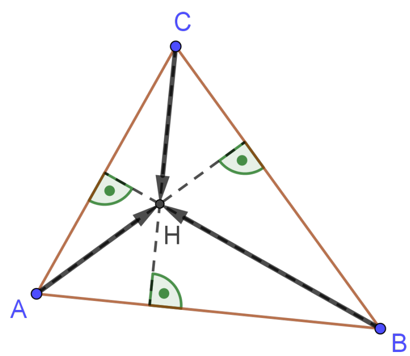
Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
10. Übungsblatt für den 5.6.2020 und 9.6.2020

73. Sei ABC ein Dreieck. Wir definieren die Vektoren $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} := \overrightarrow{AC}$. Seien weiters H_c der Mittelpunkt der Seite AB und H_a der Mittelpunkt der Seite BC. Schließlich sei S der Schnittpunkt der Strecken AH_a und CH_c.

    (a) Begründen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.

    (b) Bilden Sie den Vektor $\overrightarrow{AH_c} + \overrightarrow{H_cS} + \overrightarrow{SA} = 0$ und drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AH_c}$, $\overrightarrow{H_cS}$ und $\overrightarrow{SA}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus. Verwenden Sie für $\overrightarrow{SA} = \lambda * \overrightarrow{H_aA}$ und für $\overrightarrow{H_cS} = \mu * \overrightarrow{H_cC}$. Zeigen Sie, dass $\lambda = \frac{2}{3}$ und $\mu = \frac{1}{3}$ gilt.

74. Zeigen Sie, dass sich die (Trägergeraden der) Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.



    Sei H der Schnittpunkt der Höhen durch A bzw. durch B. Dann gilt: $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ bzw. $\langle H-A, C-B\rangle = 0$ und $\langle H-B, C-A\rangle = 0$. Zu zeigen bleibt $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ bzw. $\langle H-C, B-A\rangle = 0$.

75. Sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass dann auch $B_1 = (v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

    Hinweis: Verwenden Sie den Austauschsatz von Steinitz.

76. Gegeben seien die Vektoren $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

    (a) $\{x\}^\perp$,

    (b) $\{x, y\}^\perp$,

    (c) $\{x, y, z\}^\perp$

    und jeweils die Dimension davon.

77. Seien A, B beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

    (a) $L(A) \subseteq A^{\perp\perp}$,

    (b) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.

78. Gegeben seien die Vektoren $b_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $b_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

    (a) Ist $B = (b_1, b_2)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$?

    (b) Geben Sie die Koordinaten von $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ bezüglich B an.

79. Gegeben seien die Vektoren $b_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $b_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

    (a) Zeigen Sie, dass $B = (b_1, b_2)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ ist.

    (b) Zeigen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt

    $$\langle u, v \rangle = \langle (u)_B, (v)_B \rangle .$$

    Hinweis: Stellen Sie u als $u = \lambda_1 * b_1 + \lambda_2 * b_2$ und v als $v = \mu_1 * b_1 + \mu_2 * b_2$ dar und verwenden Sie die Rechenregeln für das Skalarprodukt.

80. Gegeben seien die Vektoren $b_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $b_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ und $b_3 = (0, 0, 1)$.

    (a) Zeigen Sie, dass $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

    (b) Zeigen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt

    $$(u \times v)_B = (u)_B \times (v)_B.$$

    Hinweis: Berechnen Sie zuerst $b_1 \times b_2, b_2 \times b_3$ und $b_3 \times b_1$. Stellen Sie dann u als $u = \lambda_1 * b_1 + \lambda_2 * b_2 + \lambda_3 * b_3$ und v als $v = \mu_1 * b_1 + \mu_2 * b_2 + \mu_3 * b_3$ dar und verwenden Sie die Rechenregeln für das Kreuzprodukt.

Weitere Übungsaufgaben

LXXXII. Sei ABC ein Dreieck mit $A = \binom{-1}{3}$, $B = \binom{2}{-2}$, $C = \binom{-3}{-2}$.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten jeweils von seinem Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhenschnittpunkt H.

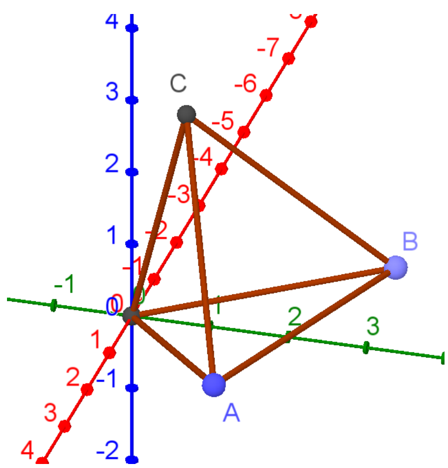
(b) Zeigen Sie rechnerisch, dass U, S und H auf einer Geraden liegen.

(c) Bestimmen Sie das Verhältnis $|US| : |SH|$.

LXXXIII. Zeigen Sie:

Schneiden drei Höhen eines Tetraeders (einer dreiseitigen Pyramide) einander in einem Punkt H, so geht auch die vierte Höhe durch diesen Punkt.

Hinweis: Betrachten Sie eine dreiseitige Pyramide $OABC$, von der ein Eckpunkt im Ursprung O liegt.



Die Höhen durch A, B, C mögen einander in einem Punkt H schneiden. Dann gilt:

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OA} \wedge \cdots$$

Was muss für $\overrightarrow{OH}$ gelten, wenn durch O und H die vierte Höhe läuft?

LXXXIV. Seien $n \in \mathbb{N}$, und B eine Folge linear unabhängiger Vektoren von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es stets einen Unterraum U gibt, sodass B eine Basis von U ist.

LXXXV. Sei A eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgende Aussage:

$$A^\perp = A^{\perp^{\perp^\perp}}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Aussagen aus der Aufgabe 77.)

LXXXVI. Sei A eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $L(A^\perp) = A^\perp$

(b) $L(A)^\perp = A^\perp$

LXXXVII. Welche der folgenden Basen sind Orthonormalbasen?

(a) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\right)$.

(b) $((0.28, 0.96), (-0.96, 0.28))$.

(c) $((-1, 0, 0), (0, -2, 0), (0, 0, -3))$.

(d) $((1, 0, 0), (0, -0.352, -0.936), (0, -0.936, 0.352))$.

LXXXVIII. Gegeben seien die Vektoren $b_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $b_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (b_1, b_2)$ keine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\langle u, v \rangle = \langle (u)_B, (v)_B \rangle .$$

LXXXIX. Gegeben seien die Vektoren $b_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $b_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ und $b_3 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (b_1, b_2, b_3)$ keine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(u \times v)_B = (u)_B \times (v)_B.$$