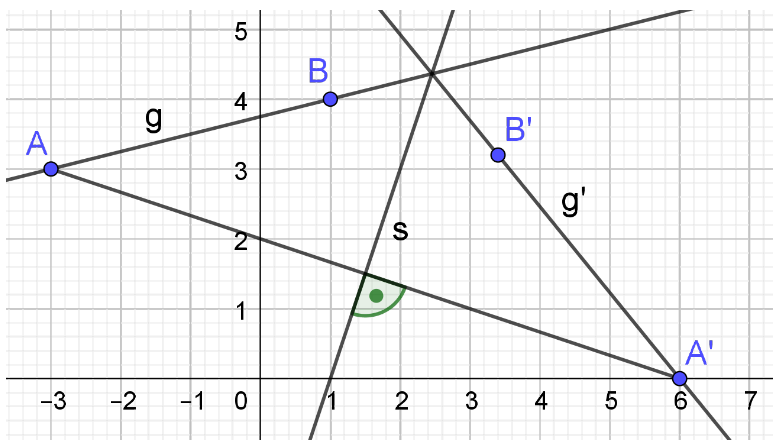
**Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)**
**ASB2MA2LAU, SeBMA02x02**
**6. Übungsblatt für den 28.4.2020 und 8.5.2020**

41. Spiegeln Sie die Gerade $g : -x + 4y = 15$ an der Geraden $s : 3x - y = 3$.

    *Hinweis:* Bei einer Spiegelung an einer Geraden genügt es, zwei verschiedene Punkte $A$ und $B$ der Geraden $g$ an $s$ auf $A'$ und $B'$ zu spiegeln. Die gespiegelte Gerade $g'$ läuft dann durch $A'$ und $B'$.

    Die Strecke $AA'$ steht auf die Spiegelachse $s$ normal. $A$ und $A'$ sind von $s$ gleich weit entfernt.




42. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Berechnen Sie $A \cdot (B + C)$ und $A \cdot B + A \cdot C$.

   (b) Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B, C \in \mathbb{R}^{l \times m}$.
   Beweisen Sie: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

43. Seien $k, l, m \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und $t$ eine reelle Zahl.

    Beweisen Sie
$$(t * A) \cdot B = t * (A \cdot B).$$

44. Bestimmen Sie (falls möglich) jeweils die inverse Matrix zu den folgenden Matrizen mittels des Gauß-Algorithmus.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

45. Seien $A$ und $B$ invertierbare Matrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $A \cdot B = B \cdot A$. Zeigen Sie

   (a) $A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1}$

   (b) $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

46. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 & 0 \\ 10 & -7 & -16 & -24 \\ 2 & -3 & 0 & 8 \\ -12 & -2 & 40 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 56 \\ 8 \\ -88 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

47. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

48. Finden Sie eine Matrix $X$, sodass $A \cdot X = B$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

## Weitere Übungsaufgaben

XLIX. Es sei $t$ eine reelle Zahl, und $A$ und $B$ seien $m \times n$-Matrizen. Beweisen Sie

$$t * (A + B) = t * A + t * B.$$

L. Seien $k, l, m \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und $t$ eine reelle Zahl.

Beweisen Sie
$$A \cdot (t * B) = t * (A \cdot B).$$

LI. Für reelle Zahlen $a, b$ gilt $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Finden Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, sodass

$$(A + B)^2 \neq A \cdot A + 2 \cdot A \cdot B + B \cdot B.$$

Welcher Schritt im Beweis zu der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ in $\mathbb{R}$ funktioniert nicht für $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$?

LII. Seien $A$ und $B$ invertierbare Matrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $A \cdot B = B \cdot A$. Zeigen Sie:
$$A \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A$$

LIII. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 6 \\ -3 & -2 & 3 \\ -9 & -7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

LIV. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme, interpretieren Sie die einzelnen Gleichungen geometrisch als Ebenen und untersuchen Sie deren gegenseitige Lage:

(a)
$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -2y & +2z & = & -1 \\ 2x & -2y & -z & = & -4 \\ 6x & -6y & +2z & = & -7 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 1 \\ 2x & +y & -z & = & 4 \\ 2x & +2y & -2z & = & -4 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & -z & = & -1 \\ 2x & -2y & +z & = & 4 \\ -2x & +2y & +5z & = & 8 \end{array}$$

LV. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ -28 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

LVI. Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 14 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

LVII. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.