Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
3. Übungsblatt für den 24.3.2020 und 27.3.2020

17. Die Mittelsenkrechte m_{AB} einer Strecke AB ist jene Gerade, die normal auf die Strecke AB steht und durch deren Mittelpunkt läuft.

    (a) Bestimmen Sie die Mittelsenkrechte m_{AB} zur Strecke AB mit $A = \binom{1}{3}$ und $B = \binom{-4}{-2}$ in Parameterdarstellung bzw. Gleichungsform!

    (b) Wählen Sie einen Punkt auf der Mittelsenkrechten m_{AB} und berechnen Sie dessen Abstände zu den Punkten $A = \binom{1}{3}$ und $B = \binom{-4}{-2}$.

    (c) Zeigen Sie, dass alle Punkte C auf der Mittelsenkrechten m_{AB} gleiche Abstände zu den Punkten $A = \binom{1}{3}$ und $B = \binom{-4}{-2}$ haben.

    (d) Beweisen Sie, dass für verschiedene Punkte A und B aus $\mathbb{R}^2$ die Punkte der Mittelsenkrechten m_{AB} gleiche Abstände zu den Punkten A und B haben.
    Hinweis: Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die Punkte A und B auf der x-Achse symmetrisch zum Ursprung liegen, d.h. $A = \binom{-a}{0}$ und $B = \binom{a}{0}$ für $a \in \mathbb{R}^+$.

    Überprüfen Sie Ihre Skizze und Berechnungen mithilfe von GeoGebra!

18. Gegeben sei das Dreieck ABC mit $A = \binom{-2}{-3}$, $B = \binom{6}{3}$ und $C = \binom{2}{5}$.

    (a) Zeigen Sie, dass sich die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks ABC in einem Punkt schneiden. *Hinweis*: Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zweier Seiten und überprüfen Sie, ob dieser Punkt auf der Mittelsenkrechten der dritten Seite liegt.

    (b) Bestimmen Sie die Abstände dieses gemeinsamen Punktes zu den Eckpunkten des Dreiecks ABC.
    Bemerkung: Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

    (c) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

    (d) Welche spezielle Lage hat der Umkreismittelpunkt in einem rechtwinkligen Dreieck?

    Überprüfen Sie Ihre Skizze und Berechnungen mithilfe von GeoGebra!

19. Beweisen Sie, dass das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ folgende Eigenschaften erfüllt:

    (a) $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle \;=\; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$.

(b) $\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\rangle \;=\; \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle - \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle$.

20. Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

    (a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{c}, \vec{a}\rangle \cdot \vec{b} - \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle \cdot \vec{c}$,

    (b) $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \right\rangle = \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle \cdot \left\langle \vec{b}, \vec{d}\right\rangle - \left\langle \vec{b}, \vec{c}\right\rangle \cdot \left\langle \vec{a}, \vec{d}\right\rangle$.

    Überprüfen Sie Ihre Berechnungen mithilfe von einem Computeralgebra System! *Hinweis: Nutzen Sie Mathematica, WolframAlpha, oder die Befehle* `Kreuzprodukt` *und* `Skalarprodukt` *in GeoGebra!*

21. Seien $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, $C = (4, 4)$.

    (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mithilfe des Kreuzprodukts! Überprüfen Sie Ihre Berechnungen mithilfe von GeoGebra!

    (b) Geben Sie ein Dreieck mit ganzzahligen Eckpunktkoordinaten an, dessen Flächeninhalt kleiner ist als der des Dreiecks ABC.

22. Im Raum seien die folgenden vier Punkte gegeben: $A = (3, 1, 0)$, $B = (1, 7, 2)$, $C = (0, 7, 6)$, $D = (1, 4, 5)$.

    Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden e und f in den folgenden Fällen:

    (a) e enthält A und D, f enthält B und C,

    (b) e enthält A und B, f enthält C und D,

    (c) e enthält A und C, f enthält B und D.

    Welche geometrische Figur bilden diese vier Punkte?

    Überprüfen Sie Ihre Skizze und Berechnungen mithilfe von GeoGebra!

23. Zeigen Sie die Gleichheit der beiden Mengen

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z - 3 = 0 \right\}$$

    und

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

    Überprüfen Sie Ihre Berechnungen mithilfe von GeoGebra!

24. Die Punkte $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ legen eine Gerade g fest.

   (a) Bestimmen Sie eine Parameterform dieser Geraden.

   (b) Gibt es eine Gleichungsform dieser Geraden?

   Stellen Sie die Punkte und die Gerade auch grafisch dar. Überprüfen Sie Ihre Lösung mithilfe von GeoGebra.

