Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
0. Übungsblatt für den 2.10.2020

1. Gegeben seien folgende Ebenen im $\mathbb{R}^3$:

$$\varepsilon_1 : x - 3y + z = 2,\ \varepsilon_2 : \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

   (a) Finden Sie eine Darstellung von ε_1 in Parameterdarstellung und von ε_2 in impliziter Form.

   (b) Finden Sie ein lineares Gleichunssystem in Matrixschreibweise, dessen Lösungsmenge $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ ist.

   (c) Geben Sie die Menge $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ explizit an.

2. Geben Sie eine Orthonormalbasis der Ebene $e : x+2y-3z = 0$ an. Erweitern Sie diese ONB um einen dritten Vektor, um eine ONB des Raumes $\mathbb{R}^3$ zu erhalten. Überprüfen Sie Ihre Antwort mithilfe von GeoGebra.

3. Sei $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, und sei E die lineare Hülle von B. B ist dann eine Basis von E.

   (a) Welcher Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(w)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$?

   (b) Wie lauten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -13 \end{pmatrix}$ bezüglich B?

   (c) Geben Sie eine Basis C von E an, bezüglich der der Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -9 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat!

4. Wir erinnern uns an die Orthogonalprojektion $P_T(v)$ aus dem letzten Semester. Sei $v \in \mathbb{R}^3$ und $P_T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung, welche v auf $P_T(v)$ abbildet. Wobei $T = L((1,0,-1)^T, (1,0,1)^T)$.

   (a) Finden Sie eine Matrix A, sodass $P_T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beschrieben wird durch,

$$v \mapsto A \cdot v.$$

Diese Matrix nennen wir Abbildungsmatrix von P_T und kürzen sie mit $S_{P_T}(E, E)$ ab. (Hinweis: Formel aus dem letzten Semester.)
Überprüfen Sie Ihre Antwort mithilfe einer grafischen Veranschaulichung in GeoGebra.

(b) Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und Wertemenge W von P_T. Gibt es eine Umkehrfunktion von P_T bzw. ist $P_T : D \to W$ eine bijektive Abbildung?

(c) Bestimmen Sie den Nullraum der Matrix aus (a) und interpretieren Sie diesen geometrisch.

(d) Geben Sie $P_T \circ P_T$ und $P_T \circ P_T \circ P_T$ an, das heißt finden Sie die Abbildungsmatrix der Hintereinanderausführung "$\circ$" der Funktion P_T mit sich selbst etc.
Wie passt Ihr Ergebnis zu der graphischen Veranschaulichung?