist.
Betrachten wir das stetige Funktional μ; $f \to \int f d\mu$, so induziert dieses, via GNT, ein stetiges lineares Funktional auf $C(M(L^\infty))$ und dieses ist nach dem Satz von Riesz durch ein Radonmaß $\hat{\mu}$ darstellbar.

$$\begin{tikzcd}
L^\infty \arrow[rr, dotted, "\text{GNT}"] \arrow[dr, "\mu"'] & & C(M(L^\infty)) \arrow[dl, "\hat{\mu}"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Auf $C(M(L^\infty))$ existiert also ein Maß $\hat{\mu}$, sodaß

$$\int f d\mu = \int \hat{f} d\hat{\mu} \qquad (f \in L^\infty).$$

Im folgenden werden einige Eigenschaften der Topologie von $M(L^\infty) =: Y$ angegeben. Schließlich zeigen wir, daß

$$L^\infty(Y,\hat{\mu}) = C(Y).$$

Bemerkung 2.2.3.1.:

a) Statt $L^{\infty}(S,\Sigma,\mu)$ schreiben wir fürderhin $L^{\infty}(\mu)$, oder $L^{\infty}(S,\mu)$.

b) Sei E eine meßbare Menge in S, und χ_E die charakteristische Funktion von E. Die GNT ist ein Algebrenhomomorphismus, und damit folgt aus $\chi_E^2 = \chi_E$: $\hat{\chi}_E^2 = \hat{\chi}_E$.

Dann muß $\hat{\chi}_E$ aber die charakteristische Funktion einer Menge $\tilde{E} \subseteq Y$ sein. $\tilde{E}$ muß sowohl offen, als auch abgeschlossen sein (denn $\hat{\chi}_{\tilde{E}}$ ist stetig).

Ist umgekehrt $\tilde{E} \subseteq Y$ sowohl offen als auch abgeschlossen, so liegt $\chi_{\tilde{E}}$ in $C(M(L^{\infty}))$, und $GNT^{-1}(\chi_{\tilde{E}})$ ist eine idempotente Funktion in $L^{\infty}(\mu)$. Diese Funktion ist daher die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge E in S.

Lemma 2.2.3.2.:

Die offen-abgeschlossenen Mengen $\{\tilde{E} \subseteq Y \mid E \in \Sigma\}$ bilden eine Basis der Gelfand Topologie in $M(L^{\infty})$.

Beweis:

Da die Linearkombinationen der charakteristischen Funktionen dicht in $L^{\infty}(S,\mu)$ liegen, bilden die Mengen der Form

$$U = \{y \in M(L^{\infty}) \mid \Sigma\, a_j \chi_{\tilde{E}_j}(y) \mid \leq 1,\ a_j \in \mathbb{C}\}$$

mit disjunkten E_j, eine Basis.

Sei $I = \{j \mid a_j > 1\}$ und sei $E = \bigcup_{j \notin I} E_j$. Da die E_j paarweise disjunkt sind, gilt $U = \{y \in M(L^{\infty}) \mid \chi_E(y) \leqslant 1\}$.

$$= \{\tilde{E} \subseteq Y : E \in \Sigma\}$$

Bemerkung 2.2.3.3.:

Topologische Räume mit der Eigenschaft von Lemma 2.2.3.2. nennt man totalunzusammenhängend. Im nächsten Lemma beweisen wir, daß der Abschluß einer offenen Menge offen ist. Solche Räume nennt man dann extrem unzusammenhängend.

<u>Lemma 2.2.3.4.:</u>
Sei $U \subseteq M(L^\infty)$ offen. $c := \sup\{\mu(D) \mid D \in \Sigma, \tilde{D} \subset U\}$.
E_n sei eine Folge in Σ und $\tilde{E}_n \subseteq U$, mit der Eigenschaft $\mu(E_n) \to c$, und $E = \bigcup E_n$

Dann gilt: $\bar{U} = \tilde{E}$

<u>Beweis:</u>
O.b.d.A. gilt $E_n \uparrow E$. Da die $\tilde{F}$ eine Basis darstellen, gilt
$\bar{U} = \complement \bigcup \{\tilde{F} : \tilde{F} \cap U = \phi\}$.
Wir zeigen $\tilde{F} \cap U = \phi$ impliziert $\tilde{E} \cap \tilde{F} = \phi$.
Sei also $F \in \Sigma$ und $\tilde{F} \cap \bar{U} = \phi$. Daraus folgt $\mu(F \cap E_n) = 0$ $(n \in N)$. Aus

$$0 = \mu(F \cap E_n) = \int \chi_{F \cap E_n} \, d\mu = \int \chi_{\tilde{F} \cap \tilde{E}_n} \, d\hat{\mu} = \hat{\mu}(\tilde{F} \cap \tilde{E}_n) \quad (n \in N)$$

folgt

$$\hat{\mu}(\tilde{F} \cap \tilde{E}) = 0$$

und somit $\tilde{F} \cap \tilde{E} = \varphi$. Zusammenfassend gilt also $\bar{U} \supseteq \tilde{E}$.

Andererseits:
Sei $F \in \Sigma$ und $\tilde{F} \subseteq U$. Dann gilt:

$$\mu(E_n) < \mu(E_n \cup F) \leq c.$$

Daraus folgt

$$c = \mu(E) \leq \mu(E \cup F) \leq c.$$

Also $\mu(E) = \mu(E \cup F)$.

Daraus folgt $\tilde{F} \subseteq \tilde{E}$

Diese Relation gilt für jedes Basiselement, das in U enthalten ist. Daher haben wir $U \subseteq \tilde{E}$ und daher $\bar{U} \subseteq \tilde{E}$ da $\tilde{E}$ abgeschlossen ist.

Lemma 2.2.3.5.:

Für jede Borelmenge V in $M(L^\infty)$ gilt:

$$\hat{\mu}(\text{int } V) = \hat{\mu}(V) = \hat{\mu}(\bar{V})$$

Beweis:

Zunächst sei U eine offene Teilmenge in $M(L^\infty)$. E_n und E seien wie in Lemma 2.2.3.4. definiert.

$$\widetilde{E \setminus E_n} = \tilde{E} \setminus \tilde{E}_n \supseteq \bar{U} \setminus U \qquad (n \in N)$$

Mit $\hat{\mu}(\tilde{E} \setminus \tilde{E}_n) = \mu(E \setminus E_n) \to 0$ folgt

$$\hat{\mu}(\bar{U} \setminus U) = 0$$
$$\hat{\mu}(\bar{U}) = \hat{\mu}(U)$$

Ist V nun eine beliebige Borelmenge in $M(L^\infty)$. Dazu betrachten wir eine fallende Folge von offenen Mengen U_n in $M(L^\infty)$, sodaß $V_n \supseteq V$ und $\mu(U_n) \to \mu(V)$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\hat{\mu}(\bar{V} \setminus V) \leq \hat{\mu}(\bar{U}_n \setminus V) \\ &= \hat{\mu}(\bar{U}_n) - \hat{\mu}(V) \\ &= \hat{\mu}(U_n) - \hat{\mu}(V) \to 0 \end{aligned}$$

Somit ist bewiesen

$$\hat{\mu}(\bar{V}) = \mu(V)$$

Komplementbildung liefert den zweiten Teil der Behauptung

$$\hat{\mu}(\text{int } V) = \hat{\mu}(V).$$

Die obigen Lemmata münden nun in folgendem Satz:

Satz 2.2.3.6.:

Die natürliche Einbettung $I : C(Y) \to L(Y,\hat{\mu})$ ist ein isometrischer, surjektiver Isomorphismus.

Beweis:

Aus der Tatsache, daß der Träger von $\hat{\mu}$ ganz Y ist, folgt, daß $I : C(Y) \to L^{\infty}(Y,\hat{\mu})$ eine Isometrie ist.

Zu zeigen bleibt die Surjektivität:

Sei V eine Borelmenge in Y. Dann gibt es ein $F \in \Sigma$, sodaß

$$\overline{\mathrm{int}\ V} = \tilde{F}.$$

Daraus $\qquad \mathrm{int}\ V \subseteq \tilde{F} \subseteq V.$

Mit Lemma 2.2.3.5. folgt:

$$\hat{\mu}(V) = \hat{\mu}(\tilde{F}).$$

Damit ist $\chi_V = \chi_{\tilde{F}}$ fast überall. Damit sind alle endlichen Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen χ_V (V ist eine Borelmenge in Y) für alle gleich einer stetigen Funktion auf Y.

Zu f aus $L^{\infty}(Y,\hat{\mu})$ wählt man eine passende Folge von Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen. Diese sind stetig, geht man nun zum uniformen Limes über, so definiert dieser eine stetige Funktion in Y und ist fast überall gleich f.

2.2.4. Repräsentierende Maße

Wie schon erwähnt, spielt die Gelfand Naimark Transformation von L^∞ eine wichtige Rolle bei der Behandlung von H^∞. Die repräsentierenden Maße von multiplikativen Funktionalen verbinden die allgemeine Theorie der Banachalgebren mit der Theorie konkreter Funktionenalgebren.

Definition 2.2.4.1.:
Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Ist A eine Algebra von Funktionen, die die Konstanten enthält, die Punkte von X trennt und in $(C(X), \| \ \|)$ abgeschlossen ist, so heißt A uniforme Algebra auf X.

Definition 2.2.4.2.:
Sei A eine uniforme Algebra auf X. φ sei ein stetiges, multiplikatives Funktional auf A. Ein positives Maß μ auf X heißt repräsentierendes Maß für φ, falls

$$\varphi(f) = \int_X f d\mu \qquad (f \in A)$$

M_φ ist die Menge aller repräsentierenden Maße auf φ.

Bemerkung 2.2.4.3.:
Wir verlangen also, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[dr, "\mu"] & \\ A \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

kommutiert.
M_φ ist konvex und $\sigma(M(X), C(X))$ kompakt. Für jedes repräsentierendes Maß gilt $\|\mu\| = \int d\mu = 1$. Die Menge der repräsentierenden Maße stimmt mit der Menge der monotonen Erweiterungen von φ überein.

<u>Satz 2.2.4.4.:</u>
Sei A eine uniforme Algebra auf X. φ ein stetiges, multiplikatives Funktional auf A, $v \in C_R(X)$. Dann gilt:

$$\sup \{\varphi(u) \mid u \in Re(A) : u \leq v\} = \inf \{\int v d\mu \mid \mu \in M_\varphi\}.$$

<u>Beweis:</u>
Sei B jener Teilraum von $C_R(X)$, der durch $Re(A)$ und v aufgespannt wird. φ wird auf B erweitert, indem wir $\varphi(v) = c$ setzen. Genügt c den Ungleichungen

$$(*) \quad \sup \{\varphi(u) \mid u \in Re(A),\ u \leq v\} \leq c \leq \inf \{\varphi(u) \mid u \in Re(A), u \geq v\}$$

so ist die Erweiterung von φ monoton. Mit dem Lemma von Zorn können wir φ monoton von B auf $C_R(X)$ fortsetzen. Daraus folgt nun:
Zu jedem c das $(*)$ erfüllt, existiert ein $\mu \in M_\varphi$, sodaß

$$\int v d\mu = c.$$

Also ist $\sup \{\varphi(u) \mid \ldots\} \geq \inf \{\int u d\mu \mid \ldots\}$.

Ist umgekehrt $\mu \in M_\varphi$ und $u \in Re(A)$ mit $u \leq v$, so gilt

$$\varphi(u) = \int u d\mu \leq \int v d\mu.$$

Damit folgt $\sup \{\varphi(u) \mid \ldots\} < \inf \{\int u d\mu\}$ und der Satz ist bewiesen.

<u>Bemerkung 2.2.4.5.:</u> Mit dem Satz von Fatou können wir H^∞ als abgeschlossene Teilalgebra von L^∞ auffassen. Da L^∞ isometrisch isomorph zu $C(M(L^\infty))$ ist, ist <u>H^∞ eine uniforme Algebra über dem Spektrum von L^∞</u>.

$$\begin{tikzcd}
L^\infty \arrow[r, leftrightarrow, dashed, "GNT"] & C(M(L^\infty)) \\
H^\infty \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Wir werden nun zeigen, daß es zu jedem $\varphi \in M(H^\infty)$ <u>genau ein repräsentierendes Maß μ auf $M(L^\infty)$ gibt</u>.
Die folgende Bemerkung ist zentral:

<u>Bemerkung 2.2.4.6.:</u>
Ist $u \in L^\infty_{\mathbb{R}}$, so ist

$$F_u(z) = \exp \int \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\, u(e^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

in H^∞ invertierbar.
Weiters gilt $u = \log|F_u|$.

<u>Satz 2.2.4.7.:</u>
Sei φ in $M(H^\infty)$. Dann existiert genau ein positives Maß m_φ auf $M(L^\infty) =: X$ welches φ repräsentiert.

$$\begin{tikzcd} L^\infty \arrow[r, leftrightarrow, "GNT"] & C(X) \arrow[d, "m_\varphi"] \\ H^\infty \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u>
Seien m und p repräsentierende Maße für φ. Zu $u \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ gilt $u = \log|F_u|$.

