

**O. Univ.Prof.
DI Dr.techn.
Kurt Schlacher**
Institut für
Regelungstechnik und
Prozessautomatisierung

kurt.schlacher@jku.at
T +43 732 2468 6321

Sekretariat:
N. N.
DW 6320
office.regpro@jku.at



Moderne modellbasierte Reglerentwurfsverfahren

Stand WS 2019/20

Inhaltsverzeichnis

1	Optimalsteuerungen	1
1.1	Hilbertraummethoden	2
1.1.1	Anwendungen	4
1.2	Banachraummethoden	8
1.2.1	Lineare Funktionale und der normierte Dualraum	9
1.2.2	Ein Optimierungsproblem und sein duales	10
1.2.3	Anwendungen	12
1.3	Aufgaben	17
2	Lineare Programme	18
2.1	Ein erster Lösungsversuch	19
2.2	Hauptsatz der linearen Programmierung	20
2.3	Dualität	21
2.4	Anwendungen	23
2.5	Aufgaben	26
3	Optimale lineare Systeme	27
3.1	Faktorisierung in FIR (z)	29
3.2	Interne Stabilität des Standardregelkreises	30
3.3	Synthesegleichungen	33
3.4	Polvorgabe	34
3.5	Realisierung mit den Parametern Q und K	36
3.6	Aufgaben	38
4	l_1-optimale lineare Systeme	40
4.1	Beispiele	41
4.2	Aufgaben	45
5	h_2-optimale Systeme	46
5.1	Das Folgeproblem	50
5.2	Der Führungsentwurf	51
5.2.1	Der Sprung als Testfunktion	52

5.3	Der Störentwurf	53
5.3.1	Der Sprung als Testfunktion	53
5.4	Vorgaben des Stabilitätsbereichs	56
5.5	Reglerrealisierung	56
5.6	Aufgaben	58
6	Einfache elektrische Netze	60
6.1	Grundbegriffe der Graphentheorie	62
6.2	Zyklen eines Graphen	63
6.3	Der Baum	65
6.4	Strom und Spannung eines Graphen	67
6.5	Der Satz von Brayton und Moser	72
6.6	Aufgaben	75
7	Mechanische Systeme	77
7.1	Die Lagrangeschen Gleichungen	78
7.2	Symmetrien und Konstanten der Bewegung	80
7.3	Ausgänge, Eingänge und Potenziale	82
7.4	Gleichungsbeschränkungen	85
7.5	Legendretransformation und die Hamiltonschen Gl.	88
7.6	Aufgaben	90

Kapitel 1

Optimalsteuerungen für Lineare Abtastsysteme

In diesem Kapitel werden lineare zeitinvariante Abtastsysteme der Art

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ und geeigneten reellwertigen Matrizen A , B betrachtet. Es wird vorausgesetzt, dass das System vollständig erreichbar ist und somit die Gleichung

$$x(N) = A^N x(0) + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B u(i)$$

für jedes $x(0)$ ab einem gewissen N , (wie groß muss N gewählt werden) lösbar ist.

Eine einfache Klasse von Problemen erhält man, wenn man N , sowie $x(0)$ und $x(N)$ festlegt und zur Gleichung eine Lösung sucht, die den Stellgrößenverlauf gemäß einer Norm minimiert. Von Interesse ist die 1-, 2- und ∞ -Norm, oftmals spricht man auch von energie-, brennstoff- und aufwandsoptimalen Problemen. Im weiteren werden noch Zustandsgrößen- und Stellgrößenbeschränkungen hinzugenommen. Die zugehörigen Optimierungsprobleme können dann mit Hilfe linearer oder quadratischer Programme gelöst werden.

Eine andere Klasse von Problemen erhält man, wenn man optimale zeitinvariante Ausgangsregelungen sucht. Hier beschränken wir uns auf den Eingrößenfall mit Eingang u und Ausgang y , wobei die Regelstrecke durch ihre z -Übertragungsfunktion

$$y_z = P(z) u_z$$

beschrieben wird. Eine Aufgabe, die mit linearen Programmen gelöst werden kann, ist eine Regelung so zu entwerfen, dass der betraglich maximale Regelfehler minimal wird, wobei die betraglich maximale Stellgröße unter einer vorgegebenen Schranke bleibt.

1.1 Hilbertraummethode

Im Folgenden sei X ein finitdimensionaler Vektorraum mit einem Zahlenkörper \mathbb{K} , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.1. Eine Abbildung $X \times X \rightarrow \mathbb{K}$, die je zwei Elementen eines Vektorraumes X ein Element aus \mathbb{K} zuordnet, heißt *inneres Produkt*, wenn sie den Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$

- | | | |
|----|--|--------------|
| 1) | $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ | Bilinearität |
| 2) | $(x, y) = (y, x)^*$ | |
| 3) | $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ | |
| 4) | $(x, x) \geq 0$, und $(x, x) = 0 \iff x = 0$ | |

genügt, wobei mit $()^*$ das konjugiert Komplexe gemeint ist.

Um zu zeigen, dass durch ein inneres Produkt eine spezielle Norm

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

gegeben ist, benötigt man die Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

Satz 1.1. X sei ein Vektorraum mit einem inneren Produkt (x, y) . Dann gilt mit $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ die Ungleichung

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| .$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau im Falle von $x = a y$ oder $y = 0$.

Beweis. Für $y = 0$ muss nichts gezeigt werden. Für $y \neq 0$ beachte man die für alle $a \in \mathbb{K}$ gültige Ungleichung

$$0 \leq (x - a y, x - a y) = (x, x) - a (y, x) - a^* (x, y) + |a|^2 (y, y) .$$

Für

$$a = \frac{(x, y)}{(y, y)}$$

folgt daraus

$$0 \leq (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}$$

oder

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x) (y, y)} = \|x\| \|y\| .$$

Wegen der Cauchy-Schwarzen Ungleichung folgt dann die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (x, y)^* \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 + (x, y) + (x, y)^* - 2\|x\|\|y\| \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Gilt noch $(x, y) = 0$, dann erhält man sofort den Satz von Pythagoras. Anstelle von $(x, y) = 0$ schreibt man oft $x \perp y$. Ebenso einfach zeigt man die Parallelogrammregel

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Da X ein finitdimensionaler Vektorraum ist, ist er vollständig und mit obigen inneren Produkt und der daraus abgeleiteten Norm bildet er einen Hilbertraum. Nun sei U ein Unterraum eines Hilbertraums X , dann ist das Komplement $X = U \oplus U_C$ mit $U \perp U_C$ wohlbestimmt und man schreibt $U_C = U^\perp$. Man beachte, dass hier Unterräume immer abgeschlossen sind.

In einem finitdimensionalen Hilbertraum gilt eine vereinfachte Version des Projektionstheorems, das für Abtastsysteme in vielen Fällen ausreichend ist.

Satz 1.2. X sei ein Hilbertraum und $M \subseteq X$ ein linearer Unterraum. Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein Punkt $m_0 \in M$ so, dass gilt $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ für alle $m \in M$. Weiters genügt m_0 der Beziehung $(x - m_0) \in M^\perp$.

Beweis. Man beachte die eindeutige Zerlegung $x = (x - m_0) + m_0$ mit $(x - m_0) \in M^\perp$. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$$\begin{aligned}\|x - m\|^2 &= \|x - m_0 + m_0 - m\|^2 \\ &= \|x - m_0\|^2 + \|m_0 - m\|^2\end{aligned}$$

folgt, dass jeder andere Punkt m einen größeren Abstand hat. ■

Das Projektionstheorem zeigt die Existenz eines Punktes $m_0 \in M$ mit kleinstem Abstand zu einem Punkt x . Eine triviale Modifikation erhält man, wenn man den Unterraum verschiebt und einen Punkt mit kürzestem Abstand zum Ursprung sucht.

Lemma 1.1. M sei ein Unterraum eines Hilbertraums X . Zur linearen Varietät $V = x + M$ mit gewähltem $x \in X$ existiert genau ein $x_0 \in V$ minimaler Norm, und es gilt $x_0 \perp M$.

Die Kodimension eines Unterraums oder einer Varietät bezeichnet die Anzahl der zur Beschreibung des Unterraums, der Varietät benötigten Gleichungen.

