Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
7. Übungsblatt für den 27.11.2020

30. Es sei f die durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

gegebene Permutation. Sei weiters

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

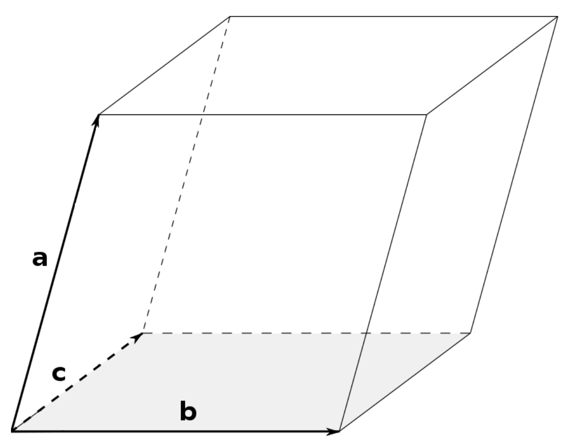
Geben Sie folgende Permutationen in Zyklenschreibweise an:

(a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $f \circ f \circ f \circ f$.

Bestimmen Sie die Signatur für jedes Resultat: einmal mit Satz 8.18 (siehe Skriptum) und einmal direkt über die Definition der Fehlstellen (Definition 8.12).

31. Die Figur zeigt die Skizze eines Parallelepipeds in $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$



(a) Geben Sie den Ausdruck $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ mit den obigen Koordinaten an!

(b) Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Parallelepipeds $|\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle|$ ist.

(c) Vergleichen Sie die obigen Resultaten mit der Determinante $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

32. Die folgende 6×6 Tabelle enthält die Resultate der Verknüpfungen in S_3. Ergänzen Sie die Tabelle mit den restlichen Elementen.

$\circ$	id	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
id						
(1 2)			(1 2 3)			
(2 3)						
$\vdots$						

Ist die Verknüpfungsoperation in S_3 kommutativ? Wie kann diese Eigenschaft in der Tabelle abgelesen werden?

33. Sei

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zerlegen Sie f in ein Produkt von Transpositionen gemäß dem Beweis von Satz 8.18 und ermitteln Sie daraus $\operatorname{sgn}(f)$.

34. (Bonus.) Das 8-Puzzle besteht aus 8 Kacheln, von 1 bis 8 durchnummeriert, die auf den 9 Feldern eines Drei-mal-Drei-Quadrats angebracht sind. Ein Feld bleibt frei. Eine (vertikal oder horizontal) benachbarte Kachel kann jeweils in das freie Feld hineingeschoben werden.

Die folgende Figur zeigt die Ausgangsstellung des Spiels:

1	2	3
4	5	6
7	8	

Zeigen Sie mithilfe von Permutationen und ihrer Signatur, dass die folgende Anordnung im Spiel nicht erreichbar ist:

4	2	3
1	5	6
7	8	

Hinweis: Sei das freie Feld mit 9 bezeichnet und sei $\mathrm{id} \in S_9$ die Ausgangsstellung. Betrachten Sie dann die Menge M aller Permutationen, wobei das leere Feld in seinem Ausgangseck liegt. Untersuchen Sie dann die Signatur für jedes Element von M mithilfe der Aufgabe 33.