Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
9. Übungsblatt für den 26.5.2020 und 29.5.2020

65. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

    (a) (a, b) ist genau dann linear unabhängig, wenn $(a - 2b, 3b)$ linear unabhängig ist.

    (b) $L(a, b) = L(a - 2b, 3b)$.

66. Die Ebene e hat die Basen $A = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich A.

67. Die Ebene e sei durch $e = L\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$ gegeben. Sie hat die Basen $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$ und $C = \left(\begin{pmatrix} 24 \\ -2 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 \\ 2 \\ -24 \end{pmatrix}\right)$. Der Vektor v ist gegeben durch $(v)_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $(v)_B$.

68. Sei $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, und sei E die lineare Hülle von B. B ist dann eine Basis von E.

    (a) Welcher Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(w)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$?

    (b) Wie lauten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ bezüglich B?

(c) Geben Sie eine Basis C von E an, bezüglich der der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat!

69. Sei $a = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, und sei $B = (a, b)$.

Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B die Koordinaten $\begin{pmatrix} \langle \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), a \rangle \\ \langle \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), b \rangle \end{pmatrix}$ hat; das heißt, zeigen Sie $(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix} \langle \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), a \rangle \\ \langle \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), b \rangle \end{pmatrix}$.

Stimmt diese Formel für jede Basis (a, b) des $\mathbb{R}^2$?

70. Sei $A := \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrizen $(A\ b_1)$ und $(A\ b_2)$.

(b) Bestimmen Sie für die Gleichungssysteme $A \cdot x = b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) die Lösungsmengen in der Form $x_0 + N(A)$, wobei x_0 jeweils eine spezielle Lösung bezeichnet.

71. Welche Vektoren im $\mathbb{R}^4$ stehen auf alle drei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ normal bzw. orthogonal?

72. (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine ONB des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ keine ONB des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Weitere Übungsaufgaben

LXXIV. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 7 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 4 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -7 & -15 & 21 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für folgende Vektorräume!

(a) Den Zeilenraum $Z(B)$ von B.

(b) Den Spaltenraum $S(B)$ von B.

(c) Den Nullraum $N(B)$ von B.

(d) Den Nullraum von B^T.

LXXV. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) (a, b) ist genau dann linear unabhängig, wenn $(a + 3b, -2b)$ linear unabhängig ist.

(b) $L(a, b) = L(a + 3b, -2b)$.

LXXVI. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von A bzw. von A^T.

LXXVII. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von A.

LXXVIII. Betrachten wir wieder die Aufgabe 69 mit den Vektoren $a = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix}$, und sei $B = (a, b)$.

Beantworten Sie dieselben Fragen für dieses B.

LXXIX. Betrachten wir wieder die Aufgabe 69 mit den Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, und sei $B = (a, b)$.

Geben Sie unendlich viele Vektoren a, b an, so dass $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$, also alle Koordinaten rational sind.

Hinweis:
Siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoreisches_Tripel`.

LXXX. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang von A und daraus die Dimension des Nullraums von A.

(b) Bestimmen Sie b so, dass das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ keine Lösung besitzt.

(c) Exitistiert ein b so, dass $A \cdot x = b$ eine eindeutige Lösung besitzt?

LXXXI. Widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:

Wenn das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ eine von 0 verschiedene Lösung hat, so besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für jede rechte Seite b zumindest eine Lösung.