Beweis. Da die Varietät $V = x + M \subseteq X$ mit gewähltem $x \in X$ hier immer finite Kodimension hat, kann sie durch n Gleichungen $(x, y_i) = c_i$, $i = 1, \dots, n$ dargestellt werden. Für das Element $x_0 \in V$ mit $\|x_0\| < \|x\|$ für alle $x \in V$, $x \neq x_0$ gilt

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$$

und es folgt

$$\sum_{j=1}^n (y_j, y_i) \alpha_j = c_i.$$

■

1.1.1 Anwendungen

Zu den einfachsten Aufgaben gehören Approximationsprobleme, bei denen der kleinste Abstand eines Punktes $x \in X$ in einem Hilbertraum zu einem Unterraum $M = \text{span}(\{y_1, \dots, y_n\})$ gesucht wird. Die Aufgabe lautet nun

$$\min_{\alpha_i \in \mathbb{K}} \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right\|$$

und aus

$$\left(x - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i, y_j \right) = 0$$

folgt

$$\sum_{i=1}^n G_{ij} \alpha_i = (x, y_j)$$

mit der Gramschen Matrix G mit $G_{ij} = (y_i, y_j)$. Man überzeugt sich einfach, dass G genau dann regulär ist, wenn $B = \{y_1, \dots, y_n\}$ eine Basis von M ist. In speziellen Basen ist das Lösen obigen Gleichungssystems besonders einfach. Gilt

$$(y_i, y_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ a > 0, & i = j \end{cases}$$

nennt man B eine orthogonale und für $a_i = 1$ eine orthonormale Basis. Im letzteren Fall schreibt man $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ und es gilt

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

für die Lösung des Approximationsproblems.

Nun betrachte man die Aufgabe

$$\begin{aligned} \min x^T Q x \\ Ax = b \end{aligned}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit $n > m$ einer positiv definiten Matrix Q und einer Matrix A mit maximalem Rang. Man beachte, dass

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i Q_{ij} y_j$$

ein inneres Produkt ist. Mit $\bar{A} = A Q^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned} \min \|x\| \\ (\bar{a}^j, x) = b_j, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

wobei \bar{a}^j die j -te Spalte von \bar{A}^T bezeichnet. Die optimale Lösung erfüllt

$$x_0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{a}^j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

und man erhält mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (\bar{a}^j, \bar{a}^i) = b_j, \quad i, j = 1, \dots, m$$

die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten λ_i .

Als einfache regelungstechnische Anwendung betrachte man das vollständig erreichbare System

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k \tag{1.1}$$

n -ter Ordnung mit einer Eingangsgröße und Anfangswert mit $x(0) = 0$. Es soll eine Steuerfolge so entworfen werden, dass $x(N) = x_N$ gilt und die Norm

$$\|u\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2$$

minimiert wird. Aus

$$x_N = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} b u(i) \tag{1.2}$$

erkennt man, dass man ein Element $u_0 \in l_2^1([0, N-1])$ minimaler Norm sucht, welches in der durch Gleichung (1.2) gegebenen Varietät mit Kodimension n liegt. Nun folgt

$$u_0(i) = b^T (A^T)^{N-i-1} \alpha.$$

Verbleibt $\alpha \in \mathbb{R}^n$ so zu bestimmen, dass obige Gleichungen erfüllt sind. Es folgt

$$x_N = \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} b b^T (A^T)^{N-i-1}}_K \alpha$$

$$\alpha = K^{-1} x_N$$

und damit

$$u_0(i) = b^T (A^T)^{N-i-1} K^{-1} x_N .$$

Man überzeugt sich leicht, dass noch gilt

$$x_N = \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} b b^T (A^T)^{N-i-1}}_K K^{-1} x_N$$

$$= x_N .$$

Die Existenz von K^{-1} sichert die vollständige Erreichbarkeit des Systems. Ist diese nicht gegeben, dann muss untersucht werden, ob der Endwert x_N prinzipiell erreicht werden kann. Weiters folgt noch

$$\|u_0\|^2 = x_N^T K^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} b b^T (A^T)^{N-i-1} K^{-1} x_N$$

$$= x_N K^{-1} x_N .$$

Man kann noch das Problem lösen

$$\max_{\|u\| \leq 1} x_N^T Q x_N , \quad Q > 0$$

das äquivalent zum Problem

$$\max_{x_N} x_N^T Q x_N \quad , \quad x_N^T B x_N \leq 1 , \quad B = K^{-1}$$

ist. Mit $\bar{x} = L x_N$, $L^T L = B$ vereinfacht sich die Aufgabe zu

$$\max_{\bar{x}} \bar{x}^T \underbrace{L^{-T} Q L^{-1}}_M \bar{x} \quad , \quad \bar{x}^T \bar{x} \leq 1 .$$

Nun existiert eine orthonormale Basis (e_i) so, dass gilt

$$e_i^T M e_i = \sigma_i^2 .$$

Mit $\bar{x} = \sum_{i=1}^n e_i \lambda_i$ vereinfacht sich die Aufgabe nochmals zu

$$\max_{\lambda_i} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \lambda_i^2 , \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq 1 .$$

Gilt $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ für $i \neq j$, dann ist die Lösung der Aufgabe sehr einfach¹. Es gelte $\sigma_k^2 > \sigma_i^2$ für $k \neq i$, dann folgt sofort eine Lösung zu $\lambda_i = 0$, $k \neq i$ und $\lambda_k = 1$. Weiters gilt die Abschätzung

$$\|x_N\| \leq \sigma_k \|u\| .$$

Abschließend soll noch ein Rückblick auf das LQR für zeitdiskrete Systeme geworfen werden. Zu dem Gütefunktional

$$J_{x_0}((u(0), \dots, u(N))) = \frac{1}{2} x^T(N+1) S x(N+1) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (x^T(i) Q x(i) + u^T(i) R u(i))$$

betrachte man die Vorwärtsdifferenz

$$\Delta \frac{1}{2} x_k^T P_k x_k = \frac{1}{2} x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} - \frac{1}{2} x_k^T P_k x_k$$

mit

$$\sum_{i=0}^N \Delta \frac{1}{2} x^T(i) P(i) x(i) = \frac{1}{2} x^T(N+1) P(N+1) x(N+1) - \frac{1}{2} x^T(0) P(0) x(0) .$$

Wählt man $P(N+1) = S$ folgt

$$J_{x_0} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (x^T(i) Q x(i) + u^T(i) R u(i) + \Delta x^T(i) P(i) x(i)) + \frac{1}{2} x^T(0) P(0) x(0) .$$

Die einfache Umformung mittels quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned} & x^T(i) Q x(i) + u^T(i) R u(i) + \Delta x^T(i) P(i) x(i) \\ &= x^T(i) Q x(i) + u^T(i) R u(i) - x^T(i) P(i) x(i) \\ &\quad + (Ax(i) + Bu(i))^T P(i+1) (Ax(i) + Bu(i)) \\ &= x^T(i) (Qx(i) - P(i) + A^T P(i+1) A) x(i) \\ &\quad + u^T(i) (R + B^T P(i+1) B) u(i) \\ &\quad + x^T(i) A^T P(i+1) B u(i) + u^T(i) B^T P(i+1) A x(i) \\ &= x^T(i) (Q - P(i) + A^T P(i+1) A - A^T P(i+1) B Z^{-1}(i) B^T P(i+1) A) x(i) \\ &\quad + (u^T(i) + x^T(i) A^T P(i+1) B Z^{-1}(i)) Z(i) (u(i) + Z^{-1}(i) B^T P(i+1) A x(i)) \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$Z(i) = (R + B^T P(i+1) B)$$

führt auf

$$\begin{aligned} J_{x_0}((u(0), \dots, u(N))) &= \frac{1}{2} x^T(0) P(0) x(0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (u^T(i) + x^T(i) A^T P(i+1) B Z^{-1}(i)) Z(i) (u(i) + Z^{-1}(i) B^T P(i+1) A x(i)) , \end{aligned}$$

¹Die Größen $\sigma_i \geq 0$ werden auch aus Singulärwerte bezeichnet.

sofern die Differenzgleichung

$$P(i) = Q + A^T P(i+1) A - A^T P(i+1) B (R + B^T P(i+1) B)^{-1} B P(i+1) A$$

erfüllt wird. Gilt noch $Z(i) > 0$, dann erzeugt $\sum_{i=0}^N u(i) Z(i) v(i) = (u, v)$ ein inneres Produkt und damit eine Norm $\|u\|^2 = (u, u)$. Es gilt also

$$J_{x_0}((u(0), \dots, u(N))) = \frac{1}{2} \left\| u + (R + B^T P B)^{-1} B P A x \right\|^2 + \frac{1}{2} x^T(0) P(0) x(0),$$

wobei das Minimum für

$$u_0(i) = - (R + B^T P(i+1) B)^{-1} B P(i+1) A x(i)$$

angenommen wird. Man überzeugt sich leicht, dass diese Lösung das globale Minimum ist.

1.2 Banachraummethoden

Die Betrachtungen in Hilberträumen wurde durch die Existenz des inneren Produktes wesentlich vereinfacht. In Banachräumen existiert nun dieses innere Produkt nicht mehr. An seine Stelle treten die Beziehungen zwischen dem normierten Vektorraum und seinem Dualraum. Die Konstruktion des Dualraumes folgt nun im Wesentlichen den Ideen der linearen Algebra, die hier kurz wiederholt werden.

