Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
1. Übungsblatt für den 10.3.2020 und 13.3.2020

1. Die Strömungsgeschwindigkeit eines Flusses mit der konstanten Breite 100 m sei $\vec{u}$. Eine Person versucht mit ihrem Boot den Fluss zu überqueren. Die Eigengeschwindigkeit des Boots sei $\vec{v}$ (das ist die Geschwindigkeit, mit der sich das Boot fortbewegen würde, wenn der Fluss keine Strömung hätte). Mit welcher Geschwindigkeit (bezogen auf das Ufer) bewegt sich das Boot tatsächlich? Wie lange braucht die Person, bis sie den Fluss überquert hat? Wie weit wird das Boot abgetrieben? (Alle Längen in m, alle Geschwindigkeiten in m/s.)
   (a) $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} 1{,}6 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$
   (b) $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \end{smallmatrix}\right)$

2. (Mittelpunkt einer Strecke.)
   (a) Von einer Strecke AB kennt man $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ und den Mittelpunkt $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie den Endpunkt B.
   (b) Berechnen Sie den Mittelpunkt der Strecke AB mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$ und überprüfen Sie mit Hilfe einer Zeichnung.
   (c) Leiten Sie die Formel $M = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$ für die Berechnung des Mittelpunkts M der Strecke AB her.

3. Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC ist der Schnittpunkt der Schwerlinien eines Dreiecks. Eine Schwerlinie ist die Strecke von einer Ecke zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Der Schwerpunkt S teilt die Schwerlinien im Verhältnis $2 : 1$. So gilt z.B. für den Mittelpunkt M der Seite BC:
$$\|\overrightarrow{AS}\| : \|\overrightarrow{SM}\| = 2 : 1 \text{ bzw. } S = A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM}.$$
   (a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ABC mit $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 9 \end{smallmatrix}\right)$ und überprüfen Sie mit Hilfe einer Zeichnung.
   (b) Leiten Sie die Formel $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$ für die Berechnung des Schwerpunkts S eines Dreiecks ABC her.

4. Zeigen Sie:
   (a) Ist S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, so gilt $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Sind P, Q, R die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC, so haben die Dreiecke ABC und PQR denselben Schwerpunkt.

Überprüfen Sie die Behauptung an Hand eines selbstgewählten Beispiels und durch eine Zeichnung. Führen Sie auch einen allgemeinen Beweis über Vektoren.

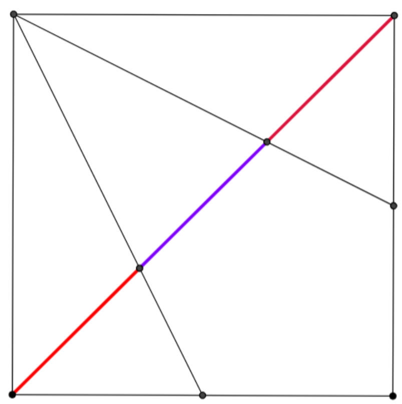
5. Zeigen Sie:

(a) Die Mittelpunkte P, Q, R, S der Seiten eines Vierecks $ABCD$ sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

(b) Die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren einander.

Hinweis: Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, M_1 der Mittelpunkt der Diagonale AC und M_2 der Mittelpunkt der Diagonale BD. Zeigen Sie, dass die beiden Mittelpunkte zusammenfallen.

6. Welchen geometrischen Zusammenhang können Sie in folgendem Quadrat ablesen?



Finden Sie Argumente für Ihre Vermutung und beweisen Sie sie.

7. Ein 12 m hoher Sendemast steht auf der Spitze eines Turms. Von einem Beobachter auf dem waagrechten Platz vor dem Turm (Aughöhe 1,6 m) wird der Fußpunkt des Mastes unter dem Höhenwinkel 33,74° und die Mastspitze unter dem Höhenwinkel 39,87° anvisiert. Wie hoch ist der Turm und wie weit ist der Turm vom Beobachter entfernt?

8. Zwei Punkte A und B liegen auf verschiedenen Seiten eines Sees. Zwei Straßen, die von A und B geradlinig ausgehen, treffen sich in C unter einem Winkel von $55,41°$. Wie weit ist A von B entfernt (Luftlinie), wenn die Entfernung von B bis C $4,12\,\text{km}$ und die Entfernung von A bis C $8,54\,\text{km}$ beträgt?

Weitere prüfungsrelevante Beispiele

Sei O der Ursprung des Koordinatensystems. Dann wird der Schwerpunkt S der Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit der Formel

$$S = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}}{n}$$

definiert.

I. Zeigen Sie: Sind E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten des Vielecks $ABCD$, so haben die Punkte A, B, C, D und E, F, G, H denselben Schwerpunkt.

   Überprüfen Sie die Behauptung an Hand eines selbstgewählten Beispiels und durch eine Zeichnung. Führen Sie auch einen allgemeinen Beweis über Vektoren.

