Lineare Algebra I (Sommersemester 2020)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
8. Übungsblatt für den 19.5.2020 und 22.5.2020

57. Vervollständigen Sie die Begründung für folgenden Satz:

    Seien $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ so, dass w in der linearen Hülle von v_1 und v_2 liegt, dann sind (v_1, v_2, w) linear abhängig.

    Da w in der linearen Hülle von v_1 und v_2 liegt, gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

    $$w = \underline{\hspace{6cm}}.$$

    Daher gilt

    $$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \underline{\hspace{6cm}} = 0.$$

    Das ist eine Linearekombination, die 0 ergibt, obwohl nicht jeder Vektor ____________________ mal genommen wurde.
    Daher sind (v_1, v_2, w) ____________________.

58. Beweisen Sie folgenden Satz:

    Seien $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Weiters nehmen wir an, dass (v_1, v_2) linear unabhängig sind. Dann gilt:
    Sind (v_1, v_2, w) linear abhängig, dann liegt w in der linearen Hülle von v_1 und v_2.

59. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und seien $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

    Sind $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig und $\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_m\}$, dann sind auch $(w_1, \ldots, w_k)$ linear unabhängig.

60. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und seien $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

    (a) $(b_1, \ldots, b_m)$ ist linear abhängig.

    (b) Es gibt ein $l \in \{1, \ldots, m\}$, sodass $b_l \in L(b_{l+1}, \ldots, b_m)$.

    Hinweis: l ist der minimale Index mit $\lambda_i \neq 0$.

61. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Sind die Vektoren a, b linear unabhängig, und sind auch die Vektoren b, c linear unabhängig, dann sind auch a, c linear unabhängig.

(b) Sind die Vektoren a, b linear abhängig, und sind auch die Vektoren b, c linear abhängig, dann sind auch a, c linear abhängig.

(c) Sind die Vektoren a, b, c linear abhängig, dann sind auch a, b linear abhängig.

(d) Sind die Vektoren a, b, c linear unabhängig, dann sind auch a, b linear unabhängig.

62. Zeigen Sie folgende Behauptung:

> Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien u, v, w Vektoren im $\mathbb{R}^n$, die alle drei ungleich dem Nullvektor sind. Wir nehmen an, dass $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$. Dann ist (u, v, w) eine Folge linear unabhängiger Vektoren.

Hinweis: Nehmen Sie $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0$ an und zeigen Sie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Berechnen Sie $\langle \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w, u \rangle$ und leiten Sie daraus $\lambda_1 = 0$ ab. Analog zeigen Sie $\lambda_2 = 0$ bzw. $\lambda_3 = 0$.

63. Finden Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 4z = 0\}$,

(b) $L((2, 4, -1))$,

(c) $L((2, 3), (4, 6), (6, 9), (-6, -9))$.

64. Bestimmen Sie eine Basis des Zeilenraumes, des Spaltenraumes und des Nullraumes von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie die Anzahl der Vektoren in den jeweiligen Basen.

Weitere Übungsaufgaben

LXVI. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.

(a) $T_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 0\}$

(b) $T_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^2 = 0\}$

LXVII. Wir betrachten die Menge $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Zeigen Sie, dass M ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

LXVIII. (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $A^2 = 0$ aber $A \neq 0$. Zeigen Sie, dass so eine Matrix nicht invertierbar sein kann. Führen sie einen Widerspruchsbeweis und nehmen Sie an A wäre invertierbar.

(b) Wir verallgemeinern nun. Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $A^k = 0,\ A \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ sei das kleinste k mit dieser Eigenschaft. Zeigen Sie, dass A nicht invertierbar ist.

LXIX. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und seien $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $(b_1, \ldots, b_m)$ ist linear abhängig.

(b) Es gibt ein $j \in \{1, \ldots, m\}$, sodass $b_j \in L(b_1, \ldots, b_{j-1})$.

Hinweis: j ist der maximale Index mit $\lambda_i \neq 0$.

LXX. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und seien $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

Sind $(v_1, \ldots, v_m)$ linear abhängig und $\{w_1, \ldots, w_k\} \supseteq \{v_1, \ldots, v_m\}$, dann sind auch $(w_1, \ldots, w_k)$ linear abhängig.

LXXI. Finden Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume:

(a) $L((2, \sqrt{3}), (4, 5))$,

(b) $L((1, 2, 3, 4, 5), (0, 1, 2, 3, 4), (0, 0, 1, 2, 3), (0, 0, 0, 1, 2), (0, 0, 0, 0, 1))$,

(c) $L((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 0), (3, 4, 0, 0), (4, 0, 0, 0))$,

(d) $L((0, 0, 0))$.

LXXII. Entscheiden Sie, ob folgende Vektoren eine Basis von der angegeben Menge bilden:

(a) $\{(1,2)\}$ von $\mathbb{R}^2$,

(b) $\{(1,2),(3,4)\}$ von $\mathbb{R}^2$,

(c) $\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ von $\mathbb{R}^3$,

(d) $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$ von $\mathbb{R}^3$,

(e) $\{(1)\}$ von $\mathbb{R}$,

(f) $\{(0)\}$ von $\mathbb{R}$,

Begründen Sie Ihre Antwort.

LXXIII. Entscheiden Sie, ob folgende Vektoren eine Basis von der angegeben Menge bilden:

(a) $\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ von $\mathbb{R}^2$,

(b) $\{(1,2),(3,6)\}$ von $\mathbb{R}^2$,

(c) $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,10)\}$ von $\mathbb{R}^3$,

(d) $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(10,11,12)\}$ von $\mathbb{R}^3$,

(e) $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,10),(11,12,13)\}$ von $\mathbb{R}^3$,

(f) $\{(2)\}$ von $\mathbb{R}$.

Begründen Sie Ihre Antwort.