Es seien V und W Vektorräume mit gleichen Skalaren \mathbb{K} und Dimensionen m und n . Man überzeugt sich leicht, dass die Menge $L(V, W)$ aller linearen Abbildungen $T : V \rightarrow W$ wieder ein Vektorraum mit Skalaren \mathbb{K} und der Dimension $m \cdot n$ ist. Den Sonderfall $L(V, W) = L(V, \mathbb{K})$ bezeichnet man als Dualraum V^* . Es gelte $x^* \in V^*$ und $x \in V$, dann folgt $x^*(x) \in \mathbb{K}$. Man überzeugt sich leicht, dass $(V^*)^* = V$ gilt, was die Schreibweise $x(x^*) \in \mathbb{K}$ rechtfertigt. Um diese Symmetrie hervorzuheben, wird auch $\langle x^*, x \rangle$ für die bilineare Abbildung $V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}$ geschrieben. Diese Abbildung ist strikt vom inneren Produkt (y, x) mit $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ zu unterscheiden. Es sei $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis von V , dann wird $B^* = \{b_1^*, \dots, b_m^*\}$ als kanonische duale Basis bezeichnet, wenn

$$\langle b_i^*, b_j \rangle = \delta_{ij}$$

mit dem Kronecker Delta δ gilt. Für solche Basen folgt dann mit $x^* = \sum_{i=1}^m x_i^* b_i^*$, $x = \sum_{i=1}^m x_i b_i$ die bekannte Schreibweise

$$\langle x^*, x \rangle = \begin{bmatrix} x_1^* & \cdots & x_m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Es sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, dann bezeichnet die Abbildung $T^* : W^* \rightarrow V^*$ mit

$$\langle w^*, Tv \rangle = \langle T^*w^*, v \rangle$$

und $v \in V$, $v^* = T^*w^* \in V^*$, $w = Tv \in W$, $w^* \in W^*$ die zu T adjungierte Abbildung. Nun gelte $U \subseteq V$, dann bezeichnet $U^\perp \subseteq V^*$ den Unterraum mit $\langle u^\perp, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$ und $u^\perp \in U^\perp$.

Man betrachte die Abbildung $Q : V \rightarrow V^*$ mit $\text{im}(Q) = V^*$, dann gibt es zu jedem $y^* \in V^*$ genau ein $y \in V$ mit $y^* = Qy$. Man erhält folglich mit $\langle Qy, x \rangle$ eine bilineare Abbildung $(\cdot, \cdot)_Q : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Wegen $Q^* : (V^*)^* \rightarrow V^*$ und $(V^*)^* = V$ macht die Bedingung $Q = Q^*$ Sinn. In diesem Fall wird die bilineare Abbildung symmetrisch. Ist sie noch positiv definit, es gilt $\langle Qx, x \rangle \geq 0$, und wegen $\langle Qx, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ erhält man ein inneres Produkt. In kanonischen Basen muss dann die Matrix Q positiv definit sein. Mit der Wahl $Q = I$ erhält man das Standardinnenprodukt und es gilt $V = V^*$.

1.2.1 Lineare Funktionale und der normierte Dualraum

Auch hier sei X ein finitdimensionaler Vektorraum mit einem Zahlenkörper \mathbb{K} , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Damit ist X abgeschlossen und somit ein Banachraum. Die Menge aller linearen Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ bilden den Dualraum X^* . Man beachte, dass hier die Funktionale immer beschränkt sind, es gibt also immer ein $M \in \mathbb{R}$ so, dass

$$|f(x)| \leq M\|x\|$$

gilt.

Definition 1.2. Es gelte $f \in X^*$ mit einem normierten Raum X . Die kleinste obere Schranke M , für die diese Abschätzung gilt oder

$$\|f\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \max_{0 \neq x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

heißt die Norm von f .

Der Nachweis, dass durch diese Definition eine Norm gegeben ist, ist sehr einfach, siehe dazu den Abschnitt Aufgaben.

Definition 1.3. Es sei X ein normierter Raum. Der Raum X^* aller beschränkten linearen Funktionale auf X heißt der zu X normierte Dualraum. Die Norm für ein Element $f \in X^*$ ist gegeben durch

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \max_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Im Weiteren werden Elemente von X^* auch wieder mit x^* bezeichnet und die Schreibweisen $x^*(x) = \langle x^*, x \rangle$ verwendet. Da X^* finitdimensional ist, ist X^* ein Banachraum.

Nun soll untersucht werden, wodurch sich ein Hilbertraum H von allgemeineren normierten Räumen unterscheidet. Wegen des inneren Produktes ist H mit der natürlichen Klasse linearer Funktionale $f_y(x) = (y, x)$ ausgestattet. Da H^* alle möglichen linearen Funktionale beinhaltet, gibt es ein $y^* \in H^*$ so, dass $(y, x) = \langle y^*, x \rangle$ für alle $x \in H$ gilt. Man überzeugt sich leicht, dass die Abbildung $H \rightarrow H^*$ injektiv und surjektiv ist, womit $H^* \cong H$ gilt.

Lineare Funktionale müssen nicht auf dem ganzen Raum X definiert sein. Sind sie nur auf einem Unterraum $U \subseteq X$ definiert, dann kann man sie auf einen größeren erweitern.

Definition 1.4. Gegeben sei ein lineares Funktional f auf einem Unterraum U eines Vektorraumes X . Ein lineares Funktional F definiert auf einem Unterraum V mit $U \subset V$ heißt Erweiterung von f auf V , wenn $f = F$ auf U gilt.

Von Interesse sind nun Erweiterungen auf dem gesamten Raum.

Satz 1.3. f sei ein lineares Funktional auf einem Unterraum U eines normierten Raumes X . Dann gibt es eine Erweiterung $F \in X^*$ so, dass $\|f\| = \|F\|$.

Beweis. Man wähle zu U ein Komplement U_c mit $X = U \oplus U_c$. Dann gibt es $\dim(U) = n_U$ linear unabhängige Funktionale $F_i \in U_c^\perp$. Mit Hilfe der Lösung des Gleichungssystems

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{n_U} \alpha_i F_i(u_j) \quad , \quad j = 1, \dots, n_U$$

mit einer Basis $\{u_1, \dots, u_{n_U}\}$ von U erhält man dann eine gewünschte Erweiterung $F = \sum_{i=1}^{n_U} \alpha_i F_i$. ■

In einem Hilbertraum kann man wegen der Cauchy-Schwarzen Ungleichung den Begriff der Parallelität zweier Elemente einführen, dies ist hier nicht mehr möglich, aber es gibt nachfolgende Erweiterung:

Definition 1.5. Es sei X ein normierter Raum und X^* sein Dualraum. Die Elemente $x \in X$, $x^* \in X^*$ heißen ausgerichtet, wenn gilt

$$\langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\| \quad .$$

1.2.2 Ein Optimierungsproblem und sein duales

Nun wird das Problem behandelt, zu einem Punkt x ein Element eines Unterraumes M so zu bestimmen, dass der Abstand in der gegebenen Norm minimal wird. In Hilberträumen wird

dieses Problem mit Hilfe des Projektionstheorems gelöst. Die die Lösung bestimmenden Gleichungen sind linear, und ihre Lösung ist, falls sie existiert, eindeutig. Leider werden diese Eigenschaften auf die Verallgemeinerung nicht mehr zutreffen. Dennoch wird es gelingen, bemerkenswerte Analogien herzustellen. Das nachfolgende Theorem ist nicht nur eine Erweiterung des Projektionstheorems, es führt auch auf einfache Weise auf ein neues Dualitätsprinzip.

Satz 1.4. Es gelte $x \in X$ für einen normierten Raum X mit einem Unterraum M . Dann gilt

$$d = \min_{m \in M} \|x - m\| = \max_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in M^\perp}} \langle x^*, x \rangle ,$$

wobei das Maximum für ein $x^* \in M^\perp$ erreicht wird und $x - m_0$ und x_0^* ausgerichtet sind.

