Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
5. Übungsblatt für den 21.4.2020 und 24.4.2020

33. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0. \end{pmatrix}.$$

Welche davon können miteinander multipliziert werden? Bestimmen Sie jedes Produkt, wo die Multiplikation erlaubt ist.

34. (a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, dass $A \cdot B = B \cdot A$.

(b) Finden Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A \cdot B = B \cdot A$, wobei A und B keine Einheitsmatrizen oder Nullmatrizen sind, und $A \neq B$. (Eine *Nullmatrix* ist eine Matrix, deren Einträge alle gleich der Zahl Null sind.)

35. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \neq 0$ und $B \neq 0$ gilt auch $A \cdot B \neq 0$. Dabei ist 0 die Nullmatrix.

(b) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass $A = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \cdot (c \ d)$.
Hinweis: Probieren Sie, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in der gewünschten Form darzustellen.

36. Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Geben Sie jeweils einen Ausdruck für den (i, j)-ten Eintrag der folgenden Matrizen an, in dem keine Matrixmultiplikationen oder Matrixadditionen mehr vorkommen.

(a) $D_1 = A \cdot B$. *Lösung:* $D_1(i, j) = \sum_{k=1}^{n} A(i, k) \cdot B(k, j)$.

(b) $D_2 = A \cdot (B^T - C)$.

(c) $D_3 = B^T \cdot A^T + C$.

(d) $D_4 = (A \cdot A^T) \cdot B^T$.

37. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq bc$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar ist mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

38. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie einen Vektor u, sodass $A \cdot u$ den dritten Spaltenvektor von A ergibt.

(b) Bestimmen Sie einen Vektor v, sodass $v \cdot A$ genau 2-mal die erste plus 3-mal die zweite Zeile von A ergibt.

(c) Bestimmen Sie eine Matrix W, sodass $A \cdot W$ die zweite mit der dritten Spalte in A vertauscht.

39. (a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $A^2 \neq 0$, aber $A^3 = A^4 = \ldots = 0$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie jeweils A^2 und A^3. Stellen Sie eine Vermutung für A^k auf ($k \in \mathbb{N}$), und beweisen Sie Ihre Aussage.

Hinweis: Die Potenzen einer Matrix A werden mit den Gleichungen $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$ usw. definiert.

40. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 - 1x_5 &= 2, \\ 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 - 2x_5 &= 3, \\ x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 - 1x_5 &= 0, \\ 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 - 2x_5 &= 0, \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Weitere Übungsaufgaben

XLI. (a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, dass $A \cdot B \neq B \cdot A$.

(b) Finden Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A \cdot B \neq B \cdot A$.

XLII. Sei α ein beliebiger Winkel. Betrachten wir die Matrix

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie R_α jeweils für $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi/3$, $\alpha = \pi/4$.

(b) Überprüfen Sie jeweils für $\alpha = \pi/4$ und $\alpha = \pi/2$, dass $R_\alpha \cdot R_\alpha = R_{2\alpha}$.

(c) Sei β ein beliebiger Winkel. Gilt im Allgemeinen $R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta}$?

XLIII. Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Geben Sie jeweils einen Ausdruck für den (i, j)-ten Eintrag der folgenden Matrizen an, in dem keine Matrixmultiplikationen oder Matrixadditionen mehr vorkommen.

(a) $D_1 = A \cdot (B^T + C)$.

(b) $D_2 = B^T \cdot A^T - C$.

(c) $D_3 = B^T \cdot (A^T \cdot A)$.

XLIV. Seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

und $C = A \cdot B$ mit

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Seien weiters $x_1 = (a_{11}+a_{22})\cdot(b_{11}+b_{22})$, $x_2 = (a_{21}+a_{22})\cdot b_{11}$, $x_3 = a_{11}\cdot(b_{12}-b_{22})$, $x_4 = a_{22}\cdot(b_{21}-b_{11})$, $x_5 = (a_{11}+a_{12})\cdot b_{22}$, $x_6 = (a_{21}-a_{11})\cdot(b_{11}+b_{12})$, $x_7 = (a_{12}-a_{22})\cdot(b_{21}+b_{22})$.

Zeigen Sie, dass $c_{11} = x_1 + x_4 - x_5 + x_7$, $c_{12} = x_3 + x_5$, $c_{21} = x_2 + x_4$, $c_{22} = x_1 + x_3 - x_2 + x_6$. (Diese Methode der Matrixmultiplikation heißt *Strassen-Algorithmus*, entwickelt von Volker Strassen 1969.)

XLV. Ein Computer braucht folgende Berechnungszeiten für die Grundoperationen:

1 Addition	2 Nanosekunden
1 Subtraktion	2 Nanosekunden
1 Multiplikation	30 Nanosekunden
1 Division	50 Nanosekunden

Wäre die Verwendung des Strassen-Algorithmus für die Matrixmultiplikation von 2×2 Matrizen schneller als die Standardmethode? Welche Rechenzeit benötigt man für das Multiplizieren von zwei 2×2 Matrizen?

XLVI. Betrachten wir das Wort `ABC` und das folgende mathematische Spiel. In einem Zug ersetzen wir

- den Buchstaben `A` durch die Buchstaben `BC`,
- den Buchstaben `B` durch die Buchstaben `CC`,
- den Buchstaben `C` durch den Buchstaben `A`.

Diese Änderung wird dann in den weiteren Zügen immer wiederholt.

Beispiel: $\underline{\texttt{A}}\ \underline{\texttt{B}}\ \underline{\texttt{C}} \to \underline{\texttt{BC}}\ \underline{\texttt{CC}}\ \underline{\texttt{A}} \to \texttt{CCAAABC} \to \ldots$

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Buchstaben im 15. Zug 1111 ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Matrixmultiplikation

$$(1\ 1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Anzahl der Faktoren $1 + 14 = 15$ ist. Berechnen Sie das Produkt mithilfe von Potenzierung in GeoGebra, und lesen Sie die Anzahl der Buchstaben in der Ergebnismatrix ab.

XLVII. (Aufgabe im Buch *Neun Kapitel der Rechenkunst*, *"Jiǔ Zhāng Suànshù"*, 九章算术, China, 1. Jahrhundert n. Chr.) Eine Pinte Qualitätswein kostet 50 Goldmünzen, eine Pinte Tafelwein kostet 10 Goldmünzen. Zwei Pinten Wein wurden für 30 Goldmünzen gekauft. Wieviel Qualitätswein und Tafelwein befinden sich in den zwei Pinten?

XLVIII. Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 - 1x_4 + 1x_5 &= 4, \\ 1x_2 + 1x_3 - 1x_4 + 2x_5 &= 6, \\ x_3 + 0x_4 - 2x_5 &= -7. \end{aligned}$$