

Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)

ASB3MA2AGU

5. Übungsblatt für den 13.11.2020

21. Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt der Ebene \mathbb{R}^2 an der Geraden $-2x + 3y = 0$ spiegelt.

(a) Bestimmen sie eine Basis B des \mathbb{R}^2 , sodass für die Abbildungsmatrix $S_\sigma(B, B)$ der Spiegelung σ bezüglich der Basis B folgende Gleichung gilt:

$$S_\sigma(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E, E)$ der Spiegelung σ bezüglich der kanonischen Basis E .

(c) Wo landet der Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ nach dieser Spiegelung σ ?

22. Sei σ die lineare Abbildung, die jeden Punkt im Raum \mathbb{R}^3 an der Ebene $e : 3x - 2y - z = 0$ spiegelt.

(a) Finden Sie eine Basis B , bezüglich der die Spiegelung σ die Abbildungsmatrix

$$S_\sigma(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat.

(b) Berechnen Sie $S_\sigma(E, E)$ der Spiegelung σ bezüglich der kanonischen Basis E .

(c) Wo landet der Punkt (a, b, c) nach dieser Spiegelung σ ?

(d) Welche Abbildung h hat als Abbildungsmatrix $S_h(B, B)$, wobei die Gleichheit

$$S_h(B, B) = -S_\sigma(B, B)$$

gilt? Beschreiben Sie diese Abbildung geometrisch.

23. Bestimmen Sie jeweils die Abbildungsmatrix $S_\delta(E, E)$ zu der Abbildung $\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(a) Es wird um die z -Achse um 30° gedreht, wobei der Drehsinn wie folgt gegeben ist. Wenn man von $(0, 0, 1)^T$ auf die x, y Ebene schaut, dann wird gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

(b) Es wird um die Gerade $(0, 0, 0)^T + L(1, 2, 3)^T$ um 45° gedreht, wobei der Drehsinn wie folgt gegeben ist. Wenn man von $(1, 2, 3)^T$ auf den Ursprung schaut, dann wird gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

24. Sei $D : (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Funktion:

$$D \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = ad - bc.$$

Zeigen Sie, dass D die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt. (Siehe Vorlesung, Beispiel 8.2.)