Beweis. Zum Beweis beachte man, dass aus

$$\langle x^*, x \rangle = \langle x^*, x - m \rangle \leq \|x - m\|$$

die Ungleichung

$$\langle x^*, x \rangle \leq \min_{m \in M} \|x - m\| = d$$

folgt. Nun möchte man noch ein x^* mit $\langle x^*, x \rangle = d$ finden. Dazu betrachte man den Unterraum $W = \text{span}(\{x\}) \oplus M$, mit einem typischen Element $w = \alpha x + m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und wähle das lineare Funktional f auf W mit $f(w) = \alpha d$. Wegen

$$\|f\| = \max_{w \in W} \frac{|f(w)|}{\|w\|} = \max_{w \in W} \frac{|\alpha| d}{\|w\|} = \frac{d}{\min_{m \in M} \left\| x + \frac{m}{\alpha} \right\|} = 1$$

hat man ein geeignetes Funktional f auf W gefunden, dass zu einem x_0^* auf X erweiterbar ist. Es gilt also $\|x_0^*\| = 1$, $x_0^* = f$ auf W sowie $x_0^* \in M^\perp$ und $\langle x_0^*, x \rangle = d$. ■

Voriger Satz zeigt also die Äquivalenz zweier Optimierungsprobleme. Da nun in vielen Räumen die Eigenschaft der Ausgerichtetheit einfach charakterisiert werden kann, führt die Lösung des einen Problems direkt zur Lösung des anderen. Daher finden Dualitätseigenschaften dieser Art viele Anwendungen.

Der vorige Satz zeigt die Existenz einen Punktes $m_0 \in M$ mit kleinstem Abstand zu einem Punkt x . Eine triviale Modifikation erhält man, wenn man den Unterraum verschiebt und einen Punkt mit kürzestem Abstand zum Ursprung sucht.

Lemma 1.2. M sei ein Unterraum eines normierten Raums X . Zur linearen Varietät $V = x + M$ mit gewähltem $x \in X$ existiert ein $x_0 \in V$ minimaler Norm, und es gilt, zum optimalen Punkt x_0 gibt es ein ausgerichtetes $x_0^* \in M^*$.

Beweis. Da $V = x + M \subseteq X$ mit gewähltem $x \in X$ hier immer finite Kodimension hat, kann sie durch n Gleichungen $\langle y_i^*, x \rangle = c_i \in \mathbb{R}$, $y_i^* \in M^*$ und $i = 1, \dots, n$ dargestellt werden. Es sei \bar{x} eine Lösung dieser Gleichungen, dann lautet die Aufgabe

$$d = \min_{\langle y_i^*, x \rangle = c_i} \|x\| = \min_{m \in (M^*)^\perp} \|\bar{x} - m\|$$

mit $M^* = \text{span}(\{y_1^*, \dots, y_n^*\})$. Dann folgt wegen des Satzes 1.4

$$d = \min_{m \in (M^*)^\perp} \|\bar{x} - m\| = \max_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in M^*}} \langle x^*, \bar{x} \rangle,$$

und mit $x^* = \sum_{i=1}^n a_i y_i^*$, $a_i \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$d = \min_{\langle y_i^*, x \rangle = c_i} \|x\| = \max_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{i=1}^n c_i a_i.$$

■

1.2.3 Anwendungen

Als einfache regelungstechnische Anwendung betrachte man wieder das vollständig erreichbare System

$$x_{k+1} = Ax_k + bu \tag{1.3}$$

n -ter Ordnung mit einer Eingangsgröße und dem Anfangswert $x(0) = 0$. Es soll eine Steuerfolge so entworfen werden, dass $x(N) = x_N$ gilt und die Norm

$$\|u\|_\infty = \max_{i=0, \dots, N-1} |u_i|$$

minimiert wird. Aus

$$x_N = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} bu(i) \tag{1.4}$$

erkennt man, dass man ein Element $u_0 \in l_\infty^1([0, N-1])$ minimaler Norm sucht, welches in der Gleichung (1.4) gegebenen Varietät mit Kodimension n liegt. Der zu $l_\infty^1([0, N-1])$

duale Raum hat nun die Norm $u^* \in l_1^1([0, N-1])$, $\|u^*\| = \sum_{i=0}^{N-1} |u_i^*|$ siehe Definition 1.3. Nun gilt

$$\begin{aligned} x_N &= \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} b u(i) \\ x_{j,N} &= \langle \alpha_j, u \rangle \\ \alpha_j(i) &= \left(A^{N-i-1} b \right)_j . \end{aligned}$$

Gemäß Lemma 1.2 besteht die Beziehung

$$\min \|u\|_\infty = \max_{\left\| \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j \right\| \leq 1} a^T x_N$$

mit

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j \right\| = \sum_{i=0}^{N-1} \left| \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j(i) \right| ,$$

und man erhält eine n -dimensionale Optimierungsaufgabe in a . Da nun die optimale Stellgröße die Bedingung der Ausgerichtetheit erfüllt, folgt noch

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j(i) u(i) = u_{\max} = \min \|u\|_\infty$$

oder

$$u(i) = u_{\max} \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=1}^n a_j \alpha_j(i) \right) .$$

Man nennt diesen Typ von Steuerung auch „bang-bang control“. Weiters beachte man, dass $|u(i)| \leq u_{\max}$ gewählt werden kann, falls $\sum_{j=1}^n a_j \alpha_j(i) = 0$ gilt. Damit gewinnt man noch Freiheiten um die Endbedingung zu erfüllen.

Als nächstes wird das Beispiel

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u \quad (1.5)$$

betrachtet. Mit $T > 0$, $x_{1,N} = 1$, $x_{2,N} = 0$ gilt

$$\begin{aligned} 1 = x_{1,N} &= \langle \alpha_1, u \rangle \\ 0 = x_{2,N} &= \langle \alpha_2, u \rangle \end{aligned}$$

und man erhält die Aufgabe

$$\begin{aligned} \min \|u\|_\infty &= \max_{\|a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2\| \leq 1} a_1 \\ s(i) &= a_1 \alpha_1(i) + a_2 \alpha_2(i) \\ &= \left(\left(N - i - \frac{1}{2} \right) T a_1 + a_2 \right) T \\ \|s\| &= \sum_{i=0}^{N-1} |s(i)| . \end{aligned}$$

Um a_1 zu maximieren, nehmen wir an, dass die Folge $s(i)$, $i = 0, \dots, N-1$ einen Vorzeichenwechsel hat. Das Maximum von a_1 wird erreicht, wenn $s(0) + s(N-1) = 0$ oder

$$a_2 = -\frac{TN}{2}a_1$$

gilt. Im Weiteren sei N ungerade und damit gilt $s\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$. Im Weiteren angenommen. Es gilt noch

$$\|s\| = a_1 T^2 \frac{N^2 - 1}{4}$$

sowie

$$u_{\max} = a_1 = \frac{4}{T^2(N^2 - 1)}, \quad a_2 = -\frac{2N}{T(N^2 - 1)}.$$

Wie zu erwarten, nimmt u_{\max} mit zunehmendem N ab. Weiters folgt noch $u(i) = u_{\max}$ für $i = 0, \dots, \frac{N-1}{2} - 1$, $u(i) = -u_{\max}$ für $i = \frac{N-1}{2} + 1, \dots, N-1$, und $\left|u\left(\frac{N-1}{2}\right)\right| \leq u_{\max}$.

Für die zweite Nebenbedingung folgt dann

$$\langle \alpha_2, u \rangle = Tu\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

oder $u\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$. Damit ist auch die erste Nebenbedingung erfüllt, denn es gilt

$$\langle \alpha_1, u \rangle = \frac{T^2(N^2 - 1)}{4} u_{\max} = 1.$$

Nun wird wieder die Strecke (1.3) zusammen mit der Varietät (1.4) betrachtet, aber anstelle der Norm $\|\cdot\|_{\infty}$ wird

$$\|u\|_1 = \sum_{i=0}^{N-1} |u_i|$$

gewählt. Man sucht ein optimales $u_0 \in l_1^1([0, N-1])$ mit dem zugehörigen Dualraum $l_{\infty}^1([0, N-1])$, siehe Definition 1.3. Gemäß Lemma 1.2 gilt

$$\min \|u\|_1 = \max_{\left\| \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j \right\| \leq 1} a^T x_N$$

mit

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j \right\| = \max_{i=0, \dots, N-1} \left| \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j(i) \right|,$$

und man erhält eine n -dimensionale Optimierungsaufgabe in a . Da nun die optimale Stellgröße die Bedingung der Ausgerichtetheit erfüllt, folgt noch

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j(i) u(i) = u_{\max} = \min \|u\|_1$$

oder

$$u(i) = 0 \quad \text{für} \quad \left| \sum_{j=1}^n a_j \alpha_j(i) \right| < 1 .$$

Mit Hilfe der verbleibenden Stellgrößen lassen sich dann die Randbedingungen erfüllen.

