Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
9. Übungsblatt für den 11.12.2020

39. (a) Zeigen Sie für $m \geq 2$, dass falls $f \neq \mathrm{id}_{\{1,\dots,m\}}$, dann existiert ein $j \in \{1, \dots, m\}$ sodass $f(j) < j$.

    (b) Folgern Sie daraus folgende Aussage:
    Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, so dass $A(i,j) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i > j$. (D. h. A ist eine obere Dreiecksmatrix.) Dann gilt Folgendes:
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{m} A(i,i).$$

40. Vergleichen Sie die Determinanten von den Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$
und
$$A' = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 100 \end{pmatrix},$$
nachdem die beiden Determinanten über Zurückführen auf eine Matrix in Zeilenstaffelform berechnet werden.

    (a) Welchen Zusammenhang können Sie hier vermuten? Finden Sie eine Beziehung zwischen $\det(\lambda \cdot B)$ und $\det(B)$ für $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei $m \in \mathbb{N}$ ist.

    (b) Beweisen Sie Ihre Vermutung im Allgemeinen (*Hinweis: Verwenden Sie die allgemeine Formel für die Determinante.*)

41. Sei
$$M = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$$
und betrachten wir folgende Umformungen: $\det(M) =$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 - x\cdot x \\ 0 & y-x & y^2-x^2-x\cdot(y-x) \\ 0 & z-x & z^2-x^2-x\cdot(z-x) \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y-x & y\cdot(y-x) \\ 0 & z-x & z\cdot(z-x) \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & x-1\cdot x & 0 \\ 0 & y-x-1\cdot 0 & y\cdot(y-x) \\ 0 & z-x-1\cdot 0 & z\cdot(z-x) \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y-x & y\cdot(y-x) \\ 0 & z-x & z\cdot(z-x) \end{pmatrix}\right) = (y-x)\cdot(z-x)\cdot\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}\right).$$

(a) Nennen Sie für jeden Umformungsschritt, welche Eigenschaft der Determinante ausgenutzt wird.

(b) Setzen Sie die obige Herleitung fort und zeigen Sie:

$$\det(M) = (y - x) \cdot (z - y) \cdot (z - x).$$

42. Zeigen oder widerlegen Sie:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann sind äquivalent:

(1) Die Zeilen von A sind Vielfache voneinander.

(2) $\det(A) = 0$.