Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
12. Übungsblatt für den 15.1.2021

51. Zeigen Sie analog zur Vorlesung bzw. zum Beweis von Satz 9.4 im Vorlesungsskriptum auf Seite 208, dass der Koeffizient von x^k auch im Polynom $p \cdot (q \cdot r)$ gleich
$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} p_l q_m r_j \, \delta(l+m+j,k)$$
ist.

52. Sei K ein Körper.
    (a) Finden Sie das neutrale Element n bezüglich $+$ in $K[x]$.
    (b) Geben Sie das additive Inverse von $p = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i, 0, \ldots)$ an.
    (c) Zeigen Sie, dass aus
    $$p \cdot q = n$$
    $p = n$ oder $q = n$ folgt, also ist $K[x]$ nullteilerfrei.

53. (a) Sei K ein Körper, und seien p und q beliebige Polynome über K, wobei $p \neq n$ und $q \neq n$ (n wie in der Aufgabe 52). Zeigen Sie, dass
    $$\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q).$$
    (b) Sei $e = (1, 0, 0, 0, \ldots)$. Bekannt ist es, dass e das neutrale Element bzgl. Multiplikation von Polynomen ist. Zeigen Sie, dass die einzig invertierbaren Elemente bzgl. Multiplikation die Polynome p vom Grad 1 ($p \neq n$) in $\mathbb{R}[x]$ sind.

54. (a) Berechnen Sie
    i.
    $$6x^5 - x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x - 1 : 3x^2 - x + 1,$$
    ii.
    $$x^8 - 2 : x^2 - 1$$
    mithilfe von Polynomdivision. Überprüfen Sie Ihre Berechnungen mit dem CAS-Befehl `Division` in GeoGebra!
    (b) Sei $p = x^2 + 3x - 10$. Finden Sie ein lineares Polynom ℓ, sodass p dividiert durch ℓ Rest Null ergibt. Ist dieses ℓ eindeutig?