Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
6. Übungsblatt für den 20.11.2020

25. Wir erinnern uns an die Orthogonalprojektion $P_T(v)$ aus dem letzten Semester. Sei $v \in \mathbb{R}^3$ und $P_T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung welche v auf $P_T(v)$ abbildet. Wobei $T = L((1,2,0)^T, (2,-1,3)^T)$.

    (a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $S_{P_T}(E,E)$ mithilfe der Formel aus dem letzten Semester.

    (b) Bestimmen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^3$, sodass $S_{P_T}(B,B)$ einfach zu bestimmen ist, nämlich

    $$S_{P_T}(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

    und dann $S_{P_T}(E,E)$ über die Formel

    $$S_{P_T}(E,E) = {}_E T_B S_{P_T}(B,B) {}_B T_E.$$

    (ACHTUNG: *Beachten Sie die unterschiedliche Bedeutung von B in der Formel für $P_T(v)$ aus dem letzten Semester und in der obrigen Formel.*)

26. Seien f und g von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ Spiegelungen: f spiegelt an die x-Achse, g spiegelt an die 1. Mediane.

    (a) Finden Sie die Abbildungsmatrizen S_f bzw. S_g (bzgl. $E \to E$), deren Produkt $S_g \cdot S_f$, und bestimmen Sie die Hintereinanderausführung von den Abbildungen geometrisch.

    (b) Berechnen Sie $(S_g \cdot S_f) \cdot (S_g \cdot S_f) \cdot (S_g \cdot S_f) \cdot (S_g \cdot S_f)$ (also $(S_g \cdot S_f)^4$). Erklären Sie das Ergebnis geometrisch.

27. Eine Funktion $D : (\mathbb{R}^3)^3 \to \mathbb{R}$ ist gesucht, die die drei Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt.

    Klar ist es, dass

    $$D\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}\right) = D\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}\right) +$$
    $$D\left(\begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}\right) + D\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}\right),$$

    wegen der Eigenschaft (D1).

    Setzen Sie diese Herleitung weiter fort, so dass eine explizite Formel ohne $D(\cdots)$ herauskommt.

28. Bekannt – siehe Vorlesung bzw. Aufgabe 27. – sind folgende Eigenschaften der Determinante von Matrizen:

   (a) Wenn wir ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile hinzu addieren, bleibt die Determinante unverändert. (Folgt aus (D1), (D2), (D3).)

   (b) Beim Vertauschen zweier Zeilen, ändert sich das Vorzeichen der Determinante. (Folgt aus (D1), (D2), (D3).)

   (c) Wenn wir eine Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplizieren, so multipliziert sich auch die Determinante mit dem selben λ (siehe (D1)).

   Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen mithilfe der obigen drei Eigenschaften:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

   (d) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (e) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

   (f) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

29. Es sei p die durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 8 & 6 & 5 & 9 & 7 & 1 & 10 & 2 & 3 & 13 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

   gegebene Permutation. Bestimmen Sie eine Zerlegung von p in Zyklen.