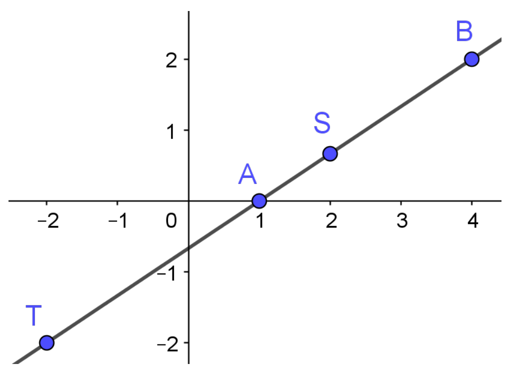
Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
2. Übungsblatt für den 17.3.2020 und 20.3.2020

Auf einer Geraden durch A und B gibt es für $a, b \in \mathbb{R}^+$ zwei Punkte S und T, für die $\|AS\| : \|SB\| = a : b$ bzw. $\|AT\| : \|TB\| = a : b$ gilt.

- Der Punkt S teilt die Strecke AB innen im Verhältnis $a : b$.
- Der Punkt T teilt die Strecke AB außen im Verhältnis $a : b$.



9. Gegeben sind die Punkte $A = \binom{1}{0}$ und $B = \binom{4}{2}$. Bestimmen Sie die Koordinaten
   (a) des Punktes S, der auf der Strecke AB liegt und von A genau $\frac{1}{2}$-mal so weit entfernt ist wie von B.
   (b) des Punktes T, der auf der Geraden durch A und B außerhalb der Strecke AB liegt und von A genau $\frac{1}{2}$-mal so weit entfernt ist wie von B.

10. Drücken Sie allgemein die Punkte S und T durch A, B und a aus.
    (a) Der Punkt S liegt auf der Strecke AB und ist von A genau a-mal so weit entfernt wie von B.
    (b) Der Punkt T liegt auf der Geraden durch A und B außerhalb der Strecke AB und ist von A genau a-mal so weit entfernt wie von B.

11. Gegeben sind die Punkte $A = \binom{-1}{10}$ und $B = \binom{3}{2}$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte S und T, die die Strecke AB innen bzw. außen im Verhältnis 5:3 teilen.

12. Zeigen Sie:

    (a) Teilt der Punkt S die Strecke AB innen im Verhältnis $a : b$, so gilt $S = \frac{1}{1+\frac{a}{b}}(A + \frac{a}{b} \cdot B)$.

    (b) Teilt der Punkt T die Strecke AB außen im Verhältnis $a : b$, so gilt $T = \frac{1}{1-\frac{a}{b}}(A - \frac{a}{b} \cdot B)$.

Wir bezeichnen die Längen der Seiten eines Dreiecks mit a, b, c, und wir bezeichnen den der Seite mit Länge a gegenüber liegenden Winkel mit α, den der Seite mit Länge b gegenüber liegenden Winkel mit β, und den der Seite mit Länge c gegenüber liegenden Winkel mit γ. (Die Seiten seien dabei *gegen den Uhrzeigersinn* mit a, b, c beschriftet.) Berechnen Sie in den folgenden Beispielen jeweils die nicht angegebenen Seitenlängen und Winkel.

13. (a) $c = 4$, $b = 5$, $a = 3$.

    (b) $c = 4$, $b = 5$, $a = 10$.

    (c) $c = 5$, $b = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

    (d) Gibt es für jede Wahl von $c > 0$, $b > 0$, α mit $0 < \alpha < \pi$ ein Dreieck mit den gewählten Bestimmungsstücken?

14. (a) $c = 5$, $b = 10$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

    (b) $c = 5$, $b = 3$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

    (c) $c = 5$, $b = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

    (d) $c = 5$, $b = 2$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

    (e) $c = 5$, $b = 3$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$.

    (f) $c = 5$, $b = 10$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$.

    (g) $c = 4$, $b = 5$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

    (h) Fassen Sie Ihre Beobachtungen zusammen: Unter welchen Voraussetzungen an c, b, β gibt es

        i. gar kein Dreieck

        ii. genau ein Dreieck

        iii. genau zwei Dreiecke

        iv. mehr als zwei Dreiecke

        mit den Bestimmungsstücken $c > 0$, $b > 0$, $\beta \in]0, \pi[$?

15. (a) Zeigen Sie die Gleichheit der beiden Mengen

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + 3y - 11 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Hinweis: Begründen Sie $\subseteq$ und $\supseteq$.