Damit haben wir folgende Ungleichungen:

$$|\varphi(F_u)| \leq \int e^u dm$$

$$|\varphi(F_u^{-1})| \leq \int e^{-u} dp \,.$$

Da φ multiplikativ ist, gilt

$$\varphi(F_u) \cdot \varphi(F_u^{-1}) = 1$$

Damit $\quad (\int e^u dm) \geq (\int e^{-u} dp)^{-1}$

Ersetzt man u durch tu $(t \in R)$ so gilt:

$$\int\left(1 + tu + \frac{t^2}{2!}u^2 + \ldots\right) dm \geq \int\left(1 - tu + \frac{t^2}{2!}u^2 \pm \ldots\right) dp$$

für $t = 0$ gilt Gleichheit.
Differenzieren wir, und setzen $t = 0$. So folgt

$$\int u\,dm \geq \int u\,dp.$$

Vertauscht man die Rollen von p und m, so gilt für alle $u \in L^{\infty}_{\mathbb{R}}$

$$\int u\,dm = \int u\,dp.$$

Da m und p positiv sind folgt die Behauptung.

II. SAKS RÄUME

In diesem Kapitel werden wir normierte Räume $(E, \| \|)$ mit einer zusätzlichen Topologie τ ausstatten.
Dem Paar $(\| \|, \tau)$ wird eine weitere Topologie γ zugeordnet, die wir als gemischte Topologie bezeichnen.
Sie besitzt folgende wichtige Extremaleigenschaft:
γ ist die feinste Vektorraumtopologie in E, die auf der Einheitskugel von $(E, \| \|)$ mit τ übereinstimmt.
Die Beispiele $C^b(X)$ und H^∞ zeigen, daß die Topologie τ oft in natürlicher Weise gegeben ist.
Zunächst werden wir sehen, wie sich topologische Eigenschaften von $\| \|$ und τ auf γ übertragen.

Dann statten wir $C^b(X)$ und H^∞ mit den gemischten Topologien aus, und gelangen so zu einer einfachen Dualitätstheorie der obengenannten Räume.

1. Grundlegende Definitionen:

Definition 1.:

Sei E ein Vektorraum, τ eine lokalkonvexe Topologie, $\| \|$ eine Norm auf E.
Weiters sei $B_{\| \|}$ τ - beschränkt und τ abgeschlossen.
Dann heißt der Tripel $(E, \| \|, \tau)$ ein Saksraum.

Seien $(E, \| \|, \tau_1)$ und $(F, \widetilde{\| \|}, \tau_2)$ Saksräume. Genügt eine lineare Abbildung T den Bedingungen

1) T ist kontrahierend;
2) $T_{/B_{\| \|}}$ ist $\tau_1 - \tau_2$ stetig,

so heißt T Saksraummorphismus.

Ein Saksraum $(E, \| \|, \tau)$ heißt vollständig, falls $B_{\| \|}$ τ-vollständig ist.

Bemerkung 2.:

Um nachprüfen zu können, ob die obige Bedingung erfüllt ist, eignet sich folgender

Satz 3.:

Sei (E, τ) ein l.c. Raum. Sei $\| \|$ eine Norm auf E.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

1) $B_{\| \|}$ ist τ abgeschlossen;
2) $\| \| = \{\sup p \mid p$ ist τ stetige Halbnorm, $p \leq \| \|\}$.

Beweis:

$1 \Longrightarrow 2$

Die Bedingung 2 bedeutet $B_{\| \|} = \bigcap_{p \leq \| \|} U_p$ $(U_p = \{x \mid p(x) \leq 1\})$.

Sei nun x nicht aus $B_{\| \|}$, so existiert f aus E, sodaß $f(B_{\| \|}) < 1$ und $f(x) > 1$. Die stetige Halbnorm $p_f : x \to |f(x)|$ zeigt, daß x nicht in $\cap U_p$ liegt.

Andererseits folgt aus $p \leq \| \|$ die Inklusion: $U_p \supseteq B_{\| \|}$.
Es gilt also auch: $\bigcap_{p \leq \| \|} U_p \supseteq B_{\| \|}$.

$2 \Longrightarrow 1$
Jedes der U_p ist τ abgeschlossen.

2. Beispiele

Wir werden jene Saksräume, die wir später in größerer Ausführlichkeit behandeln werden, kurz darstellen.

<u>2.1. $C^b(T)$ als Saksraum:</u>
Sei T ein lokalkonvexer Raum. $K(T)$ sei die Menge kompakter Teilmengen von T.
$C^b(T)$ ist der Raum der beschränkten stetigen Funktionen von T nach $\mathbb{C}$. Darauf erklären wir die Norm

$$\|x\| = \sup \{ |x(t)| \mid t \in T \}$$

Die zweite Topologie wird durch die Halbnormen

$$p_K(x) = \sup \{ |x(t)| \mid t \in K \} \quad (K \in K(T))$$

erzeugt, und mit τ_K bezeichnet.
$(C^b(T), \| \|, \tau_K)$ ist dann ein Saksraum.

<u>2.2. $H^\infty(D)$ als Saksraum:</u>
a) $\| \|, \tau_K$ seien wie oben definiert. $(H(D), \| \|, \tau_K)$ ist ein Saksraum.

b) Da $H^{\infty}(D)$ als Teilraum von $L^{\infty}(\partial D)$ aufgefaßt werden kann, liegt $H^{\infty}(D)$ in $L^{1}(\partial D)$.

Sei τ_1 die von $L^1(\partial D)$ induzierte Topologie. Dann ist $(H^{\infty}(D), \| \ \|, \tau_1)$ ein Saksraum.

2.3. L(H) als Saksraum:

Auf $L(H)$ stehen drei natürliche Topologien zur Verfügung

$\|x\|$ - Die von der Operatornorm induzierte Topologie.

τ_s - Topologie der punktweisen Konvergenz bezüglich der Norm.

τ_σ - Topologie der punktweisen Konvergenz bezüglich $\sigma(H,H)$.

Damit können auf $L(H)$ zwei Saksräume gebildet werden.

$$(L(H), \| \ \|, \tau_s)$$
$$(L(H), \| \ \|, \tau_\sigma).$$

3. Die gemischte Topologie:

3.1. Eigenschaften der gemischten Topologie:

Einem Saksraum wird nun eine lokalkonvexe Topologie zugeordnet. Zunächst werden wir sehen, wie sich topologische Eigenschaften von $\| \ \|$ und τ auf die gemischte Topologie übertragen.

Definition 3.1.1.:

Sei $(E, \| \ \|, \tau)$ ein Saksraum. Die gemischte Topologie $\gamma[\| \ \|, \tau]$ wird wie folgt definiert:

Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von absolutkonvexen τ-Nullumgebungen. $\gamma((U_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_1 \cap B + \dots + U_n \cap nB)$.

Die Menge der so gebildeten $\gamma((U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ bilden eine Nullumgebungsbasis in E.
Die durch diese Nullumgebungsbasis induzierte lokalkonvexe Topologie heißt die gemischte Topologie auf $(E,\|\ \|,\tau)$ und wird mit $\gamma[\|\ \|,\tau]$ bezeichnet.

Satz 3.1.2.:
Sei $(E,\|\ \|,\tau)$ ein Saksraum. Dann gilt

1) $\tau \subseteq \gamma[\|\ \|,\tau] \subseteq \|\ \|$
2) $\tau/B_{\|\ \|} = \gamma/B_{\|\ \|}$
3) γ ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf E, die 2) erfüllt.

Beweis:
1) Sei U eine τ-Nullumgebung. $U_n := n^{-2}U$. Dann ist $U \supseteq \gamma(U_n)$.

2) Sei x_o aus B. $(x_o + \gamma(U_n)) \cap B_{\|\ \|}$ sei eine beliebige Umgebung von x_o in der Topologie $\gamma/B_{\|\ \|}$.

Es gilt $U_2 \cap (B_{\|\ \|} - B_{\|\ \|}) = U_2(2B_{\|\ \|}) \subseteq \gamma(U_n)$.
Daraus folgt:

$$(U_2 + x_o) \cap B_{\|\ \|} \subseteq \gamma(U_n) + x_o$$

$$(U_2 + x_o) \cap B_{\|\ \|} \subseteq (\gamma(U_n) + x_o) \cap B_{\|\ \|}.$$

3) Sei τ_1 eine Vektorraumtopologie auf E, die mit auf $B_{\|\ \|}$ übereinstimmt. Dann, so behaupten wir, ist γ feiner als τ_1.
Sei W eine τ_1 Umgebung. Es existieren W_n so daß

$$W_o = W$$
$$W_n + W_n \subseteq W_{n-1}.$$

Wähle nun eine Folge U_n von τ Umgebungen, sodaß

$$U_n \cap nB_{\|\ \|} \subseteq W_n .$$

Dann gilt für jedes n aus $\mathbb{N}$

$$(U_1 \cap B_{\|\ \|}) + \ldots + (U_n \cap nB_{\|\ \|}) \subseteq W.$$

Wir haben somit eine Folge von Umgebungen U_n konstruiert, sodaß

$$\gamma(U_n) \subseteq W.$$

Satz 3.1.3.:
Sei H eine Familie von Abbildungen von einem Saksraum $(E,\|\ \|,\tau)$ in einen topologischen Raum F. Dann gilt: H ist genau dann τ-gleichgradig stetig, wenn $H_{/B_{\|\ \|}}$ τ-gleichgradig ist.

Beweis:
$\cap\, T^{-1}_{/B_{\|\ \|}}(W) = \cap(T^{-1}(W) \cap B_{\|\ \|}) = (\cap T^{-1}(W)) \cap B_{\|\ \|}$. $\cap T^{-1}(W)$ ist eine Menge, deren Einschränkung auf $B_{\|\ \|}$ eine τ Umgebung ist. Mit Satz 3.1.2. ist $\cap T^{-1}(W)$ in γ.

Satz 3.1.4.:
Eine Folge x_n aus E konvergiert genau dann in (E,γ), wenn x_n normbeschränkt ist, und in (E,γ) konvergiert.

Beweis: $\Leftarrow$
klar, denn auf normbeschränkten Mengen stimmen τ und γ überein. Sei nun x_n eine Folge, die in (E,γ) gegen Null konvergiert. Dann konvergiert sie auch in (E,τ) gegen Null. Wir müssen also noch Normbeschränktheit von x_n nachweisen.

Annahme: x_n ist nicht normbeschränkt. Dann existiert eine Teilfolge x_{n_k} sodaß $x_{n_k} \notin 2^k B_{\|\ \|}$.

Da aber B τ-abgeschlossen ist, finden wir τ-Umgebungen U_k, sodaß

$$x_{n_k} \notin 2^{-k} B_{\|\ \|} + 2U_k$$

und

$$U_k + U_k \subseteq U_{k-1}.$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned}\gamma(U_k) &\subseteq 2B_{\|\ \|} + \dots + 2^{k-1}B_{\|\ \|} + U_k + \dots + U_{k+p} \\ &\subseteq 2^k B_{\|\ \|} + 2U_k.\end{aligned}$$

Es gilt somit für jedes $k \in \mathbb{N}$ $\gamma(U_n) \subseteq 2^k B + 2U_k$.
Damit ist eine Umgebung konstruiert, sodaß $x_{n_k} \notin \gamma(U_n)$.

<u>Satz 3.1.5.:</u>
Eine Menge B in E ist genau dann γ-beschränkt, wenn sie $\|\ \|$-beschränkt ist.

<u>Beweis:</u>
1) Sei B $\|\ \|$-beschränkt. Da γ größer als $\|\ \|$ ist, ist B auch γ-beschränkt.
2) Sei B γ-beschränkt. Wäre B nicht $\|\ \|$-beschränkt, so würde eine Folge $\{x_n\}$ in B existieren, sodaß $x_n \notin n^2 B_{\|\ \|}$. Andererseits konvergiert $\{x_n n^{-1}\}$ in γ gegen Null. Daraus folgt $\{x_n n^{-1}\}$ ist $\|\ \|$-beschränkt.

<u>Satz 3.1.6.:</u>
Eine Menge B in E ist genau dann γ-kompakt, wenn sie $\|\ \|$-beschränkt und τ-kompakt ist.

Beweis:
Auf normbeschränkten Mengen stimmen τ und γ überein. Die normbeschränkten Mengen und die γ beschränkten Mengen stimmen überein.

Satz 3.1.7.:
(E,γ) ist genau dann semimontel, wenn $B_{\|\ \|}$ τ-kompakt ist.

Beweis:
Semimontel heißt, daß jede beschränkte Menge relativkompakt ist.

Satz 3.1.8.:
(E,γ) ist genau dann vollständig, wenn der Saksraum $(E,\|\ \|,\tau)$ vollständig ist. Das heißt genau dann, wenn $B_{\|\ \|}$ τ-vollständig ist.

3.2. Dualität in Saksräumen:

In einem Saksraum $(E,\|\ \|,\tau)$ stehen drei natürliche Dualräume zur Verfügung

E'_τ der Dualraum von (E,τ)
E'_γ der Dualraum von $(E,_\gamma)$
$E'_{\|\ \|}$ der Dualraum von $(E,_{\|\ \|})$

wobei $E'_\tau \subseteq E'_\gamma \subseteq E'_{\|\cdot\|}$.

Die Dualräume werden mit der starken Topologie ausgestattet.

$(E'_\tau,\ \beta(E'_\tau\ ,E_\tau))$
$(E'_\gamma, \|\ \|)$
$(E'_{\|\ \|}, \|\ \|)$.

Sprechen wir in Hinkunft vom Dualraum des Saksraumes $(E,\| \|,\tau)$ so meinen wir stets E'_γ.