Wieder soll das einfache Beispiel zweiter Ordnung (1.5) jetzt mit dem Gütemaß $\|u\|_1$ behandelt werden. Gemäß obiger Ausführungen erhält man die Aufgabe

$$\begin{aligned} \min \|u\|_1 &= \max_{\|a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2\| \leq 1} a_1 . \\ s(i) &= a_1 \alpha_1(i) + a_2 \alpha_2(i) \\ &= \left(\left(N - i - \frac{1}{2} \right) T a_1 + a_2 \right) T \\ \|s\| &= \max_{i=0, \dots, N-1} |s(i)| . \end{aligned}$$

Um a_1 zu maximieren, nehmen wir wieder an, dass die Folge $s(i)$, $i = 0, \dots, N-1$ einen Vorzeichenwechsel hat. Das Maximum von a_1 wird erreicht, wenn $s(0) + s(N-1) = 0$ oder

$$a_2 = -\frac{TN}{2} a_1$$

gilt. Es gilt noch

$$\|s\| = a_1 T^2 \frac{N-1}{2}$$

sowie

$$u_{\max} = a_1 = \frac{2}{T^2(N-1)} , \quad a_2 = -\frac{N}{T(N-1)} .$$

Da außer $u(0)$ und $u(N-1)$ alle Stellgrößen verschwinden, folgt mit

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, u \rangle &= T^2 \left(N - \frac{1}{2} \right) u(0) + \frac{1}{2} T^2 u(N-1) = 1 \\ \langle \alpha_2, u \rangle &= Tu(0) + Tu(N-1) = 0 \end{aligned}$$

noch die Steuerung

$$u(0) = \frac{1}{T^2(N-1)} = -u(N-1) .$$

Auch nimmt der Stellaufwand mit wachsendem N ab.

Literatur

Der Inhalt dieses Kapitels basiert im Wesentlichen auf dem Buch [6]. Dort werden zeitkontinuierliche Systeme behandelt und es treten infinitdimensionale Vektorräume in den Optimierungsproblemen auf. Dadurch wird der mathematische Aufwand deutlich höher,

da die Existenz von Lösungen vielfach extra nachgewiesen werden muss. Dieses Problem entfällt in finiten Räumen. Es soll aber betont werden, dass dieses Buch auch eine exzellente Einführung in infinitdimensionale Optimierungsprobleme und in die dazu notwendigen mathematischen Grundlagen ist.

1.3 Aufgaben

Aufgabe 1.1. Schreiben Sie zum Problem mit der Strecke (1.1), der Varietät (1.2) ein Programm, dass die Lösung numerisch bestimmt. Schätzen Sie den Bereich von x_N ab, den Sie mit gegebenem $u_{\max} = \|u\|_2$ erreichen können.

Aufgabe 1.2. Erweitern Sie die vorige Aufgabe auf den Mehrgrößenfall. Leiten Sie dazu zuerst die allgemeine Lösung her.

Aufgabe 1.3. Schreiben Sie zum Problem mit der Strecke (1.3), der Varietät (1.4) und der Norm $u_{\max} = \|u\|_\infty$ ein Programm, dass die Lösung des dualen Problems numerisch bestimmt. Hinweis: Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.

Aufgabe 1.4. Schreiben Sie zum Problem mit der Strecke (1.3), der Varietät (1.4) und der Norm $u_{\max} = \|u\|_1$ ein Programm, dass die Lösung des dualen Problems numerisch bestimmt. Hinweis: Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.

Aufgabe 1.5. Erweitern Sie die Aufgabe 1.3 auf den Mehrgrößenfall.

Aufgabe 1.6. Erweitern Sie die Aufgabe 1.4 auf den Mehrgrößenfall.

Kapitel 2

Lineare Programme

Im Weiteren werden lineare Optimierungsprobleme der Art

$$\begin{array}{ll} \min_x & cx \\ Ax & \geq b \\ x & \geq 0 \end{array} \quad (2.1)$$

oder

$$\begin{array}{ll} \min_x & cx \\ Ax & = b \\ x & \geq 0 \end{array} \quad (2.2)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in (\mathbb{R}^n)^*$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ betrachtet, wobei hier und im Folgenden für (2.2) vorausgesetzt wird, dass $\text{rank}(A) = m$, $b \neq 0$ und $n - m > 0$ gilt. Die Ungleichungen gelten hier komponentenweise. Man überzeugt sich leicht, dass beide Probleme zueinander äquivalent sind, denn die i -te Ungleichung kann mit einer Hilfsvariablen h_i immer in eine Gleichung übergeführt werden. Es gilt

$$a^i x \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad a^i x - h_i = b_i, \quad h_i \geq 0,$$

wobei a^i die i -te Zeile von A bezeichnet. Auch ist die Bedingung $x_i \geq 0$ keine Einschränkung, wie die Beziehung $x_i = x_i^+ - x_i^-$ mit $x_i^+, x_i^- \geq 0$ zeigt. Man überzeugt sich auch leicht von der Äquivalenz von

$$\begin{aligned} \max_i (|x_1|, \dots, |x_i|, \dots, |x_N|) &= \min_{h^+, h^-, \varepsilon} \varepsilon \\ x_i + h_i^+ &= \varepsilon \\ -x_i + h_i^- &= \varepsilon \end{aligned}$$

mit $h^+, h^- \geq 0$ und

$$\sum_{i=1}^N |x_i| = \min_{x^+, x^-} \sum_{i=1}^N x_i^+ + x_i^- \\ x_i = x_i^+ - x_i^-$$

mit $x^+, x^- \geq 0$.

2.1 Ein erster Lösungsversuch

Es seien $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_m$ und $\beta = \beta_{m+1}, \dots, \beta_n$ zwei Folgen mit der Eigenschaft $\{\alpha, \beta\} = \{1, \dots, n\}$. Nun betrachte man das Gleichungssystem in den drei Darstellungen

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \sum_{i=1}^m a_{\alpha_i} x_{\alpha_i} + \sum_{i=m+1}^n a_{\beta_i} x_{\beta_i} &= b \\ A_\alpha x_\alpha + A_\beta x_\beta &= b. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Es gelte $\text{span}(\{a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_m}\}) = \mathbb{R}^m$, also die Spalten von A_α sind eine Basis des \mathbb{R}^m . Weiters habe (2.3) eine Lösung mit $x_\alpha \geq 0$, $x_\beta = 0$. Nun betrachte man das Gütefunktional

$$\begin{aligned} cx &= \sum_{i=1}^m c_{\alpha_i} x_{\alpha_i} + \sum_{i=m+1}^n c_{\beta_i} x_{\beta_i} \\ &= c_\alpha x_\alpha + c_\beta x_\beta \\ &= c_\alpha A_\alpha^{-1} b + (c_\beta - c_\alpha A_\alpha^{-1} A_\beta) x_\beta, \end{aligned} \tag{2.4}$$

das den Wert $c_\alpha A_\alpha^{-1} b$ für $x_\beta = 0$ annimmt. Ist einer der Koeffizienten \bar{c}_{β_k} von $\bar{c} = c_\beta - c_\alpha A_\alpha^{-1} A_\beta$ negativ, dann kann man das Gütefunktional verkleinern, wobei die Gleichung

$$x_\alpha + A_\alpha^{-1} a_{\beta_k} x_{\beta_k} = A_\alpha^{-1} b$$

mit $x_\alpha \geq 0$, $x_{\beta_k} \geq 0$ erfüllt werden muss. Fürs Erste gelte, $A_\alpha^{-1} b > 0$, dann kann man zwei Fälle unterscheiden. Dieses Gleichungssystem hat eine Lösung so, dass für mindestens ein $x_{\alpha_l} = 0$ gilt. Dann hat man eine neue Lösung mit Basis $\{a_{\alpha_1}, \dots, \hat{a}_{\alpha_l}, \dots, a_{\alpha_m}\}$, $\hat{a}_{\alpha_l} = a_{\beta_k}$ so gefunden, dass das Gütefunktional (2.4) abgenommen hat. Existiert so eine Lösung nicht, dann kann man x_{β_k} beliebig groß machen und das Gütefunktional wird beliebig klein. Gilt nur $A_\alpha^{-1} b \geq 0$ und z.B. $(A_\alpha^{-1} b)_{\alpha_l} = 0$, dann muss $(A_\alpha^{-1} a_{\beta_k})_{\alpha_l} \leq 0$ gelten, um eine Verbesserung zu erzielen. Ist dies für alle in Frage kommenden α_l erfüllt, dann kann man mit den vorigen Untersuchungen fortfahren, andernfalls gilt $x_{\beta_k} = 0$. Damit hat man aber ein Verfahren konstruiert, wie man schrittweise das Gütefunktional verkleinern kann, bis keine Verbesserung mehr möglich ist. Allerdings endet das Verfahren mit einer sehr speziellen Lösung, und es muss gezeigt werden, dass diese auch optimal ist.

Um zu einem Verfahren zum Lösen linearer Programme zu gelangen, muss man zuerst eine zulässige Lösung von (2.2) finden. Dies gelingt einfach mit dem Programm

$$\begin{aligned} \min_{x^+, x^-} \quad & \sum_{i=1}^n x_i^- \\ & A(x^+ - x^-) = b \\ & x^+, x^- \geq 0, \end{aligned}$$

das immer die vorigen Voraussetzungen erfüllt.

