Lineare Algebra II (Wintersemester 2020/2021)
ASB3MA2AGU
14. Übungsblatt für den 29.1.2021

59. Gegeben ist die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$
Diagonalisieren Sie A mithilfe ihrer Eigenvektoren.

60. Gegeben ist die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Diagonalisieren Sie A mithilfe ihrer Eigenvektoren. (Hinweis: Finden Sie die Eigenwerte der Matrix zuerst mithilfe der Lösung einer kubischen Gleichung.)

61. Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Zeigen Sie: $\det(B) = 0$ genau dann, wenn 0 ein Eigenwert zu B ist.
    (b) Sei $\det(B) \neq 0$. Zeigen Sie: die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann ein Eigenwert zu B ist, wenn $\dfrac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert zu B^{-1} ist.

62. Finden Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren folgender Matrizen:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Entscheiden Sie für die beiden Aufgaben, ob die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind oder nicht.