Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
4. Übungsblatt für den 6.11.2020

17. Die Ebene ε hat die Basen
$$A = ((1,0,2)^T, (2,0,1)^T),\ B = ((1,0,3)^T, (3,0,1)^T).$$
    (a) Begründen Sie, dass A und B Basen desselben Unterraums sind.
    (b) Der Vektor v ist gegeben durch $(v)_A = (-2,3)^T$. Berechnen Sie das Koordinatentupel von v bzgl. der Basis B.
    (c) Bestimmen Sie die Matrix ${}_BT_A$, sodass für alle $v \in \varepsilon$ gilt:
$$(v)_B = {}_BT_A(v)_A.$$
    Überprüfen Sie Ihre Antwort mit einer Probe! Veranschaulichen Sie Ihre Berechnungen mit GeoGebra!

18. Gegeben sind die linearen Abbildungen
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b,c) \mapsto (2a-b, b+4c)$$
und
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b) \mapsto (a-3b, b).$$
    (a) Bestimmen Sie $S_g(E_3, E_2)$ und $S_h(E_2, E_2)$.
    (b) Berechnen Sie $h(g(\vec{x}))$ und die dazugehörige Abbildungsmatrix $S_{h\circ g}$. (Hier bezeichnet $\vec{x}$ einen Vektor aus $\mathbb{R}^3$.)
    (c) Drücken Sie $S_{h\circ g}$ mit Hilfe von den Matrizen $S_g(E_3, E_2)$ und $S_h(E_2, E_2)$ aus.

19. (a) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt im Raum an der Ebene $2x-3y+z=0$ spiegelt. Bestimmen sie eine Basis B des $\mathbb{R}^3$, sodass für die Abbildungsmatrix $S_\sigma(B,B)$ der Spiegelung σ bezüglich der Basis B folgende Gleichung gilt:
$$S_\sigma(B,B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
    (b) Wir bezeichnen mit δ jene Drehung, die jeden Punkt im Raum um die x-Achse um 90° dreht. (Der Drehsinn ist gegeben wie folgt: Wenn man von $(1,0,0)^T$ auf die y,z Ebene schaut, dann wird gegen den Uhrzeigersinn gedreht.) Bestimmen sie eine Basis C des $\mathbb{R}^3$, sodass für die Abbildungsmatrix $S_\delta(C,C)$ der Drehung δ bezüglich der Basis C folgende Gleichung gilt:
$$S_\delta(C,C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Wir betrachten die Gerade

$$g : (0,0,0)^T + \lambda \cdot (1,1,2)^T$$

und eine Spiegelung σ daran. Bestimmen sie eine Basis B, sodass die Abbildungsmatrix $S_\sigma(B,B)$ der Spiegelung σ bezüglich der Basis B möglichst einfach ist.