2.2 Hauptsatz der linearen Programmierung

Man betrachte wieder das Programm (2.2). Wegen der vorigen Untersuchungen stellt sich die Frage, ob es ausreicht, nur Lösungen wie im vorigen Abschnitt zu untersuchen.

Definition 2.1. Eine Lösung x von (2.2) heißt *zulässig*, wenn $x \geq 0$ gilt, sie heißt *Basislösung*, wenn wie in (2.3) entsprechende Zahlenfolgen α, β so existieren, dass $\text{span}(\{a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_m}\})$ ein Basis des \mathbb{R}^m ist und $x_\alpha \geq 0, x_\beta = 0$ gilt.

Der folgende Satz sagt nun, dass es ausreicht Basislösungen zu untersuchen.

Satz 2.1. Für das Problem (2.2) gilt:

1. Hat es eine zulässige Lösung, dann hat es eine zulässige Basislösung.
2. Hat es eine zulässige, optimale Lösung, dann hat es eine zulässige, optimale Basislösung.

Beweis. Um 1. zu zeigen betrachte man zu einer zulässigen Lösung x die Folge γ_j mit $x_{\gamma_j} > 0$ für $j = 1, \dots, p$ und $x_i = 0$ für $i \notin \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$. Ist die Menge der Vektoren $C = \{a_{\gamma_1}, \dots, a_{\gamma_p}\}$ linear unabhängig, dann ist man im Fall $p = m$ fertig. Gilt $p < m$, dann wähle man eine Menge $D = \{a_{\gamma_{p+1}}, \dots, a_{\gamma_m}\}$ so, dass $\text{span}(\{C \cup D\}) = \mathbb{R}^m$ gilt. Mit $x_{\gamma_k} = 0$ für $k = p+1, \dots, m$ erhält man dann eine Basislösung. Ist die Menge der Vektoren $C = \{a_{\gamma_1}, \dots, a_{\gamma_p}\}$ linear abhängig, bilde man mit der homogenen Lösung

$$\sum_{j=1}^p a_{\gamma_j} h_{\gamma_j} = 0$$

eine neue Lösung $\bar{x}_\gamma = x_\gamma + \varepsilon h_\gamma$ so, dass sie zulässig ist und für mindestens ein γ_k gilt $\bar{x}_\gamma = 0$. Anschließend wiederhole man das Verfahren mit $\bar{p} < p$. Um 2. zu zeigen, beachte man noch, dass

$$\sum_{j=1}^p c_{\gamma_j} x_{\gamma_j} + \varepsilon \sum_{j=1}^p c_{\gamma_j} h_{\gamma_j}$$

für $\varepsilon = 0$ das Minimum ist. Dann muss aber $\sum_{j=1}^p c_{\gamma_j} h_{\gamma_j} = 0$ gelten und man kann das Verfahren von 1. anwenden. ■

2.3 Dualität

Man betrachte nun das Problem (2.2) zusammen mit seinem dualen

$$\begin{array}{rcl} \min_x & cx & \\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} \max_\lambda & \lambda b & \\ \lambda A & \leq & c \end{array} \quad (2.5)$$

mit $\lambda \in (\mathbb{R}^m)^*$. Nun folgt aus $\lambda Ax = \lambda b$ und $\lambda Ax \leq cx$ die Beziehung

$$\lambda b \leq cx,$$

und damit sofort das nachfolgende Lemma.

Lemma 2.1. Es seien x und λ zulässige Lösungen von (2.5), dann gilt $\lambda b \leq cx$.

Ebenso leicht kommt man zum nachstehenden Lemma.

Lemma 2.2. Es seien x und λ zulässige Lösungen von (2.5). Gilt $cx = \lambda b$, dann sind x und λ optimale Lösungen der jeweiligen Probleme.

Dass bei der Existenz von Lösungen, die Gleichheit im obigen Lemma gilt, sagt nun der nachfolgende Satz.

Satz 2.2. Wenn eine der beiden Aufgaben von (2.5) eine Lösung hat, dann hat die andere auch eine und ihre Werte stimmen überein. Wenn eine der beiden Aufgaben keine zulässige Lösung hat, dann ist die Gütefunktion der anderen unbeschränkt.

Beweis. Um Satz 2.2 zu zeigen wird angenommen, die primale Aufgabe von (2.5) habe eine optimale Lösung. Wegen Satz 2.1 hat sie auch eine optimale Basislösung. Analog zu (2.3) und (2.4) folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} cx &= c_\alpha A_\alpha^{-1} b + (c_\beta - c_\alpha A_\alpha^{-1} A_\beta) x_\beta \\ Ax &= A_\alpha x_\alpha + A_\beta x_\beta = b \end{aligned}$$

mit der optimalen Lösung $\hat{x}_\alpha = A_\alpha^{-1} b$ und $\hat{x}_\beta = 0$. Wegen der Optimalität muss aber auch

$$c_\beta - c_\alpha A_\alpha^{-1} A_\beta \geq 0$$

gelten. Setzt man nun $\lambda = c_\alpha A_\alpha^{-1}$, dann erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \lambda A_\beta &\leq c_\beta \\ \lambda A_\alpha &= c_\alpha \end{aligned}$$

und sofort die Ungleichung

$$\lambda A \leq c.$$

Gilt noch

$$\lambda b = c_\alpha \hat{x}_\alpha$$

dann erhält man mit $\hat{\lambda} = c_\alpha A_\alpha^{-1}$ eine optimale Lösung der dualen Aufgabe wegen Lemma 2.2. Nun existieren Lösungen x der primalen Aufgabe so, dass $cx \leq -M$ für alle $M \in \mathbb{R}^+$ gilt. Dies ist nur möglich, wenn eine Lösung \tilde{x} mit $A\tilde{x} = 0$ und $c\tilde{x} < 0$ existiert. Hätte das duale Problem eine Lösung $\tilde{\lambda}$, dann folgt wegen

$$0 = \lambda A\tilde{x} \leq c\tilde{x}$$

sofort ein Widerspruch. Durch entsprechende Umkehrungen wird dann der Beweis vervollständigt. ■

Nun betrachte man die lineare Varietät V mit

$$c_\alpha x_\alpha + (c_\beta - \hat{\lambda} A_\beta) x_\beta = c_\beta \hat{x}_\beta$$

und Kodimension 1 im \mathbb{R}^n . Der Punkt $x_\alpha = \hat{x}_\alpha$, $x_\beta = \hat{x}_\beta$ liegt offensichtlich in V . Jede andere zulässige Lösung erfüllt die Ungleichung

$$\begin{aligned} c_\alpha x_\alpha + (c_\beta - \hat{\lambda} A_\beta) x_\beta &\leq c_\beta \hat{x}_\beta \\ (c - \hat{\lambda} A) x &\leq c_\beta \hat{x}_\beta. \end{aligned}$$

Die Varietät V trennt den \mathbb{R}^n in zwei Teile, wobei die Menge K aller zulässigen Lösungen in einem der abgeschlossenen Teile liegt. Für jede optimale Lösung \hat{x} gilt $\hat{x} \in V \cup K$.

Man überzeugt sich noch leicht, dass zwischen dem primalen und dualen Programm von (2.5) noch nachfolgende Beziehungen gelten.

Satz 2.3. Es seien $\hat{x}, \hat{\lambda}$ optimale Lösungen von (2.5). Genau dann gilt:

1. $\hat{x}_i > 0 \Rightarrow \hat{\lambda} a_i = c_i$
2. $\hat{x}_i = 0 \Leftarrow \hat{\lambda} a_i < c_i$

Beweis. Zuerst nehme man an, dass beide Bedingungen gelten. Aus $(\lambda A - c)x = 0$ folgt $\lambda b = cx$ und wegen Lemma 2.2 noch $\lambda = \hat{\lambda}$, $x = \hat{x}$. Für den optimalen Punkt gilt $\hat{\lambda} b = c\hat{x}$ und damit $(\hat{\lambda} A - c)\hat{x} = 0$. Wegen $\hat{x} \geq 0$ und $\hat{\lambda} A - c \leq 0$ folgen dann die beiden Beziehungen. ■

Anstelle der Paarung (2.5) wird auch oftmals das symmetrische Problem

$$\begin{array}{rcl} \min_x & cx & \\ Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} \max_\lambda & \lambda b & \\ \lambda A & \leq & c \\ \lambda & \geq & 0 \end{array} \quad (2.6)$$

betrachtet. Da man die Probleme (2.5) und (2.6) einfach ineinander überführen kann, werden hier nur die Ergebnisse übernommen. Das Gegenstück zu Satz 2.3 ist dann durch den nachfolgenden Satz gegeben.