Die Aussage des nächsten Lemmas wird im folgenden öfters verwendet. Daher wird es explizit formuliert.

Lemma 3.2.1.:
Sei (E,τ) ein l.c. Vektorraum. U sei eine abgeschlossene, absolutkonvexe Umgebung. A sei abgeschlossen und absolutkonvex. Dann gilt $(U\cap A)^\circ \subseteq U^\circ + A^\circ \subseteq 2(U\cap A)^\circ$.

Beweis:
Die zweite Inklusion folgt aus $U^\circ \subseteq (U\cap A)^\circ$ und $A^\circ \subseteq (U\cap A)^\circ$. Andererseits ist U° mit dem Satz von Alouglu $\sigma(E',E)$-kompakt. A° ist $\sigma(E',E)$ abgeschlossen. Damit ist $U^\circ + A^\circ$ $\sigma(E',E)$ abgeschlossen und absolutkonvex.
Da $U^\circ + A^\circ \supseteq U^\circ \cup A^\circ$ ist $U^\circ + A^\circ$ auch eine Obermenge der abgeschlossenen, absolutkonvexen Hülle von $U^\circ \cup A^\circ$. Diese ist aber $(U\cap A)^\circ$.

Der nächste Satz erläutert wie E'_γ mit E'_τ und $E'_{\| \|}$ zusammenhängt.

Satz 3.2.2.:
E'_γ ist der Abschluß von E'_τ und $E'_{\| \|}$.

Beweis:
a) E'_γ ist in $E'_{\| \|}$ abgeschlossen. Sei f_n eine Folge von stetigen Funktionen die in $(E'_\gamma,\| \|)$ gegen f strebt. Das heißt aber $f_{n/B_{\| \|}} \xrightarrow{glm} f_{/B_{\| \|}}$. Daher ist $f_{/B_{\| \|}}$ τ-stetig. Also ist f γ-stetig.

b) E'_τ liegt in E'_γ dicht bezüglich der Normtopologie. Zu jedem $f \in E'_\gamma$, und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine τ-Umgebung U, sodaß gilt: $|f(x)| \leq \varepsilon$ für $x \in B_{\|\ \|} \cap U$. Das heißt $f \in \varepsilon(B\cap U)^\circ \subseteq \varepsilon(B^\circ + U^\circ)$. Es existieren daher $g \in B^\circ_{\|\ \|}$ und $h \in U^\circ$ sodaß $f = \varepsilon(g+h)$ oder $f - \varepsilon g = \varepsilon h$.
Fassen wir zusammen: Zu jedem $f \in E'_\gamma$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine τ-Umgebung U, und ein $\tilde{g} \in \varepsilon U^\circ$ sodaß $|(f - \tilde{g})(x)| \leq \varepsilon$ für jedes $x \in B_{\|\ \|}$.

Nun folgt eine Charakterisierung der γ-gleichgradig stetigen Mengen in $E'_{\|\ \|}$, die sich als nützlich erwiesen hat. (Vgl. 3.11.)

Satz 3.2.3.:

$H \subseteq E'_{\|\ \|}$ ist genau dann γ-gleichgradigstetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine τ-gleichgradigstetige Menge H_1 gibt, sodaß

$$H \subseteq \varepsilon B^\circ_{\|\ \|} + H_1 .$$

Beweis:

(1) Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir eine τ-Umgebung V so, daß $H \subseteq \frac{\varepsilon}{2}B^\circ + \frac{\varepsilon}{2}V^\circ \subseteq \varepsilon(V\cap B)^\circ$. Damit ist also $H_{/B_{\|\ \|}}$ τ-gleichgradigstetig.

(2) Sei H nun gleichgradig stetig, $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein k aus $\mathbb{N}$ so, daß $k^{-1} < \varepsilon$, und eine γ-Umgebung $\gamma(U_n)$ so, daß $H \subseteq (\gamma(U_n))^\circ \subseteq (U_1 \cap B_{\|\ \|} + \ldots + U_k \cap kB_{\|\ \|})^\circ$ $\subseteq (U_k \cap kB_{\|\ \|})^\circ \subseteq U_k^\circ + k^{-1}B^\circ_{\|\ \|}$.

3.3. Unterräume von Saksräumen:

$(E, \|\ \|, \tau)$ sei ein Saksraum, F ein Unterraum von E. $(F, \|\ \|_{/F}, \tau_{/F})$ ist ebenfalls ein Saksraum. Aber es gilt im allgemeinen nicht: $\gamma[\|\ \|, \tau]_{/F} = \gamma[\|\ \|_F, \tau_F]$.

Im nächsten Abschnitt werden jedoch hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die gemischten Topologien $\gamma[\| \|, \tau_{/F}]$ und $\gamma[\| \|_F, \tau_F]$ übereinstimmen. Davon zieht man zum Beispiel bei der Behandlung von (H^∞, γ) Nutzen.

3.4. Definierende Halbnormen der gemischten Topologie:

Um Aussagen über die gemischte Topologie konkreter Saksräume treffen zu können, ist es vorteilhaft, die l.c. Topologie γ durch eine Familie von Halbnormen darzustellen.
Sei $(E, \| \|, \tau)$ ein Saksraum. Weiters gelte

τ - werde durch eine Familie S von Halbnormen erzeugt.

$$\| \| = \sup_{p \in S} p$$

Sei λ_n eine Folge von Skalaren, mit $\lim \lambda_n = \infty$, und p_n eine Folge von Halbnormen aus S.
Dann ist $p : x \to \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-1} p_n(x)$ eine Halbnorm auf E. Die Familie aller so gebildeten Halbnormen bestimmt eine l.c. Topologie $\tilde{\gamma}$.

Der nun folgende Satz gibt hinreichende Bedinungen dafür an, daß $\tilde{\gamma}$ mit der gemischten Topologie übereinstimmt.

Satz 3.4.1.:

Betrachten wir auf einem Saksraum $(E, \| \|, \tau)$ folgende Eigenschaften:

(1) zu jedem $x \in E$, $\varepsilon > 0$, $p \in S$ existieren $z, y \in E$, sodaß $x = y+z$, $p(z) = 0$, $\|y\| \leq p(x)+\varepsilon$.

(2) $B_{\| \|}$ ist τ-kompakt.

Es gelten folgende Aussagen:

(A) Gilt nun in E (1) oder (2), so ist $\tilde{\gamma} = \gamma[\| \ \|, \tau]$;

(B) Ist F ein Teilraum von $(E, \| \ \|, \tau)$ und erfüllt $(F, \| \ \|, \tau)$ die Bedingungen (1) oder (2), so gilt $\gamma[\| \ \|_F, \tau_F] = \gamma[\| \ \|, \tau]_{/F}$.

3.5. Vervollständigung eines Saksraumes:

$(E, \| \ \|, \tau)$ sei ein Saksraum. Die folgende Prozedur liefert einen vollständigen Saksraum.

1) $\hat{E}_\tau$ sei die l.c. Vervollständigung von (E, τ);
2) $\hat{B}$ der Abschluß von $B_{\| \ \|}$ in $\hat{E}_\tau$;
3) $\| \ \|_{\hat{}}$ sei das Minkowskifunktional $\hat{B}$;
4) $\hat{E}$ sei die lineare Hülle von $\hat{B}$;
5) $\hat{\tau}$ sei die von $\hat{E}_\tau$ induzierte Topologie auf $\hat{E}$.

Bildet man nun den Saksraum $(\hat{E}, \| \ \|_{\hat{}}, \hat{\tau})$ so ist dieser vollständig und er besitzt die Universaleigenschaft der Vervollständigung: Sei $(F, \| \ \|^{\sim}, \tilde{\tau})$ ein vollständiger Saksraum. $T : (E, \| \ \|, \tau) \to (F, \| \ \|^{\sim}, \tilde{\tau})$ ein Saksraummorphismus. Dann existiert genau ein Saksraummorphismus $\hat{T} : (\hat{E}, \| \ \|_{\hat{}}, \hat{\tau}) \to (F, \| \ \|^{\sim}, \tilde{\tau})$ der T fortsetzt.

Nun werden wir projektive Limiten von Saksräumen behandeln. Die Darstellung eines Saksraumes als projektiven Limes erlaubt es, ihn aus einfachen Räumen zusammenzusetzen.

3.6. Projektive Limiten von Banachräumen:

Sei $\{(E_\alpha, \| \|_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von normierten Räumen. Auf $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha =: E$ definieren wir eine Norm:

$$\| \|_\infty : (x_\alpha)_{\alpha\in A} \quad \sup_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_\alpha .$$

Mit dieser Norm ist der Raum $B\text{-}\Pi E_\alpha := \{x \in E \mid \|x\|_\infty < \infty\}$ ein normierter Raum. $B\text{-}\Pi E_\alpha$ ist genau dann vollständig, wenn jeder der E_α vollständig ist.
Ist nun A eine gerichtete Menge, und $\{\pi_{\beta\alpha} : E_\alpha \to E_\beta : \alpha \leq \beta , \alpha , \beta \in A\}$ ein projektives Spektrum von normierten Räumen, so heißt der abgeschlossene Unterraum:

$$B\text{-}\lim E_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in B\Pi E_\alpha \mid \pi_{\beta\alpha}(x_\beta) = x_\alpha, \alpha < \beta\}$$

der Banachraumprojektive Limes der $\{E_\alpha\}$.

3.7. Produkte und projektive Limiten von Saksräumen:

Sei $(E_\alpha, \| \|_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von Saksräumen. Bildet man nun $(E, \| \|_\infty)$ und (E, τ_∞), wobei τ_∞ die Produkttopologie der τ_α darstellt. Er wird das Saksraumprodukt der E_α genannt, und mit $S\Pi E_\alpha$ bezeichnet.
Sind nun die $\pi_{\beta\alpha}$ Saksraummorphismen, ist A eine gerichtete Menge, und ist $\{\pi_{\beta\alpha} : E_\beta \to E_\alpha, \alpha \leqslant \beta\}$ ein projektives System, so heißt der Unterraum
$\{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in S\Pi E_\alpha \mid \pi_{\beta\alpha}(x_\beta) = x_\alpha, \alpha \leqslant \beta, \alpha, \beta \in A\}$
Saksraum projektiver Limes der E_α, und wird mit $S\text{-}\lim E_\alpha$ bezeichnet.

Satz 3.7.1.:
Ein Saksraum $(E, \| \|, \tau)$ ist genau dann vollständig, wenn er S-projektiver Limes von Banachräumen ist.

<u>Beispiele 3.7.2.:</u>

1) $(C^b(T), \| \|, \tau_{\mathcal{K}})$

$\mathcal{K}(T)$ sei die Familie der kompakten Mengen des lokalkompakten Raumes T. Seien K_1 und K_2 aus $\mathcal{K}(T)$ und $K_1 \supseteq K_2$.

Sei weiters $\rho_{K_1K_2} : C(K_1) \to C(K_2)$ die Restriktionsabbildung.

Dann ist $\{\rho_{K_1K_2} : C(K_1) \to C(K_2) : K_1 \supseteq K_2\}$ ein projektives Spektrum von Banachräumen. Bilden wir nun S-lim $C(K)$, so können wir diesen Limes kanonisch mit $(C(T), \| \|, \tau_{\mathcal{K}})$ identifizieren.

2) $(H^\infty(D), \| \|, \tau_K)$

Sei $K \subseteq D$ kompakt, und $A(K)$ der Raum der auf K stetigen und holomorphen Funktionen. Dann ist $\{\rho_{K_1K_2} : A(K_1) \to A(K_2) : K_1 \supseteq K_2\}$ ein projektives Spektrum von Banachräumen. Weiters ist S-lim $A(K)$ kanonisch mit $(H^\infty(D), \| \|, \tau_{\mathcal{K}})$ identifizierbar.

3) $(L(H), \| \|, \tau_\sigma)$

Seien M, N abgeschlossene Teilräume von H. Wir definieren $(M,N) \leq (M_1,N_1)$ genau dann, wenn $M \subseteq M_1$ und $N \subseteq N_1$. Sei nun $(M,N) \leq (M_1,N_1)$. Dann existiert mit

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, dotted, "T"] & N_1 \arrow[d, "P"] \\ M \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\tilde{T}"'] & N \end{tikzcd}$$

eine natürliche Kontraktion von $L(M_1,N_1)$ in $L(M,N)$. Betrachtet man nun $\mathcal{F}$, die Familie F von <u>endlichdimensionalen</u> Teilräumen von H, so ist $\{L(M,N) : M,N \in \mathcal{F}\}$ ein projektives Spektrum, und es gilt S-lim (M,N) ist kanonisch mit $(L(H), \| \|, \tau_\sigma)$ identifizierbar.

Die folgende Darstellung des Dualraumes eines projektiven Limes von Saksräumen wird bei der Entwicklung einer verallgemeinerten Gelfand-Naimark Theorie benötigt.

Satz 3.7.4.:

Sei $(E, \| \|, \tau)$ der Saksraum-projektive Limes des Spektrums $\{\pi_{\beta\alpha} : E_\beta \to E_\alpha, \alpha \leq \beta, \alpha, \beta \in A\}$. Weiters sei $\pi_\alpha(B_{\| \|})$ dicht in $B_{\| \|_\alpha}$.

