Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
11. Übungsblatt für den 8.1.2021

47. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen und bestimmen Sie daraus die Determinanten ihrer inversen Matrizen, falls diese existieren.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

48. Verwenden Sie den Entwicklungssatz von Laplace um folgende Determinanten zu berechnen:

(a)

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

i. nach der 2. Spalte,

ii. nach der 4. Zeile,

(b)

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

nach der 3. Spalte.

49. Gegeben sind die Gleichungssysteme

(a)

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ - 2y + z = -2 \end{cases}$$

Geben Sie jeweils die Lösung von den beiden Systemen mithilfe der Cramer'schen Regel an.

50. (a) Gegeben sind die Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ und $P_3 = (x_3, y_3)$, wobei die x-Koordinaten paarweise verschieden sind. Beweisen Sie, dass es genau eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ gibt, so dass alle drei Punkte auf der Kurve der Funktion liegen. (Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dann lösen Sie es mithilfe der Cramer'schen Regel. Nutzen Sie auch die Aufgabe 41. (b). Die Werte a, b und c können beliebige reelle Zahlen sein, auch 0, also betrachten wir $f(x) = 0x^2 + 0x + 0$ als eine quadratische Funktion in dieser Aufgabe.)

(b) Stellen Sie eine Vermutung auf, welche die obige Aufgabe verallgemeinert.