Satz 2.4. Es seien $\hat{x}, \hat{\lambda}$ optimale Lösungen von (2.6). Genau dann gilt:

1. $\hat{x}_i > 0 \Rightarrow \hat{\lambda} a_i = c_i$
2. $\hat{x}_i = 0 \Leftarrow \hat{\lambda} a_i < c_i$
3. $\lambda_j > 0 \Rightarrow a^j \hat{x}_i = b_j$
4. $\hat{\lambda}_j = 0 \Leftarrow a^j \hat{x}_i > b_j$

Hier bezeichnet a^j die j -te Zeile von A .

2.4 Anwendungen

Die leistungsfähigeren Programme für lineare Probleme erlauben das Mischen von Gleichungen mit Ungleichungen sowie die Angabe von Grenzen für gewisse Variablen. Eine typische Form wäre

$$\begin{aligned} \min_x \quad & cx \\ Ax \quad &= \quad b \\ Dx \quad &\geq \quad f \\ Gx \quad &\leq \quad h \end{aligned} \tag{2.7}$$

mit $x_{u,i} \leq x_i \leq x_{o,i}$, $x_{u,i}, x_{o,i} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $i = 1, \dots, n$. Gilt $x_{u,i}, x_{o,i} \in \{-\infty, +\infty\}$, dann kann die entsprechende Ungleichung auch einfach weggelassen werden. Es wird daher im Folgenden darauf verzichtet, das Problem (2.7) auf eine Normalform überzuführen.

Man betrachte wieder das lineare, zeitinvariante und vollständig erreichbare Eingrößensystem

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k \tag{2.8}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} bu_i . \tag{2.9}$$

Das Programm

$$\begin{aligned} \min_{u, \varepsilon} \quad & \varepsilon \\ \sum_{i=0}^{N-1} A^{k-i-1} bu_i \quad &= \quad x_N \\ u_i \quad &\leq \quad \varepsilon \\ -u_i \quad &\leq \quad \varepsilon \end{aligned}$$

mit $i = 0, \dots, N - 1$ bestimmt eine im Sinne der Norm $\|u\|_\infty$ optimale Steuerung, die das System von $x_0 = 0$ in den Endzustand x_N überführt. Es bezeichne

$$f(N) = \|\hat{u}\|_\infty,$$

dann kann durch wiederholtes Ausführen des Programms eine zeitoptimale Steuerung entworfen werden. Es sei u_{\max} der maximal zulässige Stellaufwand, dann folgt N aus den Beziehungen $f(N) \leq u_{\max}$, $f(N - 1) > u_{\max}$. Dies folgt aus der Tatsache, dass $f(N)$ eine monoton fallende Funktion ist. Man beachte, dass f nicht für jedes N definiert sein muss bzw. dass die vorige Beziehung keine Lösung haben kann.

Das Programm

$$\begin{aligned} \min_{u, u^+, u^-} \quad & \sum_{i=0}^N u_i^+ + u_i^- \\ \sum_{i=0}^{N-1} A^{k-i-1} b u_i &= x_N \\ u_i &= u_i^+ - u_i^- \\ u_i^+ &\geq 0 \\ u_i^- &\geq 0 \end{aligned}$$

mit $i = 0, \dots, N - 1$ bestimmt eine im Sinne der Norm $\|u\|_1$ optimale Steuerung, die das System von $x_0 = 0$ in den Endzustand x_N überführt. Die zeitoptimale Steuerung kann analog zum vorigen Fall bestimmt werden.

Obige Minimumnormprobleme können auch mit anderen Mitteln behandelt werden, siehe dazu die Unterabschnitte 1.2.2 und 1.2.3. Allerdings kann man diese Formen leicht erweitern. Zustandsgrößenbeschränkungen der Art

$$x_{i,k,u} \leq x_{i,k} \leq x_{i,k,o}$$

mit x_k nach Gleichung (2.9) und $k = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, n$ können einfach hinzugenommen werden. Man kann die Normen $\|u\|_1$, $\|u\|_\infty$ im Gütekriterium mischen oder den Zustandsverlauf mit Normen bewerten. Die Normen mit

$$\|x\| = \|\|x_t\|_a\|_b$$

mit $a, b \in \{1, \infty\}$ sind wieder als lineares Programm formulierbar. Von Interesse sind nicht nur Beschränkungen der Stellgrößen sondern deren der Änderungsgeschwindigkeiten. Dies kann man mit den Ungleichungen

$$\begin{aligned} u_{i,u} &\leq u_i \leq u_{i,o} \\ \Delta u_{j,u} &\leq u_{j+1} - u_j \leq \Delta u_{j,o} \end{aligned}$$

mit $i = 0, \dots, N - 1$, $j = 0, \dots, N - 2$ erreichen. Oftmals möchte man nicht den Endzustand, sondern nur ein Zielgebiet vorgeben. Die Ungleichungen

$$x_{i,N,u} \leq x_{i,N} \leq x_{i,N,o}$$

wären eine geeignete Wahl. Beschränkungen des Endzustandes treten oft bei Problemen der modellprädiktiven Regelung auf.

Die Berechnung der Lösung (2.9) von (2.8) wird mit zunehmenden k immer aufwendiger. Dies ist eine Folge der Wahl von den Stellgrößen u_i als Optimierungsvariablen. Andere Parametrierungen können hier den Aufwand verringern. Dazu beachte man, dass das System (2.8) mittels einer Zustandstransformation $x_R = Tx$ auf Regelungsnormalform

$$x_{R,k+1} = A_R x_{R,k} + e_n u_k$$

gebracht werden kann. Es sei $p(z) = \sum_{i=0}^n \alpha_i z^i$, $\alpha_n = 1$ das charakteristische Polynom von A_R . Mit der Stellgrößentransformation $u_k = y_k + \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} x_{i,k}$ folgt noch

$$x_{R,k+1} = A_S x_{R,k} + e_n y_k ,$$

wobei $p(z) = z^n$ das charakteristische Polynom von A_S ist. Man beachte, dass dieses System die elementare Dynamik eines Schieberegisters der Tiefe n hat. Wir erhalten dann die Beziehungen

$$\begin{array}{rcl} x_{R,0} & = & [y_{-n} \dots y_{-1}]^T , & u_0 & = & \sum_{i=0}^n \alpha_i y_{-n+i} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ x_{R,k} & = & [y_{k-n} \dots y_{k-1}]^T , & u_k & = & \sum_{i=0}^n \alpha_i y_{k-n+i} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ & & & u_{N-1} & = & \sum_{i=0}^n \alpha_i y_{N-1-n+i} \\ x_{R,N} & = & [y_{N-n} \dots y_{N-1}]^T . & & & \end{array}$$

Wählt man zur Beschreibung des Systems (2.8) an Stelle der Stellfolge u die Folge y_{-n}, \dots, y_{N-1} , dann liegen die Werte von y_{-n}, \dots, y_{-1} wegen der Anfangsbedingung $x_{R,0} = Tx_0$ und die Werte von y_{N-n}, \dots, y_{N-1} wegen der Endbedingung $x_{R,N} = Tx_N$ fest. In dieser Darstellung wird also die Endbedingung trivial erfüllt. Für das Optimierungsproblem verbleiben dann noch die $N - n$ Variablen y_0, \dots, y_{N-n-1} . In der ursprünglichen Parametrierung waren es N Variablen, es mussten aber noch n Gleichungen erfüllt werden. Man beachte, dass der Rechenaufwand zur Berechnung von x_k, u_k mit wachsendem k nicht zunimmt. Welche der beiden Darstellungen die günstigere ist, hängt aber noch vom gewählten numerischen Löser ab. Letztere kann sehr vorteilhaft sein, wenn der Löser Probleme mit schwach besetzten Matrizen und/oder mit Matrizen mit Bandstrukturen effizient handhaben kann.

Literatur

Der Inhalt dieses Kapitels basiert im Wesentlichen auf dem Buch [7]. Allerdings wird hier auf alle numerischen Aspekte verzichtet. Zur Berechnung größerer Probleme wird empfohlen nach geeigneten Programmen zu suchen. Für kleinere Probleme reichen die in Maple oder Matlab implementierten Algorithmen aus.