Dann gilt:

(i) E'_γ ist der Banachraum-injektive Limes des Spektrums $\{i_{\alpha\beta} : (E_\alpha)'_\gamma \to (E_\beta)'_\gamma : \alpha \leq \beta, \alpha, \beta \in A\}$ wobei $i_{\alpha\beta}$ die Transponierte von $\pi_{\beta\alpha}$ ist.

(II) $H \subseteq (E, \| \|)$ ist genau dann γ-gleichgradig stetig, wenn eine Folge α_n in A existiert, sodaß für jedes $n \in N$ eine Teilmenge $H_n \subseteq (E_{\| \|})'$ existiert, sodaß

1) H_n ist τ_{α_n}-gleichgradig stetig ist;

2) $\sum_n \{\sup \|f\| : f \in H_n\} < \infty$

3) zu jedem $f \in H$ existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in H_n$, sodaß $f = \sum_n f_n$.

3.8. Der Dualraum von $(C(X), \beta)$:

Der oben gebrachte Satz über Dualräume von projektiven Limiten ermöglicht es, den Dualraum von $(C^b(X), \beta)$ mit den Radonmaßen auf X zu identifizieren.

Definition 3.8.1.:

X sei im folgenden ein vollständig regulärer Raum.

1. Prämaße auf X

Ein Prämaß auf X ist ein Element des projektiven Limes (gebildet in der Kategorie der Vektorräume) des Spektrums

$$\{\rho_{K_1K_2}: M(K_1) \to M(K_2) : K_1 \supseteq K_2, K_1, K_2 \in K(X)\}$$

wobei $\rho_{K_1K_2}$ die natürliche Restriktion darstellt.

2. Äußere Maße auf X

Sei μ ein Prämaß auf X. Sei $K \in K(X)$. Für eine relativ offene Menge $U \subseteq K$ definieren wir:

$$|\mu_K|^*(U) = \sup \{\int f \, d|\mu_K|\}.$$

Das Supremum wird über alle stetigen positiven Funktionen mit $f \leq \chi_U$ genommen.
Für eine beliebige Menge $A \subseteq K$ definieren wir:

$$|\mu_K|^*(A) = \inf \{|\mu_K|^*(U) \mid U \supseteq A, \text{ U offen}\}$$

Ist C nun eine Teilmenge von X, so definieren wir das äußere Maß wie folgt:

$$|\mu|^*(C) = \sup \{|\mu_K|^*(C \cap K) \mid K \in K(X)\}.$$

3. Straffe Maße auf X

Ein Prämaß μ heißt ein straffes Maß, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine in X kompakte Menge K gibt, sodaß $|\mu|^*(X \setminus K) < \varepsilon$. Den Raum der straffen Maße auf X bezeichnen wir mit $M_t(X)$. Ist nun $x \in C^b(X)$, $\mu \in M_t(X)$, und K_n eine steigende Folge von Kompakta in X, so existiert der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} \int x_{/K_n} \, d\mu_{K_n}$ und ist von der speziellen Auswahl der K_n unabhängig. Wir schreiben dafür

$$\int x \, d\mu.$$

Maße mit kompakten Träger

Ist $K \in K(X)$ und $\mu \in M(K)$, so definiert μ in natürlicher Weise ein straffes Maß auf X. Für $K_1 \subsetneq K$ setzen wir $\mu_{K_1} = \mu_{/K_1}$. Ist aber $K_1 \supset K$ so setzen wir für $x \in C(K_1)$ $\mu_{K_1} : x \to \int x_{/K} d\mu$.

Diese Vorgangsweise liefert ein Prämaß $\tilde{\mu}$ auf X. Es gilt:

$$|\tilde{\mu}|^*(X \setminus K) = 0$$

Mit $M_o(X) = \bigcup_{K \in K(X)} M(K)$ bezeichnen wir die Maße mit kompaktem Träger auf X.

Satz 3.8.2.:

Sei X vollständig regulär. Dann ist der Dualraum von $(C^b(X), \tau_K)$ vermittels der Bilinearform

$$(x, \mu) \to \int x d\mu$$

isomorph zu $M_o(X)$.

Beweis:

$(C(X), \tau_K)$ ist ein dichter Teilraum des projektiven Limes (gebildet in der Kategorie der l.c. Räume) des Spektrums

$$\{\rho_{K, K_1} : C(K) \to C(K_1) : K_1 \subseteq K \ , \ K_1, K \in K(x)\}$$

Der Dualraum von $\lim (C(K), \| \ \|)$ ist der induktive Limes des Spektrums

$$\{i_{K_1 K} : M(K_1) \to M(K) : K \supseteq K_1, \ K, K_1 \in K(x)\}.$$

Dieser ist aber $\bigcup_{K \in K(X)} M(K)$

Satz 3.8.3.: (von Riesz)

Der Dualraum von $(C(X), \beta)$ ist vermittels der Bilinearform

$$(x, \mu) \to \int x d\mu$$

isomorph zu $M_t(X)$.

Beweis:

Wir können das Ergebnis mit formalen Manipulationen mit projektiven Limiten herleiten.

$$(C^b(X),\beta) = S\text{-}\varprojlim_{K} \{C(K)\}$$

Mit 3.8.2. gilt:

$$(C^b(X),\beta)' = B\text{-}\varinjlim \{M(K)\}$$

Andererseits gilt: $M_t(X) = B\text{-}\varinjlim \{M(K)\}$

3.9. Dualräume von Banachräumen als Saksräume:

Wir betrachten den Saksraum $(E,\|\ \|,\tau)$ wobei E der Dualraum eines Banachraumes F und τ die Topologie $\sigma(E,F)$ ist Wir werden zeigen, daß sich Saksräume mit τ-kompakter Einheitskugel in der obigen Form darstellen lassen. Zuerst wird jedoch die gemischte Topologie für solche Räume identifiziert.

Satz 3.9.1.:

Sei F ein Banachraum. $E := F'$. $\|\ \|$ ist die Dualnorm. Dann ist die gemischte Topologie des Saksraumes $(E,\|\ \|,\sigma(E,F))$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen von F.

Beweis:

Wir bestimmen zuerst die γ-gleichgradig stetigen Mengen in E'_γ. Da $E'_\sigma \subseteq E'_\gamma \subseteq E'_{\|\ \|}$, folgt $F \subseteq E'_\gamma \subseteq F''$. E'_γ ist der Abschluß von F in F''. F ist aber vollständig, und daher ist $E'_\gamma = F$.

$H \subseteq E'_\gamma$ ist genau dann γ-gleichgradig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\sigma(E,F)$ gleichgradig stetige Menge H_1 existiert, sodaß

$$H \subseteq \varepsilon B_{\| \|} + H_1$$

H_1 liegt in der Bipolaren einer endlichen Teilmenge von E. Somit ist H präkompakt in $(F, \| \|)$. Da F aber vollständig ist, gilt:

$$\gamma[\| \|, \tau] = \tau_C(E,F).$$

wobei $\tau_C(E,F)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen von F ist.

Satz 3.9.2.:

In einem Saksraum $(E, \| \|, \tau)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

1) $B_{\| \|}$ ist π-kompakt;
2) E hat die Form $(F', \| \|, \sigma(F',F))$ wobei $F = E'_\gamma$;
3) E ist ein Saksraum-projektiver Limes von endlich-dimensionalen Teilräumen von E'_γ.

Beweis:

$2 \Longrightarrow 1$ Das ist die Aussage des Satzes von ALAOGLU.

$1 \Longrightarrow 2$ Da (E,γ) semireflexiv ist, stimmen $(E, \| \|)$ und $(E'_\gamma, \| \|)$ überein. Weil $(B_{\| \|}, \tau)$ und $(B_{\| \|}, \sigma(E,E'_\gamma))$ kompakte Hausdorffräume sind, stimmen τ und $\sigma(E,E'_\gamma)$ in $B_{\| \|}$ überein. Daher ist der Saksraum $(E, \| \|, \tau)$ isomorph zu $(E, \| \|, \sigma(E,E'_\gamma))$.

$2 \Longrightarrow 3$ Folgt aus Satz 3.7.1.

3.10. Der Riesz'sche Darstellungssatz für Vektorwertige Maße

3.10.1. Hom (E,F):

Die γ-stetigen linearen Operatoren von $(E, \| \|, \tau)$ nach $(F, \| \|, \tau_1)$ bezeichnen wir mit Hom (E,F).

Diesen Vektorraum statten wir mit zwei topologischen Strukturen aus.

Einerseits mit der Norm

$$\|f\| = \sup_{x \in B_{\| \|}} \|f(x)\|_F$$

und mit der lokalkonvexen Topologie, die durch Halbnormen

$$p_x : f \to p(f(x)) \quad (x \in E, p \in S)$$

defininiert wird, andererseits.

Ist (F_α) ein projektives System von Saksräumen, so ist Hom $(E, S\text{-}\lim F_\alpha)$ identifizierbar mit $S\text{-}\lim$ Hom (E, F_α).

Dies sieht man aus folgendem Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, "f_\alpha"'] & & S\text{-}\lim F_\alpha \arrow[d] \\ & & F_\alpha \end{tikzcd}$$

3.10.2. Radonmaße mit Werten in Saksräumen:

Es sei $(E, \| \|, \tau)$ ein Saksraum, dessen Topologie τ durch eine saturierte Familie von Halbnormen S erzeugt wird. Ist $p \in S$, so ist E_p die Vervollständigung von E/N_p, wobei N_p der Kern von p ist.
w_p bezeichnet die natürliche Abbildung von E in E_p.
X sei vollständig regulär. Ein beschränktes Radonmaß auf X, mit Werten in E ist eine normbeschränkte Mengenfunktion auf $Bo(X)$, die der Bedingung

$$\lim_{\substack{K \in K(X) \\ K \subset A}} w_p \circ \mu(K) = w_p \circ \mu(A) \quad \text{in } E_p$$

für jedes $A \in Bo(X)$ und jedes $p \in S$ genügt.

$M_R(X,E)$ sei der Vektorraum der E-wertigen Radonmaße auf X. $M_R(X)$ wird mit zwei topologischen Strukturen ausgestattet. $\| \|$ ist die Semivariation.
Die zweite Topologie wird durch die Halbnormen

$$\mu \to p(\int x \, d\mu) \quad (p \in S, x \in C^b(X))$$

definiert.

Satz 3.10.2.1.:
Es sei $(E, \|\ \|, \tau)$ ein vollständiger Saksraum. Dann ist

$$M_R(X,E) = S\text{-}\lim_{p \in S} M_R(X,E_p)$$

Bevor wir das eigentliche Ergebnis dieses Abschnittes formulieren, bemerken wir, daß für endlichdimensionale Banachräume E gilt:

$$M_R(X,E) = \mathrm{Hom}\,(C^b(X),E)$$

wobei $\mu \in M_R(X,E)$ den Operator

$$x \to \int x d\mu$$

induziert. 3.10.2.1. ist eine triviale Verallgemeinerung von 3.8.3.

Satz 3.10.2.2.:
Sei $(E, \|\ \|, \tau)$ ein Saksraum mit τ-kompakter Einheitskugel. X sei vollständig regulär. Dann gilt: Zu jedem β-γ-stetigen linearen Operator $T : C^b(X) \to E$ existiert ein Radonmaß $\mu : Bo(X) \longrightarrow E$, sodaß $Tx = \int x d\mu$ $(x \in C^b(X))$. Umgekehrt ist der Operator $x \to \int x d\mu$ β-γ-stetig. Zusammengefaßt heißt das $M_R(X,E) = \mathrm{Hom}\,(C^b(X),E)$.

Beweis:
Sei $G := E'_\gamma$. Das Ergebnis wird wiederum mit formalen Manipulationen gezeigt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}\,((C^b(x),E) &= \mathrm{Hom}\,(C^b(X), S\text{-}\varinjlim_{F \in \mathcal{F}(G)} F'_\gamma) = \\ &= S\text{-}\varprojlim \mathrm{Hom}\,(C^b(X),F'_\gamma) =\end{aligned}$$

F'_γ ist aber endlichdimensional (Satz 3.9.2.) daher

$$\begin{aligned}&= S\text{-}\varprojlim\ M_R(X,F') = \\ &= M_R(X,E)\end{aligned}$$

Wendet man diesen Satz auf den Saksraum $(E,\| \|,\sigma(E,E'))$ (E ein Banachraum) an, so bekommt man den folgenden, bekannten Darstellungssatz:

Satz 3.10.2.3.:
Sei $(E,\| \|)$ ein normierter Raum. Sei X vollständig regulär. Dann existiert zu jedem Operator $T : C^b(X) \to E$ ein Radonmaß $\mu : Bo(X) \to (E'',\sigma(E'',E'))$ sodaß

$$Tx = \int x d\mu \quad (x \in C^b(X))$$

Bildet darüberhinaus T die Einheitskugel $B_{\| \|}$ von $C^b(X)$ in relativ kompakte Mengen von E, so ist $\mu : Bo(X) \to E$ ein Radonmaß bezüglich der Normtopologie auf E.

