Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
11. Übungsblatt für den 12.6.2020 und 16.6.2020

81. Seien U, V beliebige Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Dann definieren wir:

$$U + V := \{u + v \mid u \in U \text{ und } v \in V\}.$$

Zeigen Sie folgende Aussage:

$$(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}.$$

82. Orthonormalisieren Sie die folgende Familie von Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt:

$$A = ((2,0,0),(4,2,6),(0,-3,0)).$$

83. Geben Sie eine Orthonormalbasis der Ebene $e : x + 2y - 3z = 0$ an.

84. Sei $B := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right)$, und sei E die lineare Hülle von B. B ist dann eine Basis von E. Außerdem bezeichnen wir mit $\bar{B}$ die Matrix $\bar{B} := \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\\2 & -3\end{pmatrix}$.

(a) Welches Gleichungssystem muss ein Vektor $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ erfüllen, der auf alle Vektoren in E normal steht? Wie hängt die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems mit $\bar{B}$ zusammen?

(b) Mit welchem Gleichungssystem können Sie feststellen, ob ein Vektor v in E liegt? Wie hängt die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems mit $\bar{B}$ zusammen?

(c) Sei $w := \begin{pmatrix}11\\8\\2\end{pmatrix}$. Finden Sie einen Vektor e, der in E liegt, sodass $w - e$ normal auf alle Vektoren in E steht.

85. Welchen Normalabstand hat die Gerade g von dem Punkt P, wenn

$$g = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix}1\\0.5\\1\end{pmatrix}\right), \quad P = \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}?$$

86. Bestimmen Sie den Normalabstand des Punktes P von der Geraden g:

$$g = L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad P = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

87. Projizieren Sie den Punkt P normal auf einen Punkt Q der Ebene e und bestimmen Sie den Normalabstand von P zu der Ebene e:

$$e = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right), \quad P = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Punkt Q mit Hilfe der Vektorrechnung analog zu Aufgabe 25 (Übungsblatt 4).

(b) Berechnen Sie den Punkt Q mit Hilfe einer Orthogonalprojektion.

88. Der Unterraum e hat die Basis $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Sei $\overline{B} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Der Vektor $v := \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegt in e.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis B durch Lösen eines Gleichungssystems.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis B mit Hilfe der Formel $(\overline{B}^T \cdot \overline{B})^{-1} \cdot \overline{B}^T \cdot v$.

(c) Führen Sie nun die Berechnungen in (a) und (b) auch für den Vektor $w := \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ durch und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Weitere Übungsaufgaben

XC. Seien U, V beliebige Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgende Aussage:

$$U^\perp + V^\perp \subseteq (U \cap V)^\perp.$$

XCI. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) für folgenden Unterraum des $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \wedge x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0\}$$

(Hinweis: Berechnen Sie zuerst eine Basis von V und orthonormalisieren Sie diese mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.)

XCII. Sei $B = (b_1, \dots, b_k)$ eine Orthonormalbasis eines Unterraumes V von $\mathbb{R}^n$. Für alle v und $w \in V$ gilt:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle v, b_i\rangle \langle b_i, w\rangle$$

Beweisen Sie zunächst den Satz für $k = 2$. Stellen Sie dazu v und w nach Satz 5.6 aus dem Vorlesungsskriptum mit Hilfe der Orthonormalbasis (b_1, b_2) dar und berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$ mit Hilfe der Eigenschaften des Skalarprodukts (Seite 103, Vorlesungsskriptum). Beweisen Sie anschließend den Satz für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$.

XCIII. Sei $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $B = (b_1, b_2)$. Die Ebene e sei durch $e = L(B)$ gegeben.

(a) Berechnen Sie, falls möglich, $(v)_B$ für $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie $B^\perp$ in parametrisierter Form an.

(c) Orthonormalisieren Sie B mit dem Verfahren von Gram-Schmidt! Stellen Sie jeden Schritt in GeoGebra grafisch dar.

XCIV. Projizieren Sie den Punkt P normal auf einen Punkt Q der Ebene e und bestimmen Sie den Normalabstand von P zu der Ebene e:

$$e = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Punkt Q mithilfe einer Orthogonalprojektion.

(b) Bestimmen Sie den Abstand PQ.

XCV. Orthonormalisieren Sie die folgenden Familien von Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt:

(a) $A = ((1, 2), (3, 4))$,

(b) $A = \big((1, \sqrt{3}), (2, \pi)\big)$.

XCVI. Wir betrachten die Menge F aller reellen Funktionen mit dem Definitionsbereich $[-1, 1]$:

$$F = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}.$$

Seien $b_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x$, $b_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} \cdot (3x^2 - 1)$ (für alle $x \in [-1, 1]$), alle davon Elemente aus F. Weiters definieren wir

$$S(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} f_1(x) \cdot f_2(x)\ dx$$

für alle $f_1, f_2 \in F$. (Beispielsweise ist

$$S(1, x) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\ dx = \int_{-1}^{1} x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.)$$

Zeigen Sie:

(a) $S(b_1, b_1) = 1$, $S(b_2, b_2) = 1$, $S(b_3, b_3) = 1$.

(b) $S(b_1, b_2) = 0$, $S(b_2, b_3) = 0$, $S(b_3, b_2) = 0$.

(c) b_1, b_2 und b_3 sind linear unabhängig, d.h., falls für alle $x \in [-1, 1]$

$$\lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x) + \lambda_3 b_3(x) = 0$$

gilt, gilt auch $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(d) b_1, b_2 und b_3 bilden keine Basis von F.

Finden Sie weiters eine Funktion $b_4 \in F$ mit allen folgender Eigenschaften:

- $S(b_4, b_4) = 1$,
- $S(b_1, b_4) = 0,\ S(b_2, b_4) = 0,\ S(b_3, b_4) = 0$.

XCVII. Wir betrachten die Menge F aller reellen Funktionen mit dem Definitionsbereich $[0, 2\pi]$:

$$F = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\}.$$

Seien $b_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b_2(x) = \sin(x)$, $b_3(x) = \cos(x)$ (für alle $x \in [0, 2\pi]$), alle davon Elemente aus F. Weiters definieren wir

$$S(f_1, f_2) = \frac{\int_0^{2\pi} f_1(x) \cdot f_2(x)\ dx}{\pi}$$

für alle $f_1, f_2 \in F$. Zeigen Sie:

(a) $S(b_1, b_1) = 1,\ S(b_2, b_2) = 1,\ S(b_3, b_3) = 1$.

(b) $S(b_1, b_2) = 0,\ S(b_2, b_3) = 0,\ S(b_3, b_2) = 0$.

(c) b_1, b_2 und b_3 sind linear unabhängig, d.h., falls für alle $x \in [0, 2\pi]$

$$\lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x) + \lambda_3 b_3(x) = 0$$

gilt, gilt auch $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(d) b_1, b_2 und b_3 bilden keine Basis von F.

Finden Sie weiters eine Funktion $b_4 \in F$ mit allen folgender Eigenschaften:

- $S(b_4, b_4) = 1$,
- $S(b_1, b_4) = 0,\ S(b_2, b_4) = 0,\ S(b_3, b_4) = 0$.