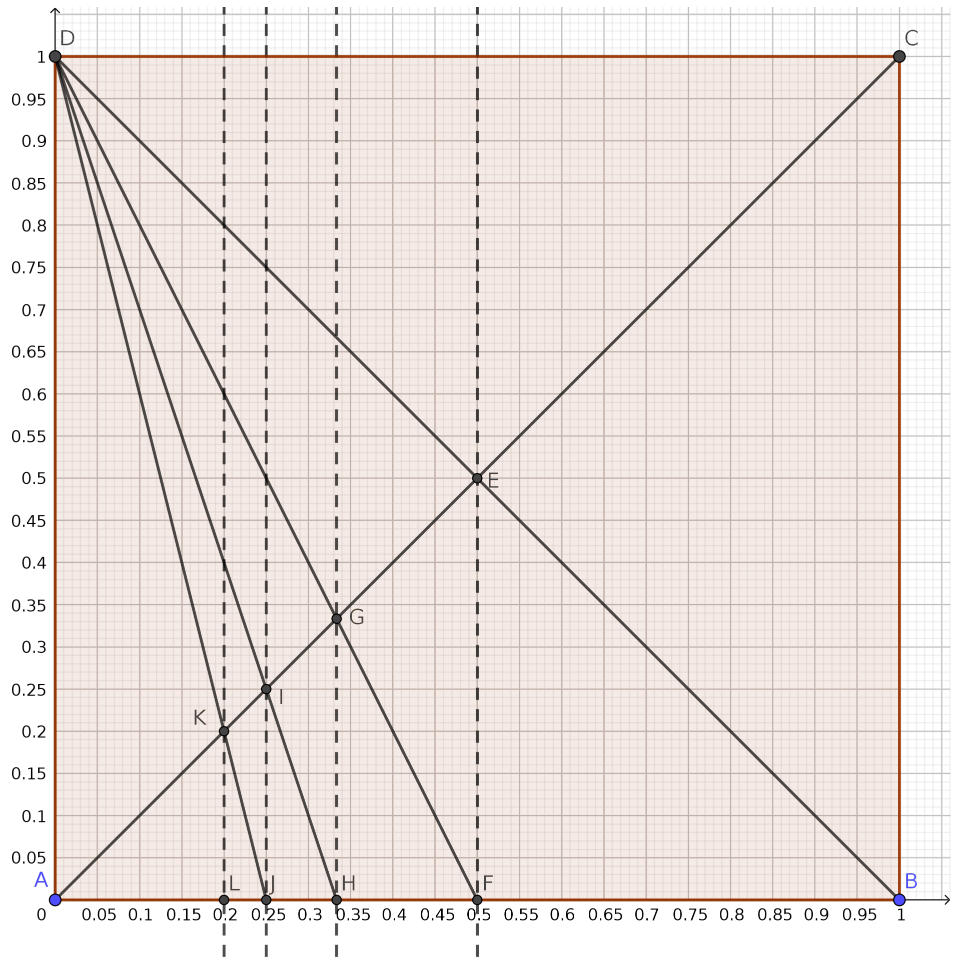
II. Sei S der Schwerpunkt der Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Beweisen Sie:

$$\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \ldots + \overrightarrow{SA_n} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

III. Sie glauben dem italienischen Tourismusverband nicht und wollen selbst herausfinden, wie schief der Turm von Pisa ist. Dazu entfernen Sie sich in Neigerichtung des Turms 50 m vom Fußpunkt des Turms und blicken (vom Boden aus, damit Sie es später beim Rechnen einfacher haben) zur Turmspitze, welche unter einem Winkel α erscheint. Sie stellen fest, dass α genau $47°12'53''$ beträgt, und dass der Turm 45 m lang ist. Um wieviel Grad ist der Turm gegen die Vertikale geneigt?

IV. Ein Kletterer kann Wände mit einer Neigung von maximal 65° besteigen. Schafft er eine Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche von 784 m^2 und einer Höhe von 42 m?

V. Betrachten wir folgende Figur:



Beweisen Sie, dass $\overline{AB} : \overline{AL} = 5 : 1$.

VI. Zeigen Sie, dass die Aufgabe 5. (a) auch in drei Dimensionen gilt. Hinweis: Eine grafische Veranschaulichung befindet sich unter `https://www.geogebra.org/m/fvjqryvg`.

VII. Füllen Sie die Tabellen aus:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$
$\cos\alpha$								
$\sin\alpha$								

α	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\cos\alpha$									
$\sin\alpha$									

α	π	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/6$	$-\pi/6$	$-\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi$
$\cos\alpha$								
$\sin\alpha$								

VIII. (a) Rechnen Sie den Winkel $\frac{50\pi}{3}$ ins Gradmaß um.

(b) Rechnen Sie den Winkel $2020°$ ins Bogenmaß um.

IX. Die Addition von den Vektoren $u = \binom{a}{b}$ und $v = \binom{c}{d}$ wird mit dem Vektor $\binom{a+c}{b+d}$ definiert.

(a) Veranschaulichen Sie die Addition von den Vektoren $u = \binom{2}{3}$, $v = \binom{4}{1}$ im Koordinatensystem.

(b) Auf welche allgemeine geometrische Methode für die Addition können Sie schließen, wenn u und v beliebig sind?

(c) Wie ändern sich Ihre Antworten für die obigen Fragen, wenn statt Addition *Subtraktion* durchgeführt wird?