3.11. Die gemischte Topologie auf H^∞:

Bildet man die gemischte Topologie des Saksraumes $(H^\infty,\| \|_\infty,\tau_K)$, und bezeichnet sie mit β, so folgt mit dem Satz 3.1.6. und dem Satz von Montel, daß (H^∞,β) der Dualraum des Banachraumes $(H^\infty,\beta)'$ ist. Weiters ist $(H^\infty,\beta)'$ isomorph zu L^1/H_o^∞. Betrachtet man andererseits die gemischte Topologie des Saksraumes $(H,\| \|,\tau_1)$ und bezeichnet sie mit β_1, so gilt: β_1 ist echt feiner als β. Andererseits stimmen die Dualräume von (H^∞,β) mit (H^∞,β_1) überein, wie man aus Satz 3.2.3. ableiten kann. Daraus folgt, daß β nicht die Mackey Topologie des dualen Paares $(H^\infty,L^1/H_o^1)$ sein kann.
Es ist Hauptanliegen dieses Paragraphen, die gemischte Topologie β_1 als die Mackey Topologie zu identifizieren. Dazu benötigt man Charakterisierungen der schwach kompakten Mengen in L^1/H_o^1.

3.11.1. H^∞ wird in L^1/H^1_o eingebettet:

Sei g aus H^∞, dann existiert $(Tg,h) := \int ghd\frac{\vartheta}{2\pi}$, $h \in H^\infty$ ein Element in L^1/H^1_o. Ist g aus der Einheitskugel von H^∞, so gelten folgende Ungleichungen:

$$\|g\|_1^2 \leq \|g\|_2^2 \leq \|Tg\|_{L^1/H^1_o} \leq \|g\|_q \leq \|g\|_\infty \quad (1\leq q\leq\infty)$$

Somit ist die Abbildung

$$T : H^\infty \to L^1/H^1_o$$

stetig und injektiv.

Diese Betrachtungen zeigen, daß die Saksräume $(H,\|\ \|_\infty,\|\ \|_1)$ und $(H^\infty,\|\ \|_\infty,\|\ \|_{L^1/H^1_o})$ isomorph sind. Mit Satz 3.1.3 gilt:
$H \subseteq L^1/H^1_o$ ist genau dann β_1-gleichgradig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodaß für alle $g \in B_{\|\ \|_\infty}$ mit $\|Tg\|_{L^1/H^1_o} < \delta$ und alle $\varphi \in H^\infty$ gilt:

$$|(\varphi,g)| < \varepsilon.$$

Es ist das erklärte Ziel dieses Abschnittes, für jede $\sigma(L^1/H^1_o,H^\infty)$ kompakte Menge die obige Bedingung nachzuweisen.

3.11.2. β_1 ist die Mackey Topologie des Paares $(H^\infty,L^1/H^1_o)$:

Lemma 3.11.2.2.:
Die Einheitskugel in H^∞ ist bezüglich der Metrik $d(f,g) := \|Tf-Tg\|_{L^1/H^1_o}$ vollständig.

Lemma 3.11.2.2.:

Sei φ_n eine Folge in $L^1_{/H^1_o}$, die schwach gegen O konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_o \in \mathbb{N}$. $\delta_o > 0$, und ein $g_o \in H^\infty$ mit

$$\|g_o\| \leq 1 - \delta_o/2$$

sodaß für jedes $g \in B_{\|\ \|_\infty}$ mit

$$\|Tg_o - Tg\|_{L^1_{/H^1_o}} < \delta_o$$

und jedes $n \geq n_o$ gilt $|(\varphi_n, g)| < \varepsilon$.

Beweis:

Betrachtet man die Mengen $F_n = \{f \in H^\infty \mid \|f\|_\infty \leq 1;\ |(\varphi_m, f)| < \varepsilon,\ m \geq n\}$, so besagt der Satz von Baire, daß mindestens eine dieser Mengen eine Kugel bezüglich der durch $L^1_{/H^1_o}$ induzierten Metrik enthält.

Bemerkung 3.11.2.3.:

Gelingt es, die im obigen Lemma gefundene Kugel in den Ursprung zu verlagern, so ist alles gezeigt. Diese Verlagerung gelingt mühelos, wenn der zugrunde liegende vollständige Raum ein Vektorraum ist. Hier ist aber der metrische Raum $(B_{\|\ \|}, d)$ zu behandeln, und genau dieser Umstand macht den folgenden Beweis schwierig.

Lemma 3.11.2.4.:

Sei φ_n eine Folge in $L^1_{/H^1_o}$, die schwach gegen Null konvergiert. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und ein $n_o \in \mathbb{N}$, sodaß für jedes $f \in B_{\|\ \|_\infty}$ mit

$$\|Tf\|' < \delta$$

und für jedes $n \geq n_o$ gilt

$$|(\varphi_n, f)| < \delta.$$

Beweis:

Die folgende Beobachtung ist wesentlich. Sie wurde in I.2.2.4. bewiesen.

$$\frac{1}{2\pi}\int (f)\,d\vartheta = \inf\left\{\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Re}\,u\,d\vartheta \mid u \in H^\infty,\ \mathrm{Re}\,u > |f|\right\} \quad (f \in H^\infty)$$

Nehmen wir an, daß die Behauptung falsch wäre, so heißt dies: Es existiert ein $\varepsilon_o > 0$, eine Folge (φ_{n_k}), und eine Folge f_k in $B_{\|\ \|_\infty}$ mit $\|Tf_k\| \to 0$ aber

$$|(\varphi_{n_k}, f_k)| > \varepsilon_o$$

Weiters existiert aufgrund der Formel eine Folge $u_k \in H^\infty$, sodaß für fixes $\tilde{L}$ gilt

$$\mathrm{Re}\,u_k > \tilde{L}|f_k|$$

$$\frac{1}{2\pi}\int u_k\,d\vartheta < k^{-2}.$$

Sei δ_o jene positive Zahl, die wir erhalten, wenn wir mit $\frac{1}{2}\varepsilon_o - \varepsilon_o^2$ in das obige Lemma einsetzen, und sei g_o die dazugehörige Funktion in $B_{\|\ \|_\infty}$. Wir behaupten nun, daß für hinreichend großes k folgendes gilt:

(1) $\|T(e^{-u_k} g_o - g_o)\|_{L'/H'_o} < \delta_o$

(2) $\|T(e^{-u_k} g_o + f_k - g_o)\|_{L'/H'_o} < \delta_o$

(3) $\|e^{-u_k} g_o + (1-\varepsilon_o) f_k\|_\infty < 1.$

Haben wir die Aussagen bewiesen, so folgt mit dem obigen Lemma:

$$|(\varphi_{n_k}, (1-\varepsilon_o)f_k)| \le |(\varphi_{n_k}, e^{-u_k} g_o)| + |(\varphi_{n_k}, e^{-u_k} g_o + f_k(1-\varepsilon_o)| <$$
$$< \varepsilon_o - \varepsilon_o^2.$$

dies steht in Widerspruch zur Annahme.

Zum Nachweis von (1):

$$\frac{1}{2\pi} \int |1-e^{-u_k}| d\vartheta \le \frac{1}{2\pi}\left(\int |1-e^{-u_k}|^2 d\vartheta\right)^{1/2} \le \left(2-2 \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int u_k \, d\vartheta\right)\right)^{1/2}$$

$$\le \sqrt[2]{2}\, k^{-1}.$$

Damit gilt für g_o aus $B_{\|\ \|}$

$$\|T(e^{-u_k} g_o - g_o)\| \le \|e^{-u_k} g_o - g_o\|_1 \le \|e^{-u_k} - 1\|_1 .$$

Damit ist (1) bewiesen, aber es ist damit auch gezeigt, daß

$$T(e^{-u_k} g_o + f_k - g_o)$$

in L^1/H^1_o gegen Null konvergiert.

Die Richtigkeit von (3) bleibt noch zu zeigen. Betrachten wir Mengen, auf denen $f_k \le \delta_o/2$ ist: dann gilt

$$\|e^{-u_k} g_o + (1-\varepsilon_o) f_k\|_\infty \le \|g_o\|_\infty + \|f_k\|_\infty < 1-\delta_o/2 + \delta_o/2$$

Auf Mengen mit $f_k > \delta_o/2$ gilt mit

$$-\mathrm{Re}\, u_k < -f_k\ \delta_o/2\ (-\log \varepsilon_o) \le \log \varepsilon_o$$

Damit

$$\|e^{-u_k} g_o + (1-\varepsilon_o) f_k\|_\infty \le |e^{-u_k}|\,|g_o| + (1-\varepsilon_o)\|f_k\| \le 1-\varepsilon_o+\varepsilon_o .$$

Jetzt ist das Lemma vollständig bewiesen.

Bemerkung 3.11.2.5.:
Aus Stetigkeitsgründen können wir δ so klein wählen, daß $n_o = 0$.

Fassen wir die Lemmata zusammen, so ergibt sich:

<u>Satz 3.11.2.6.:</u>
Jede $\sigma(L^1/H^1_o, H^\infty)$ kompakte Menge L^1/H^1_o ist β_1-gleichgradig stetig. (Mit anderen Worten: β_1 ist die Mackey-Topologie des dualen Paares $(H^\infty, L^1/H^1_o)$.)

<u>Beweis:</u>
Sei K schwach stetig in L^1/H^1_o und nicht β_1-gleichgradig stetig. Mit Bemerkungen in 3.11.1. gilt:
Es existiert ein $\varepsilon > 0$, eine Folge φ_n in K, eine Folge positiver Zahlen δ_n, die gegen Null konvergiert, und eine Folge f_n in $B_{\|\ \|}$ mit

$$\|Tf_n\| < \delta_n,$$

sodaß

$$|(\varphi_n, f_n)| > \varepsilon.$$

Mit dem Satz von Eberlein-Smulian gibt es eine Teilfolge φ_{n_k} und ein φ in K, sodaß φ_{n_k} schwach gegen konvergiert. Setzt man nun $\tilde{\varphi}_{n_k} := \varphi_{n_k} - \varphi$, so konvergiert $\tilde{\varphi}_{n_k}$ schwach gegen Null und es ergibt sich ein Widerspruch zu Lemma 3.11.2.4..

III. SAKS ALGEBREN

1. Grundlegende Definitionen:

Es werden nun gemischte Algebren definiert, die die Klasse der Banachalgebren in der selben Weise verallgemeinern, wie es die Saksräume für die Klasse der Banachräume tun.

Definition 1.:
Sei A eine Algebra mit Eins. $(A,\| \|,\tau)$ ist eine Saks-Algebra, falls $(A,\| \|)$ ein Banachraum ist, und τ durch eine Familie S von submultiplikativen Halbnormen erzeugt wird. Weiters muß gelten

$$\| \| = \sup_{p\in S} p$$

Existiert auf A eine Involution, und genügen alle $p \in S$ der Bedingung

$$p(x^*x) = p(x)^2$$

so heißt $(A,\| \|,\tau)$ Saks C^*-Algebra.

Ist $(A,\| \|)$ nicht vollständig, so heißt $(A,\| \|,\tau)$ Prä-Saks Algebra.

Bemerkung 2.:
Eine Saks Algebra hat eine Darstellung als projektiver Limes des Spektrums

$$\{w_{qp}: A_q \to A_p, \ p < q, \ p,q \in S\} \qquad A_p = A/_{N_p}$$

von Banachalgebren.

Definition 3.:
Sei $(A, \| \|, \tau)$ eine Saks Algebra. Die Menge der γ-stetigen Funktionale auf A, die $f(e) = 1$ erfüllen, bezeichnet man als das Spektrum von A. Es wird mit $M_\gamma(A)$ bezeichnet. $M_\gamma(A)$ wird mit der Topologie $\sigma(A', A)$ versehen.

2. Die Saks Algebra $C^b(X)$:

Dem Artikel von R.C. Buck [2] folgend, werden wir $C^b(X)$ mit einer l.c. Topologie ausstatten, die durch gewichtete Halbnormen erzeugt wird. Dann wird diese Topologie mit der gemischten Topologie $\gamma[\| \|, \tau_K]$ identifiziert werden.

Definition 2.1.:
Sei X ein vollständig regulärer Hausdorffraum. L^+ bezeichnet die Menge der oberhalb stetigen positiven Funktionen auf X, die bei ∞ verschwinden.
Die Halbnormen $p_\varphi : x \to \|\varphi x\|_\infty, \varphi \in L^+$ definieren eine l.c. Topologie $\tilde{\beta}$ auf $C^b(X)$, die feiner als τ_K ist.

Satz 2.2.:
Sei X vollständig regulär und hausdorffsch. Dann stimmen die Topologie $\tilde{\beta}$ und die gemischte Topologie des Saksraumes $(C^b(X), \| \|, \tau_K)$ überein.

Beweis:
1) $\tilde{\beta}$ ist gröber als γ;
Es genügt zu zeigen, daß $\tilde{\beta}$ auf $B_{\| \|}$ gröber als τ_K ist. Sei $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in L^+$,

$$A := \{t \in X \mid \varphi(t) > \varepsilon\}, \quad x \in B_{\| \|}.$$

Dann gilt:

$$p_\varphi(x) \leq p_A(\varphi x) + p_{\complement A}(\varphi x) \leq \sup_{t \in A} \varphi(t)\ p_A(x) + \varepsilon .$$

Wählt man nun $x \in B_{\| \|}$ so, daß $p_A(x) \sup_{t \in A} \varphi(t) < \varepsilon$, so folgt für diese x : $p_\varphi(x) < 2\varepsilon$.
Das heißt aber, daß auf $B_{\| \|}$ die Topologie $\tilde{\beta}$ gröber als τ_K ist.

