Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
13. Übungsblatt für den 22.1.2021

55. Betrachten wir folgende Spezialform des Fundamentalsatzes der Algebra:

 Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ monisch mit $\deg(f) = n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen ist. Dann hat $f^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau n Nullstellen, bzw. $f^{\mathbb{C}}(y)$ faktorisiert in n Linearfaktoren:

$$f^{\mathbb{C}}(y) = \prod_{i=1}^{n} (y - \alpha_i)$$

 mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

 Beweisen Sie diese Aussage für $n = 1, 2, 3$. Hinweis:

 - Für $n = 2$: Nutzen Sie die *abc*-Formel und (beim Wurzelziehen) die Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl.
 - Für $n = 3$: Zeigen Sie, dass $f^{\mathbb{C}}$ mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Nutzen Sie dazu den Grenzwert (wenn $y \to -\infty$ bzw. $y \to +\infty$) und die Stetigkeit einer Polynomfunktion, und dann den Zwischenwertsatz (aus der Analysis). Wenden Sie schließlich die Aussage für $n = 2$ an.

56. Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

 zu

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

 ähnlich sind: Geben Sie jeweils eine Matrix P_i $(i = 1, 2)$ an, sodass die Gleichung $P_i^{-1} A P_i = D$ gilt. Hinweis: Stellen Sie jeweils ein lineares Gleichungssystem auf.

 (a) Ist P_i $(i = 1, 2)$ eindeutig bestimmt?

 (b) Ist D die einzige Diagonalmatrix, welche zu A_i $(i = 1, 2)$ ähnlich ist?

 (c) Die eine von den Matrizen A_1 und A_2 entspricht einer Spiegelung. Welche? Geben Sie ihre Spiegelungsachse an.

57. Sei A die Abbildungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis der Abbildung, welche die Ebene an der 2. Mediane spiegelt, und B die Abbildungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis der Abbildung, welche die Ebene an $g : 2x - 3y = 0$ spiegelt. Begründen Sie: A ist ähnlich zu B.

58. Wie in der Aufgabe 22, sei σ die lineare Abbildung, die jeden Punkt im Raum $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $e : 3x - 2y - z = 0$ spiegelt.

    (a) Finden Sie jeweils eine Basis B_1, B_2, B_3, bezüglich der die Spiegelung σ die Abbildungsmatrix

    $$S_\sigma(B_1, B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_\sigma(B_2, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_\sigma(B_3, B_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    hat.

    (b) Bestimmen Sie $S_\sigma(E, E)$ mithilfe Ihrer obigen Berechnung.

    (c) Begründen Sie, warum $S_\sigma(E, E)$ zu den Matrizen $S_\sigma(B_1, B_1)$, $S_\sigma(B_2, B_2)$, $S_\sigma(B_3, B_3)$ ähnlich ist. Geben Sie jeweils eine Matrix P_i an, so dass

    $$S_\sigma(B_i, B_i) = P_i^{-1} \cdot S_\sigma(E, E) \cdot P_i$$

    gilt ($i = 1, 2, 3$).