Weitere Übungsaufgaben

XX. Eine Raute ist ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten.
$A = \binom{-5}{-6}$ und $D = \binom{1}{2}$ sind Eckpunkte einer Raute $ABCD$, deren Seite a ($= AB$) parallel zur Geraden $g: \ X = \binom{0}{-5} + \lambda \cdot \binom{4}{3}$ liegt. Bestimmen Sie die fehlenden Eckpunkte. Die Eckpunkte A, B, C, D sind gegen den Uhrzeigersinn beschriftet. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Diagonalen AC und BD und berechnen Sie die Winkel der Raute.

XXI. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $A = \binom{1}{3}$, $B = \binom{-6}{1}$ und $C = \binom{-4}{-3}$.

   (a) Zeigen Sie, dass sich die Schwerlinien des Dreiecks ABC in einem Punkt schneiden, und berechnen Sie diesen Schwerpunkt.

   (b) Berechnen Sie in welchem Verhältnis der Schwerpunkt die Schwerlinien teilt.

   Überprüfen Sie Ihre Lösung mithilfe von GeoGebra.

XXII. Gegeben sei das Dreieck ABC mit $A = \binom{2}{2}$, $B = \binom{6}{5}$ und $C = \binom{2}{7}$.

   (a) Zeigen Sie, dass sich die Höhenlinien der Seiten des Dreiecks ABC in einem Punkt schneiden. *Hinweis*: Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Höhenlinien zweier Seiten und überprüfen Sie, ob dieser Punkt auf der Höhenlinie der dritten Seite liegt.

   (b) Welche spezielle Lage hat der Höhenschnittpunkt in einem rechtwinkligen Dreieck?

   Überprüfen Sie Ihre Lösung mithilfe von GeoGebra.

XXIII. In einem Parallelogramm (Beschriftung wie üblich) mit Seitenlängen a, b und Diagonalenlängen e, f gilt: $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$.

   (a) Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Cosinussatzes.

(b) Sei $\vec{e} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{f} = \overrightarrow{BD}$. Dann lässt sich dieser Satz auch mit Hilfe von Skalarprodukten beweisen, wobei $a = \|\vec{a}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$, $b = \|\vec{b}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$. Führen Sie diesen Beweis aus.

XXIV. Gegeben ist der Kreis k mit dem Mittelpunkt $O = (0, 0)$ und Radius $R = 1$. Weiters seien $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ und $C = (x, y)$, wobei C auf dem Kreis liegt.

Führen Sie einen algebraischen Beweis mithilfe von Koordinaten für den Satz von Thales für das Dreieck ABC durch: Begründen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinkelig ist.

XXV. Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit Koordinaten $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (x, y)$.

Führen Sie einen algebraischen Beweis mithilfe von Koordinaten für die Umkehrung des Satzes von Thales für das Dreieck ABC durch: Begründen Sie, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC der Punkt $O = (0, 0)$ ist.

XXVI. Seien $A = (-1, 2)$, $B = (8, 4)$, $C = (4, 8)$, $D = (5, -1)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ mithilfe des Kreuzprodukts! Hinweis: Berechnen Sie die Flächeninhalte des Dreiecks ABC bzw. ABD.

Überprüfen Sie Ihre Lösung mithilfe von GeoGebra.

XXVII. Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $O = (0, 0)$ und Radius $R = 1$. Dem Kreis wird ein regelmäßiges n-Eck eingeschrieben, sodass das eine Eck die Koordinaten $(1, 0)$ besitzt. Bestimmen Sie jeweils alle Koordinaten, den Umfang und den Flächeninhalt des n-Ecks, wenn

(a) $n = 3$,

(b) $n = 4$,

(c) $n = 6$,

(d) $n = 8$,

(e) $n = 12$.

Überprüfen Sie Ihre Berechnungen numerisch mithilfe von GeoGebra.

XXVIII. Geben Sie die Menge

$$M = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ steht normal auf } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \}$$

in der Form

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0 \right\}$$

an. Zeichnen Sie eine Skizze der Menge M

(a) mithilfe von GeoGebra,

(b) ohne GeoGebra.

XXIX. Die Ebene e wird mit der impliziten Gleichung $e : 6x + 9y + z = 38$ beschrieben.

(a) Liegt der Punkt $P = (1, 2, 3)$ in der Ebene e?

(b) Ändern Sie eine Koordinate von P, sodass der Punkt in der Ebene e liegt. Wie viele Lösungen gibt es?

Überprüfen Sie Ihre Lösung mithilfe von GeoGebra.