2) $\tilde{\beta}$ ist feiner als γ;
Vorerst bemerken wir, daß $(C^b(X), \| \|, \tau)$ die Voraussetzungen des Satzes II.3.4.1. genügt.
Sei V nun eine $\gamma[\| \|, \tau_K]$-Umgebung. V enthält Mengen der Gestalt $\{x \in C^b \mid p_{A_n}(x) < \lambda_n\}$ wobei (A_n) eine steigende Folge von kompakten Mengen in X ist, und λ_n eine steigende Folge positiver Zahlen, die gegen ∞ konvergiert, ist.
Setzt man nun

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \lambda_1^{-1} & t \in A_1 \\ \lambda_n^{-1} & t \in A_n \setminus A_{n-1} \\ 0 & t \in X \setminus \cup A_n \end{cases}$$

so ist φ in L^+ und $U_{p_\varphi} \subseteq V$.

<u>Bemerkung 2.3.:</u>
Die Betrachtungen über das Spektrum $M_\gamma(C^b(X))$ verlangen folgende Variante des Stone Weierstrass Satzes.

<u>Satz 2.4.:</u>
Sei M eine Teilalgebra von $C^b_{\mathbb{R}}(X)$ (die reellwertigen Funktionen in $C^b(X)$), sodaß
1. M trennt Punkte von X.
2. Zu jedem $t \in X$ existiert ein x aus M, sodaß $x(t) \neq 0$. Dann ist M β-dicht in $C^b_{\mathbb{R}}(X)$.

2.1. Das Spektrum von $(C^b(X), \| \|, \tau)$:

Satz 2.1.1.:

Die Multiplikation ist stetig in $(C^b(X),\gamma)$.

Beweis:

β ist durch die Halbnormen p_φ dargestellt. Mit $\varphi \in L^+$ ist auch $\psi := (\varphi)^{1/2}$ aus L^+. Für $x,y \in C^b(X)$ gilt:

$$p_\varphi(x,y) \leq p_\psi(x)\ p_\psi(y).$$

Definition 2.1.2.:

$$\begin{aligned} \delta : X &\to M_\gamma(C^b(X)) \\ t &\to \delta_t \quad \text{wobei} \quad \delta_t : C^b(X) \to \mathbb{C} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \to x(t) \end{aligned}$$

heißt die verallgemeinerte Dirac Transformation.

Satz 2.1.3.:

δ ist unter den obigen Voraussetzungen ein surjektiver Homeomorphismus.

Beweis:

1. δ ist injektiv;
   Da X vollständig regulär ist, trennt $C^b(X)$ Punkte in X. Das heißt aber, daß δ injektiv ist.

2. δ ist ein Homeomorphismus.
   Da X vollständig regulär ist, ist die Topologie auf X äquivalent zu $\sigma(C^b(X)', C^b(X))$.
   $M_\gamma(C^b(X))$ trägt per Definitionem diese Topologie.

3. δ ist surjektiv;
   f sei ein β-stetiges multiplikatives Funktional.
   $M := \text{Ker } f_{/\mathbb{R}}$. Dann existiert ein $t_o \in X$, sodaß

$x(t_o) = 0$ für jedes $x \in M$. Würde es so ein t_o nicht geben, dann wäre angesichts der Tatsache, daß M die Punkte von X trennt, M β-dicht in $C^b_{\mathbb{R}}(X)$. Daraus folgt $M = \{x \mid x(t_o) = 0\}$. Das heißt $f = \delta_{t_o}$.

3. Repräsentation von Saks C^* Algebren:

Das letzte Beispiel zeigte, wie einfach das Spektrum $M_\gamma(A)$ sein kann, selbst wenn $M(A)$ kompliziert ist.
Die Bestimmung von Spektren ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn wir $M_\gamma(A)$ verwenden können, um Saks Algebren als Funktionen-Algebren darstellen zu können.
Im folgenden werden wir uns daher um eine Verallgemeinerung der Gelfand Naimark Theorie auf Saksalgebren bemühen.

3.1. Verallgemeinerte Gelfand Naimark Transformation:

Definition 3.1.1.:
Sei $(A, \| \|, \tau)$ eine kommutative Prä-Saks Algebra. Dann ist

$$\hat{x} : M_\gamma(A) \to \mathbb{C}$$
$$f \to f(x)$$

ein Element in $C^b(M_\gamma(A))$. Damit ist die Abbildung

$$GGNT : A \to C^b(M_\gamma(A))$$
$$x \to \hat{x}$$

ein Algebren Homomorphismus, sie heißt Generalized Gelfand Naimark Transform.

Bemerkung 3.1.2.:

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "GNT"] \arrow[dr, "GGNT"'] & C^b(M(A)) \arrow[d] \\ & C^b(M_\gamma(A)) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Satz 3.1.3.:

Sei $(A, \| \ \|, \tau)$ eine kommutative Saks C^* Algebra. Dann ist die Abbildung $GGNT : A \to C^b(M_\gamma(A))$ ein Algebren-Isomorphismus.

Beweis:

$GGNT(A)$ ist eine selbstadjungierte, punktetrennende Teilalgebra von $C^b(M_\gamma(A))$, die die Konstanten enthält. Nach dem Satz 2.4. ist $GGNT(A)$ damit β-dicht.
Sei S die Familie von Halbnormen, die die Topologie definiert. $A_p := A/_{N_p}$ die assoziierte B^* Algebra. $M(A_p)$ sei ihr Spektrum.
$M(A_p)$ ist eine kompakte Teilmenge in $M_\gamma(A)$.
Der Kern dieses Beweises liegt in folgender Behauptung:

$$M_\gamma(A) = \bigcup_{p \in S} M(A_p)$$

Sei nun f aus $M_\gamma(A)$. Dann gibt es mit Satz II.3.7.4. eine steigende p_n in P, sodaß $\Sigma f_n = f$ mit $f_n \in A'_{p_n}$.
Weiters gilt für jedes $\varepsilon > 0$ $\|\Sigma f_n\| < 1+\varepsilon$.
n_o sei so gewählt, daß $\sum_{n \geq n_o} \|f_n\| < \varepsilon$.

Zu zeigen ist nun, daß für hinreichend kleines ε gilt:

$$f \in M(A_{n_o}).$$

Nehmen wir an, daß

$$f \notin M(A_{p_{n_o}}).$$

Dann gibt es ein $x \in C^b(M_\gamma(A))$, sodaß $\|\hat{x}\| \leq 1$ und $\hat{x}(f) = 1$ und $\hat{x} = 0$ auf $M(A_{p_{n_o}})$.

GGNT (A) ist β-dicht, und daher existiert ein $x_1 \in A$ mit $\|x_1\| \leq 1+\varepsilon$ und

$$|\hat{x}_1(f)| \leq 1-\varepsilon$$
$$|\hat{x}_1| < \varepsilon \quad \text{auf} \quad M(A_{p_{n_o}})$$

folglich gilt für $g \in A'_{p_n}$ mit $\|g\| \leq 1+\varepsilon$:

$$\|f-g\| \geq (1+\varepsilon)^{-1} \|f(x_1-g(x_1)\| >$$
$$> \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} - \varepsilon.$$

Setzt man für $g = \sum_{n=1}^{n_o} f_n$, so erhält man den Widerspruch.

4. Die Saks Algebra $H^\infty(D)$:

Wir haben bereits gesehen, daß $(H^\infty(D), \|\ \|, \tau_K)$ einen Saks Unterraum von $(C^\infty(D), \|\ \|, \tau_K)$ bildet. Mit Satz II.3.4.1. ist (H^∞, β) ein topologischer Unterraum von (C^b, β). Somit läßt sich die gemischte Topologie von H^∞ durch die Halbnormen

$$\rho_\varphi : x \to \|\varphi x\|_\infty, \quad \varphi \in L^+, \ x \in H^\infty$$

erzeugen.

Diese Topologie wurde 1957 von R.C. Buck [3] eingeführt um folgenden Schwierigkeiten in H^∞ (ausgestattet mit der Normtopologie) zu begegnen.

(1) Die Polynome sind in $(H^\infty, \| \ \|)$ nicht dicht.

(2) Die Maximalen Ideale in $(H^\infty, \| \ \|)$ sind durch D nicht vollständig beschreibbar.

(3) Es ist (noch immer) unbekannt, ob $(H^\infty, \| \ \|)$ die Approximationseigenschaft besitzt.

Wir werden nun zeigen, daß die Polynome in H^∞ dicht liegen.

Definition 4.1.:
In einem topologischen Vektorraum E heißt eine Folge (x_n) Cesarobasis für E, wenn es zu jedem $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Folge von Skalaren λ_n gibt, sodaß mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k$$

gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-1} (s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n)$$

Wir definieren noch

$$\sigma_n = (n+1)^{-1} (s_0 + s_1 + \dots + s_n).$$

Satz 4.2.:
Sei z_n die Funktion: $z_n : D \to D$
$\lambda \to \lambda^n$

Dann ist die Folge (z_n) eine Cesaro Basis für (H^∞, β).

Beweis:
Sei $x \in H^\infty$. $\Sigma a_n z^n$ sie die Taylorentwicklung von x. Dann gilt $s_n \to x$ in τ_K. Damit folgt $\sigma_n \to x$ in τ_K. Um nachzuweisen, daß $\sigma_n \to x$ in β, müssen wir nach Satz II.3.1.4. die gleichmäßige Beschränktheit der σ_k nachprüfen. Dazu verwenden wir den folgenden Kern K_n

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{n} \frac{(1-\cos n(\vartheta-t))}{(1-\cos \ (\vartheta-t))} x(e^{i\vartheta})d\vartheta = \sigma_n(e^{it}).$$

Es gilt

$$\|K_n\|_1 = 1$$

und daraus folgt

$$\|\sigma_n\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

Wir werden Eigenschaften des Fejerschen Kernes benutzen, um zu zeigen, daß (H^∞,β) die Approximationseigenschaft besitzt.

Lemma 4.3.:
Sei E ein l.c. Raum mit Cesaro Basis (x_n), sodaß die Abbildungen

$$p_m : \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \to \sum_{n=1}^{m} \xi_n x_n$$

gleichgradig stetig sind.
Dann hat E die Approximationseigenschaft.

Satz 4.4.:
(H^∞,β) hat die Approximationseigenschaft.

Beweis:
Eine Familie von Abbildungen ist genau dann β-gleichgradig stetig, wenn sie, eingeschränkt auf $B_{\|\ \|}$, τ-gleichgradig stetig ist. Die Topologie τ_K wird durch die Halbnormen

$$p_r : x \to \sup \{|x(re^{i\vartheta})| \quad \vartheta \in [0,2\pi]\}$$

erzeugt. Mit der obigen Eigenschaft der Fejerschen Kerne gilt für jedes $x \in H^\infty$, jedes $r \in [0,1]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$p_r(\sigma_n) \leq p_r(x).$$

Das Spektrum von (H^∞,β) wird nun mit D identifiziert.

Die Abbildung: $T : D \to M(H^{\infty})$
$z \to \delta_z$ mit $\delta_z : H^{\infty} \to D$
$x \to x(z)$

bildet D injektiv in das Spektrum $M_{\gamma}(H^{\infty})$ ab. Darüber hinaus gilt der folgende Satz:

Satz 4.5.:
Die oben definierte Abbildung ist ein sujektiver Homeomorphismus.

Beweis:
T ist surjektiv:
Sei $\varphi \in M_{\gamma}(H^{\infty})$, $\lambda := \varphi(id_D)$. Da $z^n \to 0$ in β, und da φ diesen Limes respektieren muß, gilt $\lambda^n \to 0$. Daher ist $|\lambda|$ echt kleiner als Eins.
Für jede der Abbildungen z^n gilt: $\varphi(z^n) = \varphi_{\lambda}(z^n)$
Da aber die Polynome dicht in (H^{∞},β) liegen, gilt:

$$\varphi(x) = x(\lambda) \qquad x \in H^{\infty}.$$

Somit ist jedes $\varphi \in M_{\gamma}(H^{\infty})$ ein Auswertungsfunktional.
In I.2.2.2.2., wurde bereits bewiesen, daß T ein Homeomorphismus ist.

5. Der Abstand der Spektren $M(A)$ und $M_\gamma(A)$:

Auf einer Saksalgebra $(A, \| \|, \tau)$ sind drei Typen von Spektren gegeben: $M(A)$, $M_\gamma(A)$ und die Spektren $M(A_p)$. Es stellt sich die Frage, wie diese Spektren zusammenhängen. In 3.1. wurde gezeigt, daß in Saks-C^*-Algebren die Beziehung $M(A) = \bigcup_{p \in S} M(A_p)$ gilt.

Diese Beziehung wurde bewiesen, indem man Saks-Algebren als projektive Limiten darstellt.

Wir bringen nun zwei Beispiele. Sie zeigen, daß die Frage ob $M_\gamma(A)$ dicht in $M(A)$ liegt, sehr anspruchsvoll, und sehr schwierig ist.

5.1. Die Stone Čech Kompaktifizierung:

Sei S ein topologischer Raum. $F(S)$ bezeichne die Menge der auf S stetigen Funktionen mit Werten im Einheitsintervall I. Ist S vollständig regulär, so ist S homeomorph zu einem Teilraum von $I^{F(S)}$.
$I^{F(S)}$ ist mit dem Satz von Tychonov kompakt. Der Abschluß von S in $I^{F(S)}$ heißt die Stone Čech-Kompaktifizierung und wird mit $\beta(S)$ bezeichnet.
Die Stone Čech Kompaktifizierung ist durch folgenden Satz eindeutig charakterisiert.

