Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
4. Übungsblatt für den 31.3.2020 und 3.4.2020

25. Im Raum seien die folgenden vier Punkte gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine implizite Darstellung der Ebene ϵ, die die Punkte A, B, C enthält.

   (b) Überprüfen Sie, ob der Punkt D ebenfalls in dieser Ebene liegt. Führen Sie dies sowohl mit Hilfe der Parameterdarstellung als auch der impliziten Darstellung der Ebene durch.

   (c) Bestimmen Sie eine Gerade n, die normal auf die Ebene steht und durch D läuft.

   (d) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt der Normalen n durch die Ebene ϵ. Verwenden Sie dazu sowohl die Parameterdarstellung als auch die implizite Darstellung der Ebene ϵ.

   (e) Bestimmen Sie den Normalabstand des Punktes D von der Ebene ϵ.

26. Gegeben seien die Gerade g und die Ebene e:

$$g : X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad e : 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 2$$

   Berechnen Sie:

   (a) das Maß des Winkels zwischen der Geraden g und der Ebene e.

   (b) die Normalprojektion der Geraden g auf die Ebene e.

27. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g im Raum:

$$g : X = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Hinweis: Legen Sie durch P eine Ebene e normal zu g.

28. Geben Sie – falls möglich – eine Gleichung der Ebene in Parameterform und in impliziter Form an, in der die Geraden g und h liegen:

(a) $g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h : X = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $g : X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad h : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

(c) $g : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h : X = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

29. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen der dreiseitigen Pyramide $ABCD$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

30. Ein Lichtstrahl, der entlang der Geraden g auf die Ebene $\epsilon : x + 3y + z = 4$ zuläuft, wird an der Ebene reflektiert.

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) In welchem Punkt S trifft der Lichtstrahl auf die Ebene?

(b) Auf welcher Geraden h verläuft der reflektierte Strahl?

31. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$.

(b) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

(c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

(d) $\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

(e) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0, \quad \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$.

32. (a) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:
$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ genau dann, wenn $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ oder $\vec{b}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:
$\|\vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

(c) Bestimmen Sie $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$,
sodass $\|\vec{a} \times \vec{b}\| < \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

(d) Bestimmen Sie $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$, sodass $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

(e) Für welche $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$?

Weitere Übungsaufgaben

XXX. Berechnen Sie die Durchstoßpunkte der drei Koordinatenachsen mit der Ebene e:

(a) $e : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 38$

(b) $e : 2x_1 - 3x_3 = 12$

(c) $e : x_2 = 7$

XXXI. Geben Sie eine Gleichung der Ebene in Parameterform und in impliziter Form an, die den Punkt P und die Gerade g enthält.

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g : X = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

XXXII. Geben Sie eine Gleichung der Ebene in Parameterform und in impliziter Form an, die den Punkt P enthält und normal auf die Gerade g steht.

$$P = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

XXXIII. Stellen Sie die Gleichungen der Ebenen auf, die zur Ebene e parallel sind und von ihr den Abstand d haben:

$$e : 4x_1 + x_2 - 8x_3 = 6, \quad d = 18$$

XXXIV. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Ein Parallelepiped ist das dreidimensionale Analogon zum Parallelogramm. Es handelt sich also um ein schiefes Prisma mit Parallelogrammen als Grund- und Seitenflächen, wobei gegenüberliegende Seitenflächen parallel und deckungsgleich zueinander sind.

XXXV. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, dass das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds durch $\left|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle\right|$ gegeben ist.

XXXVI. Ein Schiff A verlässt den Hafen $H_A = \begin{pmatrix} 50 \\ 12 \end{pmatrix}$ (alle Längenangaben in km) und fährt mit 26 km/h in Richtung (bzw. mit dem Richtungsvektor) $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Ein zweites Schiff B verlässt den Hafen $H_B = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \end{pmatrix}$ und fährt mit 30 km/h in Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) In welchem Punkt schneiden sich die Wege der beiden Schiffe?

(b) Kollidieren die Schiffe, wenn beide um 8:00 Uhr losgefahren sind?

(c) Bestimmen Sie die Orte der beiden Schiffe jeweils um 8:00 Uhr, 9:00 Uhr und 10:00 Uhr und berechnen Sie die Verbindungsvektoren. Was fällt auf?

(d) Wie konnte früher ein Kapitän nur mit Hilfe von einem Kompass feststellen, ob sich sein Schiff auf einem Kollisionskurs zu einem anderen Schiff befindet?

XXXVII. Ein Planet bewegt sich kreisförmig um einen Stern, wobei ein Umlauf 10 Jahre dauert. Der Planet befindet sich zu drei verschiedenen Zeitpunkten an folgenden Orten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Position des Sterns. Berechnen Sie weiters die Geschwindigkeit des Planeten in km/h. Eine Koordinateneinheit entspreche dabei einer Astronomischen Einheit: 1 AE = 149 597 870,7 km.

XXXVIII. (a) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.
Wir nehmen an, dass es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.
Zeigen Sie, dass $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ gilt.

(b) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ so, dass $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$. Muss es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geben, sodass $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$?

XXXIX. Zeigen Sie für alle $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

(a) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$
Was bedeutet diese Ungleichung in $\mathbb{R}^3$ geometrisch?
Hinweis: Quadrieren Sie die Ungleichung (warum erlaubt?) und verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(b) Für welche $\vec{a},\ \vec{b}$ gilt die Gleichheit?

XL. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

Folgern Sie aus der sogenannten Lagrange-Identität

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle$$

die Ungleichung $\|\vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.