Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
7. Übungsblatt für den 12.5.2020 und 15.5.2020

49. Wir betrachten die Menge $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

    Zeigen Sie, dass die Summe und das Produkt zweier Elemente aus M wieder in M liegen.

50. Vervollständigen Sie die folgenden Begründungen dafür, dass die Menge

    $$T = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \alpha * \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \}$$

    die Unterraumeigenschaften (1) und (2) erfüllt.

    (a) T ist nicht die leere Menge, weil ____________________ .

    (b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $t \in T$ liegt $\lambda * t$ in T:
    Wir fixieren t aus T und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass __________ in ______ liegt. Da t in T liegt, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $t = \alpha * \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.
    Um zu zeigen, dass $\lambda * t$ in T liegt, müssen wir ein $\alpha' \in \mathbb{R}$ finden, sodass $\lambda * t = \alpha' *$ __________ . Nun wissen wir, dass $t = \alpha * \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ ist. Daher gilt $\lambda * t =$ ____________________ .
    Das heißt, dass für $\alpha' =$ ______ gilt: $\lambda * t = \alpha' * \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.
    Daher liegt auch __________ in T.

    (c) Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass T auch die Unterraumeigenschaft (3) erfüllt.

51. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^2$?

    Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind und begründen Sie wie in Aufgabe 50.

    (a) $T_1 = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -12 \end{smallmatrix}\right) + \lambda * \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \}$

    (b) $T_2 = \{ \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda * \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

    Interpretieren Sie die Unterräume/Mengen auch geometrisch.

52. Beweisen Sie, dass der Schnitt zweier Unterräume des $\mathbb{R}^n$ wieder einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ liefert.

53. (a) Liegt $\binom{4}{-2}$ in der linearen Hülle von $\binom{0}{0}$, $\binom{-1}{-2}$, $\binom{2}{4}$?

(b) Liegt $\binom{-1}{5}$ in der linearen Hülle von $\binom{1}{2}$, $\binom{1}{3}$, $\binom{1}{4}$?

(c) Liegt $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

54. (a) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -25 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

(b) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

(c) Finden Sie drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (a, b) linear unabhängig und (a, b, c) linear abhängig sind.

55. Seien $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie: Falls $b_3 \in L(b_1, b_2)$, dann gilt $L(b_1, b_2, b_3) = L(b_1, b_2)$. *Hinweis*: Siehe Satz 4.22 im Vorlesungsskript.

56. Ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Weitere Übungsaufgaben

LVIII. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^4$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind und begründen Sie wie in Aufgabe 50.

(a) $\{(a,a,a,a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \exists\, a,b \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\{(a, 2a, b, a+b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

LIX. Wir betrachten die Menge U aller Vektoren im $\mathbb{R}^5$, die normal auf den Vektor $(1,2,-2,1,3)$ und normal auf den Vektor $(2,1,-3,4,5)$ stehen. Überprüfen Sie, ob diese Menge U die drei Unterraumeigenschaften erfüllt. Finden Sie ein Gleichungssystem der Form $A \cdot x = b$, welches U als Lösungsmenge hat. Lösen Sie dieses mit dem Gauß Algorithmus.

Hinweis: Recherchieren, formulieren und verwenden Sie nützliche Rechenregeln für das Skalarprodukt.

LX. Sei $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Überprüfen Sie, ob diese Menge U die drei Unterraumeigenschaften erfüllt. Finden Sie ein Gleichungssystem der Form $A \cdot x = b$, welches U als Lösungsmenge hat. Lösen Sie dieses mit dem Gauß Algorithmus. Interpretieren Sie die Menge U auch geometrisch.

Hinweis: Recherchieren, formulieren und verwenden Sie nützliche Rechenregeln für das Kreuzprodukt.

LXI. Seien a und b zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), die aufeinander normal stehen.

(a) Zeigen Sie, dass a und b linear unabhängig sind.

(b) Gilt die gleiche Aussage, wenn $a, b \in \mathbb{R}^n$ $(n > 2)$?

LXII. Zeigen Sie, dass die Vereinigung zweier Unterräume des $\mathbb{R}^n$ nicht unbedingt einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ liefert.

LXIII. (a) Liegt $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$?

(b) Liegt $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$?

(c) Liegt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

LXIV. (a) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

(b) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

(c) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

LXV. Die Fibonacci-Folge (Φ_n) ist definiert durch $\Phi_1 = 1, \Phi_2 = 1$ und $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_{n-1}$ für alle $n \geq 3$. Also ist

$$(\Phi_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge F aller Folgen $(a_n) \in \mathbb{R}^\infty$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ erfüllen, ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^\infty$.

(b) Die beiden Folgen in F mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 0$ bzw. mit $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ sind eine Basis von F. Also bilden die Folgen $(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ und $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ eine Basis von F.

(c) F enthält drei Folgen der Form $b_n = B^n$ jeweils für eine bestimmte reelle Zahl B. *Hinweis*: Die Zahlen $B = 1$ oder $B = 2$ sind sicher nicht passend, weil die Folgen $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ bzw. $(2, 4, 8, 16, \ldots)$ keine Elemente von F sind, da $1 + 1 \neq 1$ und $2 + 4 \neq 8$. Die Zahl $B = 0$ ist aber passend. Es gibt noch zwei weitere Möglichkeiten, die passen. Welche?

(d) Zwei Folgen (b_n) und (b'_n) wie in Aufgabe (c) sind ebenfalls eine Basis von F.

(e) Geben Sie eine explizite Form für (Φ_n) in der Form

$$\Phi_n = b \cdot B^n + b' \cdot B'^{\,n},$$

wobei b und b' bestimmte reelle Zahlen sind.