Satz 5.1.1. (Stone Čech):
Sei S vollständig regulär, Y kompakt. Dann gilt:
Zu jeder stetigen Funktion $f : S \to Y$ existiert eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \beta(S) \to Y$.

Das ist die übliche Charakterisierung der Stone Čech Kompaktifizierung. Wir werden in Hinkunft von der folgenden äquivalenten Charakterisierung Gebrauch machen:
Jede beschränkte stetige Funktion f auf S läßt sich in eindeutiger Weise zu einer beschränkten Funktion $\tilde{f}$ auf $\beta(S)$ fortsetzen. Mit anderen Worten: $C^b(S) = C(\beta S)$.

Satz 5.1.2.:
Sei S vollständig regulär und hausdorffsch. $M(C^b(X))$ bezeichne das Spektrum von $(C^b(S), \| \, \|)$.
Dann gilt:
$M(C^b(S))$ ist die Stone Cech Kompaktifizierung von S.

Beweis:
Da $C^b(S)$ ein Einselement enthält, ist $M(C^b(S))$ kompakt. Weiters wissen wir, daß S zu einem dichten Teilraum von $M(C^b(S))$ homeomorph ist.
Da $C^b(S) = C^b(\beta S)$, und weil βS kompakt ist, gilt

$$M(C^b(S)) = \beta S.$$

Bemerkung 5.1.3.:
Daraus folgt, daß das γ-Spektrum dicht im Normspektrum liegt.

5.2. Das Korona Problem:
Wir wissen bereits, daß $M_\gamma(H^\infty)$ isomorph zu D ist. Die Frage ob nun $M_\gamma(H^\infty)$ dicht in $M(H^\infty)$ liegt, führt auf eine Frage, die Kakutani 1955 gestellt hat, und erstmals von L. Carleson positiv beantwortet wurde.
Carlesons Beweis beinhaltet subtile geometrische und kombinatorische Konstruktionen, und ist äußerst schwer nachzuvollziehen.
Wir greifen daher auf einen Beweis zurück, der von T. Wolff stammt, und mit einfachen Mitteln auskommt.

Satz 5.2.1.:
D liegt genau dann in $M(H^\infty)$ dicht, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:
Seien $f_1,\dots,f_n$ beschränkte, analytische Funktionen auf D, sodaß

$$|f_1|+\dots+|f_n| > \delta \text{ auf } D.$$

Dann existieren $g_1,\ldots,g_n$ in H^∞ derart, daß

$$f_1g_1 + \ldots + f_ng_n = 1.$$

Beweis:
Sei φ_o nicht im schwachen Abschluß von D. Das heißt, es existieren $f_1,\ldots,f_n$ in H^∞ sodaß $\varphi_o(f_i) = 0$ aber

$$\{\varphi \in M(H^\infty) \mid |\varphi(f_i)| < \delta,\ i = 1,..,n\}$$

hat mit D leeren Durchschnitt. Das heißt

$$|f_1| + \ldots + |f_n| > \delta \quad \text{auf } D.$$

Andererseits liegen die f_i in einem eigentlichen Ideal von H^∞. Mit anderen Worten: es existieren keine g_i in H^∞, sodaß

$$f_1g_1 + \ldots + f_ng_n = 1.$$

Dieses Argument ist reversibel, und damit folgt die Behauptung.

Bemerkung 5.2.2.:
Um das Problem tatsächlich angehen zu können, wird es in eine quantitative Form gebracht.

Satz 5.2.3. (KORONA THEOREM)
Zu $n \geq 1$ und $\delta > 0$ existiert eine Konstante $C(n,\delta)$ mit folgender Eigenschaft. Zu $f_1,\ldots,f_n$ in H^∞ mit $\|f_i\|_\infty \leq 1$ $(1 \leq i \leq n)$ und $|f_1|^2+\ldots+|f_n|^2 > \delta$ in D existieren $g_1,\ldots,g_n$ in H^∞ mit der Eigenschaft

$$\|g_i\|_\infty < C(n,\delta)$$

und

$$f_1g_1 + \ldots + g_nf_n = 1.$$

Bemerkung: Wir sagen, daß eine Funktion f analytisch in $\bar{D}$ ist, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodaß f in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1+\varepsilon\}$ analytisch ist.

Beweis:

Teil 1:

Zunächst zeigen wir, daß es genügt, den Satz für Funktionen f_i zu beweisen, die in $\bar{D}$ analytisch sind.

Zu f_i in H^∞ betrachte die Folge von Funktionen

$$f_i^k : z \to f_i\left(\frac{k-1}{k} z\right)$$

welche in $\bar{D}$ analytisch sind. Die Bedingung $\sum_{i=1}^{n} |f_i^k|^2 > \delta$ gilt für alle k.

Ist nun der Satz in der oben erwähnten, schwächeren Form bewiesen, so existieren auf D holomorphe Funktionen g_i^k sodaß

$$f_1^k g_1^k + \ldots + f_n^k g_n^k = 1$$

und

$$\|g_i^k\|_\infty < C(n,\delta).$$

Mit dem Satz von Montel können wir annehmen, daß die Folge g_i^k gleichmäßig auf Kompakta gegen eine analytische Funktion g_i konvergiert.

Die Bedingungen $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1$ und $\|g_i\|_\infty < C(n,\delta)$ bleiben im Limes erhalten.

Teil 2:

Sei also f_j in H^∞ und in $\bar{D}$ analytisch. Setzt man nun $h_j := \bar{f}_j / (|f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2)$ so ist jedes der h_j beschränkt. Weiter gilt: $\sum_{j=1} f_j h_j = 1$.

ABER die h_j sind nicht analytisch, und müssen daher modifiziert werden. Die nun folgende Technik der Modifikation ist Teil eines von Kozsul entwickelten Kalküls und wurde erstmals von L. Hörmander auf das Korona Problem angewendet.

Bei gegebenen h_j, h_k ist eine in $\bar{D}$ glatte Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial w_{jk}}{\partial \bar{z}} = h_j \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} \qquad i,j \in \{1,..,n\}$$

durch die Formel

$$w_{jk}(\xi) = \frac{1}{\pi} \iint_{\{|z|<1+\varepsilon\}} \frac{1}{z-\xi} h_j(z) \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} \, dxdy \qquad (x)$$

gegeben.

Bildet man nun die Funktionen $g_j := h_j + \sum_{K=1}^{n} (w_{jk} - w_{kj}) f_k$, so gilt zunächst

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1.$$

Wie die folgende Rechnung zeigt, sind die g_j analytisch (auf genau den Gebieten, auf denen die f_j auch analytisch sind).

$$\frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_k (w_{jk} - w_{kj}) f_k$$

$$= \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} + \sum_k \left(\frac{\partial w_{jk}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial w_{kj}}{\partial \bar{z}}\right) f_k + 0$$

$$= \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} = 0$$

Die g_j sind also in $\bar{D}$ analytisch. Um nachzuweisen, daß die g_j den geforderten Beschränktheitsbedingungen genügen, ist es notwendig, die w_{ik} unabhängig von f_j abzuschätzen.

<u>Teil 3:</u>

Abschätzungen für Lösungen der Gleichung $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = u$.

In unserem Fall ist u glatt in $\bar{D}$. Sei w_o jene Lösung, die durch (x) gegeben ist. Addiert man eine beliebige analytische Funktion p zu w_o, so ergeben sich eine neue Lösung der Gleichung $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = u$.

Unter den so gebildeten Lösungen, so behaupten wir, findet man eine, die die geforderten Eigenschaften besitzt.

Wir betrachten

$$\inf \{ \|w_o + p\|_\infty | p \text{ analytisch in } \bar{D} \}.$$

Aufgrund der Identität $H_o^1 = (C/_A)'$ stimmt dieses Infimum mit

$$\sup \{ | \int w_o F \frac{d\vartheta}{2\pi} | \quad F \in H_o^1, \|F\|_1 \leq 1 \} =: S$$

überein.

Einer Funktion F in H_o^1 kann man wieder eine Folge $F_k : z \to F(\frac{k-1}{k} z)$ zuordnen, welche in $\bar{D}$ analytisch ist. Mit dem Satz von Lebesgue gilt nun:

$$S = \sup \{ | \int w_o F d\vartheta | : F \in H_o^1, \|F\|_1 < 1, F \text{ ist analytisch in } \bar{D} \}.$$

Daher können wir im Folgenden voraussetzen, daß $F \in H_o^1$ analytisch in $\bar{D}$ ist.

Teil 4:

Anwendung der Greenschen Formeln.

Um Abschätzungen für den Ausdruck $\int w_o F d\vartheta$ gewinnen zu können, benutzen wir die Greensche Beziehung

$$v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_D v d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \iint_D \Delta v \log \frac{1}{z} dxdy,$$

welche für Funktionen gültig ist, die in $\bar{D}$ glatt sind. Da F in H_o^1 liegt und in $\bar{D}$ analytisch ist, erhalten wir

$$\int w_o F d\vartheta = \iint_D \Delta (w_o F) \log \frac{1}{|z|} dxdy.$$

Die rechte Seite wird weiter umgeformt

$$\Delta(w_o F) = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(w_o F) = 4\frac{\partial}{\partial z}(uF) = 4F'u + 4F\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Setzt man diese Beziehungen ein, so ergibt sich

$$S = \{\iint_O F'u \log\frac{1}{|z|}\,dxdy + \iint F\frac{\partial u}{\partial z}\log\frac{1}{|z|}\,dxdy \mid F \in H_o^1,\ \|F\|_1 < 1 \text{ analytisch in } \bar{D}\} \quad (xx)$$

Um sich vor Augen zu führen, was eigentlich zu tun ist, beachte man, daß $u = h_j \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}}$. Setzt man $\varphi = (\sum_{k-1}^{n} |f_k|^2)^{-1}$ so haben wir

$$u = \varphi^2\,\bar{f}_j\,\bar{f}_k\,f'_m\,\bar{f}_m - \varphi^3\,\bar{f}_j\,\bar{f}_k\,\Sigma f_m\,\bar{f}'_m$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2\varphi^3\,\bar{f}_k f'_k\,\Sigma f'_m \bar{f}_m - \varphi^3\,\bar{f}_j \bar{f}_k\,\Sigma |f'_m|^2 + 3\varphi^4\,f_j f_k\,\Sigma |f_m f'_m|^2$$

Um den ersten Integralausdruck in (xx) so abschätzen zu können, daß die Majorante nur von δ und n abhängt, genügt es, für alle $F \in H_o^1$ mit $\|F\|_1 < 1$ und alle $f \in H^\infty$ mit $\|f\|_\infty < 1$ den Ausdruck

$$\iint_D F'f' \log\frac{1}{|z|}\,dxdy$$

unabhängig von F und f abzuschätzen.

Für den zweiten Integralausdruck in (xx) ist für alle $F \in H_o^1$ mit $\|F\|_1 < 1$ und alle g,f aus H^∞, mit $\|g\|_\infty < 1$ und $\|f\|_\infty < 1$, der Ausdruck

$$\iint F\,g'f' \log\frac{1}{|z|}\,dxdy$$

unabhängig von F,f und g abzuschätzen. Weiters sei bemerkt, daß aufgrund der obigen Überlegungen, die Abschätzungen nur für den Fall benötigt werden, in dem sowohl $F \in H_o^1$, als auch f,g,H^∞ in $\bar{D}$ analytisch sind.

Die zentrale Ungleichung leitet sich aus der Greenschen Beziehung

$$v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_D v\,d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \iint_D \Delta v \log \frac{1}{|z|}\, dxdy$$

ab. Setzen wir für $v = |g|^2$, wobei g analytisch ist, so gilt $\Delta v = 4|g'|^2$.

Das führt zu folgender Ungleichung

$$\frac{2}{\pi} \int |g'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dxdy \leq \|g\|_2^2 \qquad g \in H^2.$$

Teil 5:

Die technischen Lemmata.

Lemma 1:

Sei f_1, f_2 aus H^∞, und seien g_1, g_2 aus H^2. Dann gilt

$$\iint |g_1 g_2\ f_1' f_2'| \log \frac{1}{|z|}\, dxdy \leq \pi 2 \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty .$$

Beweis:

$$gf' = (gf)' - g'f, \text{ damit } |gf'|^2 \leq 2(|(gf)'|^2 + |g'f|^2)$$

Somit gilt mit

$$\iint |(gf)'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dxdy \leq \|gf\|_2 \leq \|g\|_2 \|f\|_\infty, \pi$$

und

$$2\|f\|_\infty \iint |g'|^2 \log \frac{1}{|z|} \leq \|g\|_2 \|f\|_\infty, \pi .$$

Kombiniert man diese Ergebnisse, so folgt unter Beachtung der Cauchy Ungleichung das Ergebnis.

Lemma 2:

Sei $F \in H^1$, und seien f_1, f_2 aus H^∞. Dann gilt

$$\iint_D |F\ f_1' f_2'| \log \frac{1}{|z|}\, dxdy \leq 2\ \|F\|_1 \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty .$$

Beweis:
Zu $F \in H^1$ existieren $g_1, g_2 \in H^2$, sodaß $F = g_1 g_2$.
Nun aber wende man das Lemma 1 an.