(b) Eine Gerade g ist in Parameterdarstellung

$$\left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

mit $p_1, p_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ gegeben. Finden Sie für g eine implizite Darstellung.

16. Die Punkte $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ legen eine Gerade g fest.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterform dieser Geraden und verwandeln Sie diese anschließend in eine Gleichungsform.

(b) Bestimmen Sie die Parameterform und die implizite Darstellung jener Geraden h, die zu g parallel ist und durch den Punkt $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ geht.

(c) Bestimmen Sie in Gleichungsform jene Gerade f, die durch den Punkt $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ geht und normal auf die Gerade g steht.

(d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von f und g.

(e) Bestimmen Sie den Normalabstand von P von g.

Stellen Sie die Punkte und die Geraden auch grafisch dar.

Weitere Übungsaufgaben

X. Gegeben sind die Punkte $A = \binom{1}{1}$ und $B = \binom{6}{3}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T auf der Strecke AB, der diese im Verhältnis 2:3 teilt.

XI. Die Strecke AB wird durch die Punkte S und T innen bzw. außen im Verhältnis 2:5 geteilt. Drücken Sie S und T durch A und B aus.

XII. Die Punkte C und D liegen auf der Geraden durch A und B und sind von A dreimal so weit entfernt wie von B. C liegt zwischen A und B. Drücken Sie C und D durch A und B aus.

XIII. Die Punkte P, Q, R teilen die Dreiecksseiten AB, BC, CA jeweils im Verhältnis 3:1. Zeigen Sie, dass die Dreicke ABC und PQR denselben Schwerpunkt haben.

XIV. (a) $c = 5$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$.
  (b) $c = 5$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.
  (c) $c = 5$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.
  (d) Fassen Sie Ihre Beobachtung zusammen: Unter welchen Voraussetzungen an c, α, β gibt es
    i. gar kein Dreieck
    ii. genau ein Dreieck
    iii. genau zwei Dreiecke
    iv. mehr als zwei Dreiecke

    mit den Bestimmungsstücken c, α, β?

XV. (a) Berechnen Sie $\sin(\gamma)$ für ein Dreieck mit $c = 12$, $b = 4\sqrt{3}$, $\beta = 30°$. Das Dreieck ist mit diesen drei Bestimmungsstücken c, b, β noch nicht eindeutig festgelegt. Warum nicht?
  (b) Wie groß kann b in einem Dreieck mit $\alpha = 45°$, $c = 3$, $a = \sqrt{6}$ sein? (Gibt es mehr als eine Lösung?)
  (c) Geben Sie eine Wahl von a an, sodass es genau ein Dreieck mit den Bestimmungsstücken $\alpha = 45°$, $c = 2$, und Ihrem gewählten a gibt!

XVI. Von einem Dreieck ABC haben Sie folgende Information: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, der Winkel α zwischen AB und AC ist $30°$, $\overline{BC} = \frac{8}{\sqrt{2}}\,\text{cm}$.
  (a) Stellen Sie diese Daten in einer Skizze dar.
  (b) Welchen Winkel schließen CB und CA ein? Gibt es mehr als eine Lösung?

XVII. (a) Bestimmen Sie b für alle Dreiecke mit $c = 4$, $\alpha = 60°$, $a = \sqrt{13}$.

(b) Bestimmen Sie ein a, sodass es kein Dreieck mit $c = 4$, $\alpha = 60°$ und Ihrem gewählten a gibt.

(c) Bestimmen Sie ein a, sodass es *genau ein* Dreieck mit $c = 4$, $\alpha = 60°$ und Ihrem gewählten a gibt.

XVIII. (a) Bestimmen Sie c für alle Dreiecke mit $a = 4$, $\beta = 45°$, $b = \frac{8}{\sqrt{6}}$.

(b) Bestimmen Sie ein b, sodass es kein Dreieck mit $a = 4$, $\beta = 45°$ und Ihrem gewählten b gibt.

(c) Bestimmen Sie ein b, sodass es *genau ein* Dreieck mit $a = 4$, $\beta = 45°$ und Ihrem gewählten b gibt.

XIX. Die untenstehende Figur kann auf verschiedene Arten durch vier Vektoren festgelegt werden. Geben Sie auf zwei verschiedene Arten vier solche Vektoren an. Drücken Sie indem Fall die restlichen „Seitenvektoren“ und „Diagonalvektoren“ durch diese Vektoren an!