Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
12. Übungsblatt für den 19.6.2020 und 23.6.2020

89. Bestimmen Sie einen Punkt P von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + L\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\right)$ und einen Punkt Q von $\begin{pmatrix} -24 \\ -52 \\ 15 \end{pmatrix} + L\left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right)$, sodass $\|P-Q\|$ minimal wird.

90. Welchen Abstand hat die Gerade g von dem Punkt P?

$$g := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + L\left(\left(\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)\right), \quad P := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}$$

91. Bestimmen Sie einen Punkt P von

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

und einen Punkt Q von

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + L\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right),$$

sodass $\|P-Q\|$ minimal wird.

92. Berechnen Sie die bestapproximierende Lösung folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

93. Bestimmen Sie jene Gerade der Form $y = kx + d$, die die Punkte $(0,3)$, $(1,4)$ und $(2,7)$ bestmöglich approximiert.

Berechnen Sie k und d mit Hilfe einer Orthogonalprojektion.

Hinweis: Der Abstand zwischen $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ist minimal, wenn $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix}$ die Projektion von $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ auf $L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ ist.

94. Sei $\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Seien $+$ die Matrizenaddition und $\cdot$ die Matrizenmultiplikation. Die einstellige Operation $- : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei definiert als

$$- \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}; +, -, \cdot, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ ein Körper ist.

Hinweis: Die Assoziativ- und Distributivgesetze müssen nicht mehr gezeigt werden.

95. Sei $R = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, -, \cdot, (0,0), (1,0))$, wobei die Operatoren $+, -$ und $\cdot$ folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d), \\ -(a,b) &:= (-a, -b), \\ (a,b) \cdot (c,d) &:= (ac + 2bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Ist R ein Körper? Bestimmen Sie eine Formel für $(a,b)^{-1}$.

96. Zeigen Sie: Ein Körper mit 4 Elementen hat die Charakteristik 2.

Weitere Übungsaufgaben

XCVIII. Wie weit ist die Ebene

$$\begin{pmatrix} -24 \\ -53 \\ 13 \end{pmatrix} + L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix})$$

vom Nullpunkt entfernt? Welcher Vektor dieser Ebene hat die kleinste Länge?

XCIX. Welcher Punkt der Ebene

$$\begin{pmatrix} -24 \\ -53 \\ 13 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

liegt am nächsten beim Punkt $(-47, -95, 34)$?

C. Bestimmen Sie jene Gerade der Form $y = kx + d$, die die Punkte $(0, 3)$, $(1, 4)$ und $(2, 7)$ bestmöglich approximiert.

"Bestmöglich" heißt dabei, dass k und d so zu bestimmen sind, dass

$$(y_1 - (k \cdot x_1 + d))^2 + (y_2 - (k \cdot x_2 + d))^2 + (y_3 - (k \cdot x_3 + d))^2$$

minimal wird.

Bestimmen Sie k und d mit Hilfe der Differentialrechnung, d.h. leiten Sie obigen Ausdruck einmal (mit konstantem d) nach k ab und setzen Sie ihn Null und leiten Sie ihn dann (mit konstantem k) nach d ab und setzen Sie ihn Null. Aus den beiden Gleichungen errechnen Sie k und d.

CI. Bestimmen Sie jene Gerade der Form $y = kx + d$, die die Punkte $(0, 3)$, $(1, 4)$ und $(2, 7)$ bestmöglich approximiert.

Berechnen Sie k und d mit Hilfe folgender Formeln für die lineare Regression: $k = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}$ und $\overline{y} = k \cdot \overline{x} + d$.

Dabei seien das arithmetische Mittel $\overline{x}$, die Varianz ${\sigma_x}^2$ und die Kovarianz σ_{xy} folgendermaßen definiert:

$$\overline{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad {\sigma_x}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2, \qquad \sigma_{xy} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

CII. Wir definieren auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Operationen $+, -$ und $\cdot$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d) \\ -(a,b) &:= (-a,-b) \\ (a,b) \cdot (c,d) &:= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; +, -, \cdot, (0,0), (1,0))$ ein Körper ist.

CIII. (Kürzungsregeln)

Sei $(K; +, -, \cdot, 0, 1)$ ein Körper. Zeigen Sie:

(a) $(\forall x, y, z \in K)(x + z = y + z \Rightarrow x = y)$

(b) $(\forall x, y \in K)(\forall z \in K \setminus \{0\})(z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y)$

CIV. Sei $R = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, -, \cdot, (0,0), (1,0))$, wobei die Operatoren $+, -$ und $\cdot$ folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d), \\ -(a,b) &:= (-a,-b), \\ (a,b) \cdot (c,d) &:= (ac + 4bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass R KEIN Körper ist.

Hinweis: Finden Sie einen Widerspruch zur Nullteilerfreiheit.

CV. Sei $(\{0, 1, a, b\}; +, -, \cdot, 0, 1\})$ ein Körper. Dabei seien a und b zueinander und zu 0 und 1 verschieden. Begründen Sie, dass dann nur die Operationen $+$ und $\cdot$, wie in den Tabellen angegeben, möglich sind.

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a