Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
8. Übungsblatt für den 4.12.2020

35. Leiten Sie die Formel

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

aus Definition 8.22 im Vorlesungsskriptum ab.

36. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

(Das heißt A ist eine 3×3 *rechte obere* Dreiecksmatrix.)

(a) Berechnen Sie die Determinante von A mithilfe der Formel

$$\det(A) := \sum_{f \in S_3} \operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^{3} A(i, f(i)).$$

(b) Verallgemeinern Sie Ihre Antwort für eine $n \times n$ rechte obere Dreiecksmatrix ($n \in \mathbb{N}$).

(c) Welche Matrizen würden Sie *linke untere* Dreiecksmatrizen nennen? Verallgemeinern Sie Ihre obige Antwort für eine $n \times n$ linke untere Dreiecksmatrix ($n \in \mathbb{N}$).

37. Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Abbildung β wird mit

$$\beta : S_m \to S_m,\ \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

definiert.

(a) Geben Sie β im Fall $m = 3$ an. Ist β eine Bijektion?

(b) Nehmen wir an, dass $m \neq 3$ ist. Ist β eine Bijektion im Allgemeinen? Führen Sie einen Beweis durch oder widerlegen Sie die Aussage mit einem Gegenbeispiel.

38. Sei $D : (\mathbb{R}^3)^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$D(z_1, z_2, z_3) = \det\left(\begin{pmatrix} -- & z_1 & -- \\ -- & z_2 & -- \\ -- & z_3 & -- \end{pmatrix}\right).$$

Wir nehmen an, dass $z_2 = z_3$.

(a) Zeigen Sie analog des Beweises von Satz 8.25 im Vorlesungsskriptum, dass $D(z_1, z_2, z_3) = 0$. Das heißt, gehen Sie Schritt für Schritt vor und verwenden Sie $m = 3$.

(b) Bestimmen Sie die Abbildung

$$\alpha : A_3 \to S_3 \setminus A_3, \ \ f \mapsto f \circ (2\ 3).$$