Bemerkung:
Da ist bereits die Ungleichung, die wir benötigen um den zweiten Integralausdruck in (xx) so abzuschätzen, daß er nur von n und δ abhängt.

Lemma 3:
Sei $f \in H^\infty$, seien $g_1, g_2 \in H^2$. Dann gilt

$$\iint_D |g_1 g_2' f'| \log \frac{1}{|z|}\, dxdy \leq \pi \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \|f\|_\infty .$$

Beweis:
Mit der Cauchy Ungleichung schätzen wir das obige Integral durch das Produkt

$$\left[\iint |g_2'|^2 \log \frac{1}{|z|} dxdy\right]^{1/2} \cdot \left[\iint |g_1 f'|^2 \log \frac{1}{|z|} dxdy\right]^{1/2}$$

ab.
Jedes der hier auftretenden Integrale wurde bereits geeignet abgeschätzt.

Lemma 4:
Sei $F \in H^1$ und sei $f \in H^\infty$. Dann gilt:

$$\int |F'f'| \log \frac{1}{|z|}\, dxdy \leq \|F\|_1 \|f\|_\infty .$$

Beweis:
Wir nehmen an, daß F in D keine Nullstellen besitzt. Dann existieren g_1, g_2 in H^2, die in $\bar{D}$ analytisch sind, und $\|g_1\|_2 = \|g_2\|_2 = \|F\|_1$ erfüllen. Mit $F' = g_1' g_2 + g_1 g_2'$ und Lemma 3, folgt die Behauptung.

Bemerkung:

Lemma 4 stellt jene Ungleichung dar, die benötigt wird, um den ersten Integralausdruck in (xx) unabhängig von n und δ abschätzen zu können.

Das Korona Theorem ist somit vollständig bewiesen.

IV. SPEKTRALTHEORIE

Ausgangspunkte der klassischen Spektraltheorie ist ein selbstadjungierter, stetiger Operator T auf einem Hilbertraum. Auf dem (reellen und kompakten) Spektrum $\sigma(T) =: S$ definiert man ein Spektralmaß $E : \sigma(T) \to L(H)$, sodaß:

(1) E_λ ist eine Projektion

(2) $\lambda \leq \mu \to E_\lambda \leq E_\mu$

(3) E_λ kommutiert mit T

(4) $\lim\limits_{\lambda \to \mu^+} E_\lambda = E_\mu$.

Mit Hilfe des Spektralmaßes konstruiert man ein Stieltjes Integral, sodaß

$$(Tx,y) = \int_{\sigma(T)} \lambda \, d(E_\lambda x,y)$$

oder kürzer

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, d\, E_\lambda .$$

Damit erhält man eine Abbildung

$$\varphi : C(S) \to L(H)$$
$$x \to \int_{\sigma(T)} x(\lambda) dE_\lambda$$

Wir beschreiten nun den umgekehrten Weg. Im Lichte der Betrachtungen in II.3.10. werden wir zu jedem selbstadjungierten Operator T zuerst eine Abbildung $\varphi : C(S) \to L(H)$ definieren. Für diese existiert dann eine Integraldarstellung, und somit kann T durch ein Integral dargestellt werden.

Satz 1:
Sei T ein selbstadjungierter stetiger Operator auf einem Hilbertraum H mit Spektrum $S := \sigma(T)$.

Dann existiert ein Radonmaß (bezüglich der starken Topologie auf $L(H)$) $\mu : \mathcal{B}(S) \to L(H)$, sodaß

$$T = \int_S id \, d\mu \quad .$$

<u>Beweis:</u>

Zuerst sei festgestellt, daß $B_{L(H)}$ $\sigma(H,H')$ kompakt ist.
Wir definieren nun eine lineare Abbildung $u : C(S) \to L(H)$ wie folgt

$$u(\Sigma\, a_i x^i) := \Sigma a_i T^i .$$

Wir zeigen nun, daß die so definierte Abbildung auf den Polynomen stetig ist. A sei die von T erzeugte kommutative *Teilalgebra von $L(H)$. $M(A)$ sei das Spektrum von A, welches mit S übereinstimmt. p sei ein Polynom auf S. Dann gilt:

$$\|u(p)\|_\infty = \|u(p)\|_\rho = \sup_{f \in M(A)} |f(u(p))| = \sup_{f \in M(A)} |\Sigma a_i\, f(T)^i| =$$

$$= \sup_{\lambda \in S} |\Sigma a_i\, \lambda^i| = \|p\|_\infty .$$

Wir können also u stetig auf $C(S)$ fortsetzen, und erhalten mit Satz II.3.10.2.3.

$$T = u(Id) = \int_{\sigma(T)} Id \, d\mu = \int_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda \, d\mu(\lambda)$$

Da u multiplikativ ist, und die Involution respektiert, ist μ <u>projektionswertig</u>. Wir haben somit einen alternativen Beweis für den Spektralsatz geliefert.

Um für <u>unbeschränkte selbstadjungierte</u> Operatoren A auf $L(H)$ ein Funktionakalkül zu erhalten, werden wir auf den verallgemeinerten Rieszschen Darstellungssatz zurückgreifen.

A sei im folgenden ein selbstadjungierter abgeschlossener Operator auf H.
Wir definieren in H die Teilräume

$$H_n := \{x \in D(A) \mid \|A(x)\| \leq n\|x\|\} .$$

Weiters setzen wir $F(A,\lambda) := \{x \in D(A) \mid \|A(x)\| \leq \lambda \|x\|\}$.

Um zu A einen passenden Funktionalkalkül konstruieren zu können, muß man wissen, daß $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ in H dicht liegt. Darin besteht die Hauptschwierigkeit des folgenden Beweises des Spektralsatzes für unbeschränkte Operatoren.

Lemma 2:

H_k ist für alle $k \in \mathbb{N}$ abgeschlossen.

Beweis:

Sei $\{x_n\} \subseteq H_k$ eine gegen x konvergente Folge, dann gilt:

$$\|A(x_n - x_m)\| \leq k\|x_n - x_m\|$$

Also ist $x_n - x_m$ in H_k, und Ax_n konvergiert gegen ein y in H. A ist aber abgeschlossen, und daher ist y in $D(A)$ und $Ax = y$. Somit

$$Ax = \lim Ax_n \leq \lim k\|x_n\| = k\|x\|.$$

Also folgt mit $x_n \to x$: $x \in H_k$.

Fundamentallemma 3:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \text{ liegt in } H \text{ dicht.}$$

Beweis:

Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann ist $R(A,\lambda) := (A-\lambda id)^{-1}$ beschränkt und selbstadjungiert.

Weiters gilt

$$B := \frac{R(A,\lambda) - R(A,\bar{\lambda})}{\lambda - \bar{\lambda}} = R(A,\lambda)\, R(A,\bar{\lambda})$$

Zu $\varepsilon > 0$ betrachte

$$B_\varepsilon : F(B,\varepsilon)^\perp \to F(B,\varepsilon)^\perp$$
$$x \to Bx$$

Dann gilt $\quad \|B_\varepsilon x\| \geq \varepsilon \|x\|, \; x \in F(B,\varepsilon)^\perp$.

Nun folgt: B_ε ist injektiv

$\mathrm{Im}\,(B_\varepsilon)$ ist abgeschlossen

$\mathrm{Im}\,(B_\varepsilon^*) = \mathrm{Ker}\,(B_\varepsilon)^\perp = F(B,\varepsilon)^\perp$

Somit ist B_ε bijektiv.

Zu $x \in F(B,\varepsilon)^\perp$ existiert somit ein $x' \in F(B,\varepsilon)^\perp$ sodaß $x = B_\varepsilon x' = Bx' = R(A,\lambda)R(A,\bar{\lambda})x' \in D(A)$.

Also haben wir:

$$(A - \bar{\lambda}\mathrm{id})x = R(A,\lambda)x'$$
$$Ax = \bar{\lambda}x - R(A,\lambda)x'.$$

Somit

$$\|Ax\| \leq \|x\|\,|\lambda| + \|R(A,\lambda)\|\,\|x'\| \leq |\lambda|\,\|x\| + \|R(A,\lambda)\|\,\frac{\|B_\varepsilon x'\|}{\varepsilon}$$
$$\leq \|x\|\,|\lambda| + \frac{\|R(A,\lambda)\|}{\varepsilon}\,\|x\|.$$

Zusammenfassend gilt also:

$x \in F(B,\varepsilon)^\perp$ impliziert $x \in F(A,\lambda + \frac{\|R(A,\lambda)\|}{\varepsilon})$.

Sei nun $n > |\lambda|$, und setzen wir $\frac{\|R(A),\lambda)\|}{n-\lambda} =: \varepsilon_n$

so gilt:

$$F(B,\varepsilon_n)^\perp \subseteq F(A,n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\bigcap_{n>|\lambda|} F(B,\varepsilon_n) \supseteq \bigcap_{n \geq |\lambda|} F(A,n)^\perp$$

mit $n \to \infty$ gilt $\varepsilon_n \to 0$. Also ist $\bigcap F(B,\varepsilon_n) = 0$.

Daraus folgt aber

$$\bigcup F(A,n) = \bigcup H_n \text{ ist dicht in } H.$$

Lemma 4:

Sei $H_o \subseteq H$ dicht in H. Dann stimmen auf $B_{L(H)}$ die Topologie der punktweisen Konvergenz auf H_o, und die Topologie der punktweisen Konvergenz auf H überein.

Lemma 5:

Sei $B \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung

$$H = H_\varepsilon \oplus H_\varepsilon^\perp$$

wobei $\|B/_{H_\varepsilon}\| = \varepsilon$ und $|(Bx,x)| > \varepsilon\|x\|$ auf $H_\varepsilon^\perp$.

Jetzt können wir den Darstellungssatz für unbeschränkte Operatoren beweisen.

Sei T ein selbstadjungierter p.l.o. auf H.
Um die Abbildung $\varphi : C^b(\mathbb{R}) \to L(H)$ zu konstruieren, definieren wir sie zuerst auf eine Teilalgebra.

Der Ausdruck $T(I + T^2)^{-1}$ ist beschränkt, und daher können wir mit Satz 1 die Abbildung

$$x \to x(T) \quad \text{mit} \quad x(t) = t(1+t^2)^{-1}$$

definieren.

Sei A die von x erzeugte Algebra. Mit dem Satz von Stone Weierstraß ist A in $C^b(\mathbb{R})$ β-dicht. Falls nun $\varphi : A \to L(H)$ β-β_W-stetig ist, existiert eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} : A \to L(H)$$

und damit existiert nach dem Darstellungssatz ein Radonmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$, sodaß

$$\varphi(x) = \int x d\mu \quad \text{für jedes } x \text{ aus } C^b(R).$$

Daraus folgt der Spektralsatz wie im beschränkten Fall. Die oben bewiesenen Lemmata werden nun eingesetzt, um zu beweisen, daß die Abbildung

$$\varphi : A \to L(H)$$

tatsächlich β-stetig ist.

<u>Satz 6:</u>
Die Abbildung $\varphi : A \to L(H)$
$z \to z(T)$ ist β-β_w-stetig.

<u>Beweis:</u>
Sei $B = T(I+T^2)^{-1}$. Zu n aus $\mathbb{N}$ existiert H_n sodaß

1. $\|B_{/H_n}\| \geq n^{-1}$
2. $H_n \oplus H_n^{\perp} = H$.

Die Räume H_n bilden eine mit n aufsteigende Folge. Mit dem Fundamentallemma gilt

$$\overline{\cup H_n} = H$$

denn aus $\|B_{/H_n}\| \geq n^{-1}$ folgt $T_{/H_n} \geq n$.

Betrachtet man nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(A,\beta) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_n"] & S\text{-}\lim\{L(H_n)\} \cong (L(\overline{\cup H_n}), \|\ \|, \sigma) = (L(H), \|\ \|, \sigma) \arrow[d, "p_n"] \\
C([-n,n]) \arrow[r, "\varphi_n"] & L(H_n)
\end{tikzcd}$$

So sieht man, daß φ stetig ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Buchwalter, D. Bucchioni: Integuation vectorielle et theoreme de Radon-Nikodym (Lyons 1975, Vorlesungsmanuskript).

[2] Buck, R.C.: Bounded continuous functions on a locally compact space, Mich. Math. J.5 (1958) 96-104.

[3] Buck, R.C.: Algebraic properties of classes of analytic functions, Seminars on analytic functions II 175-188 (Princeton, 1957).

[4] Cooper, J.B.: Saks spaces and applications to functional analysis (North Holland, 1978).

[5] Cooper, J.B., Schachermayer, W.: Saks spaces and vector-valued measures, Springer Lecture Notes in Mathematics 719 (1979) 44-54.

[6] Cnop, I., Delbean, F.: A Dunford Pettis Theorem for L^1/H_o^1. J. Functional Anal, 24 (1977), 364-378.

[7] Gamelin, T.W.: Uniform Algebras, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. Y., (1969)

[8] Hoffman, K.: Wolff's proof of the Corona-Problem, Israel J. of Math. 37 (1980) 113-119.

[9] Hoffman, K.: Banach spaces of Analytic Functions, Prentice Hall Series, Englewood Cliffs, N.Y. (1962).

[10] Leinfelder, H.: A geometric proof of the Spektral Theorem for unbounded self adjoint operators, Math. Ann. 242, (1979) 85-95.

[11] Zelazko, W.: Banach Algebras, (Warschau, 1970).