2.5 Aufgaben

| *Aufgabe 2.1.* Arbeiten Sie die zweite Hälfte des Beweises zu Satz 2.1 aus.

| *Aufgabe 2.2.* Zeigen Sie die Äquivalenz der Optimierungsprobleme (2.5) und (2.6).

| *Aufgabe 2.3.* Zeigen Sie den Satz 2.4 mit Hilfe der Aufgabe 2.2 und Satz 2.3.

| *Aufgabe 2.4.* Schreiben Sie Programme für die Minimumnormprobleme von Abschnitt 2.4
Hinweis: Überprüfen Sie vorher, ob der gewählte Löser die Form (2.7) handhaben kann.

| *Aufgabe 2.5.* Erweitern Sie diese Programme durch Hinzunahme von Zustandsgrößenbeschränkungen, Beschränkungen der Änderungsgeschwindigkeit der Stellgröße, etc.

| *Aufgabe 2.6.* Formulieren Sie die Aufgaben von 2.4 mit Hilfe der alternativen Parametrierung von Abschnitt 2.5 und testen Sie, welche Formulierung auf dem von Ihnen gewählten System (Matlab, Maple, C++) mit geringerem zeitlichem Rechenaufwand gelöst wird. Probieren Sie dabei verschiedene Löser aus.

| *Aufgabe 2.7.* Machen Sie die zur Aufgabe 2.6 äquivalenten Tests für die Programme von Aufgabe 2.5.

Kapitel 3

Optimale lineare Systeme, Grundlagen

Dem Entwurf optimaler Steuerungen wurde in den vorigen Kapiteln die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax + bu \\ y_k &= cx + du\end{aligned}$$

gelegt. In diesem Kapitel wird die Eingangsausgangsbeschreibung mittels Übertragungsfunktion der Art

$$P(z) = c(Iz - A)^{-1}b + d \quad (3.1)$$

verwendet. Man beachte, dass man P in eine formale¹ Laurentreihe der Art

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^{-i} \quad (3.2)$$

entwickeln kann.

Auch wird, ohne es weiter zu erwähnen, vorausgesetzt, dass die Zustandsraumdarstellung immer vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar ist. Von besonderem Interesse sind nun BIBO-stabile Systeme.

Definition 3.1. Das System (3.1) ist BIBO-stabil, wenn zu jedem $u \in l_\infty$ folgt $y \in l_\infty$.

Hier bezeichnet l_∞ die Menge der beschränkten Folgen (u_i) , $i = 0, \dots, \infty$. Der Vektorraum l_∞ wird noch mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

¹Mit formal ist gemeint, dass auf die Angabe des Konvergenzgebietes verzichtet wird.

Satz 3.1. Das System (3.1) ist genau dann BIBO-stabil, wenn für seine Impulsfolge (3.2)

$$\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |p_i| < \infty$$

gilt. Weiters folgt

$$\|y\|_{\infty} \leq \|P\|_1 \|u\|_{\infty}$$

für den Eingang und Ausgang $u, y \in l_{\infty}$.

Beweis. Der Beweis, siehe auch aut2, basiert auf der Abschätzung

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=0}^i p_{i-j} u_j \\ |y_i| &\leq \sum_{j=0}^i |p_{i-j}| |u_j| \\ &\leq \sum_{j=0}^i |p_j| \|u\|_{\infty} \end{aligned}$$

und dem Grenzübergang $i \rightarrow \infty$. ■

Definition 3.2. Das System (3.1) hat die FIR-Eigenschaft, wenn für seine Impulsfolge (3.2) $p_i = 0, i = n + 1, \dots, \infty$ für ein $n \geq 0$ gilt.

Systeme mit der FIR-Eigenschaft sind offensichtlich immer BIBO-stabil. Sie erfüllen aber noch die folgenden zwei Eigenschaften. Es habe P, P_1, P_2 die FIR-Eigenschaft, dann gilt:

1. Die Hintereinanderschaltung $P_1 P_2 = P_2 P_1$ hat die FIR-Eigenschaft.
2. Die Parallelschaltung $P_1 + P_2$ hat die FIR-Eigenschaft.
3. Haben P und P^{-1} die FIR-Eigenschaft, dann folgt $P = p_0, p_0 \neq 0$.
4. Die Durchschaltung $P = 1$ hat die FIR-Eigenschaft, es gilt $P = P^{-1}$.

Man überzeugt sich nun leicht, dass die Menge der Systeme mit FIR-Eigenschaft einen kommutativen Ring mit 1-Element bilden. Dieser Ring wird mit $\text{FIR}(z)$ abgekürzt und er wird im Weiteren für die Reglersynthese zugrunde gelegt. Von nun an bezeichnet $\mathbb{R}[z]$ den Ring der Polynome in z , $\mathbb{R}(z)$ den Körper der rationalen Funktionen in z , $\mathbb{R}_+(z)$ den Ring der rationalen und realisierbaren Übertragungsfunktionen in z , $\mathbb{S}_+(z)$ den Ring der BIBO-stabilen und realisierbaren rationalen Funktionen in z . Offensichtlich gilt

$$\text{FIR}(z) \subset \mathbb{S}_+(z) \subset \mathbb{R}_+(z) \subset \mathbb{R}(z) .$$

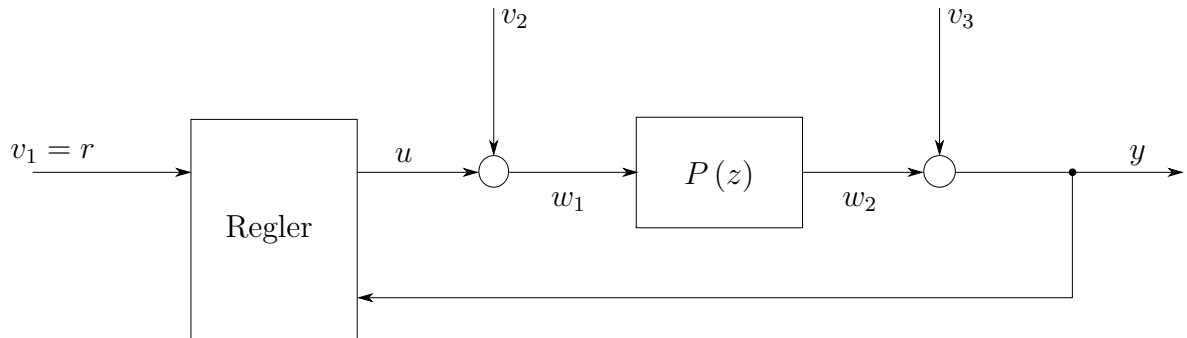


Bild 3.1: Eingrößenregelkreis

Vorerst muss aber die Struktur der Regelung festgelegt werden. Als Struktur wird der Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden nach aut2 gewählt, wobei vom Regelgesetz lediglich vorausgesetzt wird, dass es linear und zeitinvariant ist, also im Bildbereich in der Form

$$u_z(z) = V(z)r_z(z) - R(z)y_z(z) \tag{3.3}$$

geschrieben werden kann.

Definition 3.3. Der Regelkreis nach Bild 3.1 heißt *intern stabil*, wenn alle Übertragungsfunktionen

$$P_{i,j}(z) = \frac{w_{z,i}(z)}{v_{z,j}(z)}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3$$

BIBO-stabil sind.

3.1 Faktorisierung in $\mathbb{FIR}(z)$

Jede Funktion $G(z) \in \mathbb{R}(z)$ mit

$$G(z) = \frac{z(G)}{n(G)} \quad \text{und} \quad z(G), n(G) \in \mathbb{R}[z]$$

lässt sich als Quotient zweier Funktionen $Z(z), N(z) \in \mathbb{FIR}(z)$ darstellen. Hierzu bestimme man l mit

$$l = \max(\text{grad}(z(G)), \text{grad}(n(G)))$$

und setze

$$G(z) = \frac{Z(z)}{N(z)} \quad \text{mit} \quad Z(z) = \frac{z(G)}{z^l} \quad \text{und} \quad N(z) = \frac{n(G)}{z^l}. \tag{3.4}$$

Im Allgemeinen sind $z(G)$ und $n(G)$ nicht teilerfremd. Setzt man dies voraus, dann erhält man einfach den nachfolgenden Satz.

Satz 3.2. Für $P(z) \in \mathbb{R}_+(z)$ gelte, das Zählerpolynom $z(P)$ und das Nennerpolynom $n(P)$ seien teilerfremd, dann hat die Gleichung

$$Z(z)X(z) + N(z)Y(z) = 1 \tag{3.5}$$

genau eine Lösung mit $X, Y \in \text{FIR}(z)$.

Beweis. Zum Beweis löse man die Gleichung

$$z(P)z(X) + n(P)n(Y) = z^{2n-1}$$

mit $n = \text{grad}(n(P))$ mit Hilfe der Resultante nach aut2. Offensichtlich erfüllt diese Lösung die Bedingung von Satz 3.2 mit

$$X = \frac{z(X)}{z^{n-1}} \quad \text{und} \quad Y = \frac{z(Y)}{z^{n-1}}.$$

Jede andere Lösung hat die Form

$$X = \frac{z(X) + k(z)n(P)}{z^{n-1}} \quad \text{und} \quad Y = \frac{z(Y) - k(z)z(P)}{z^{n-1}}$$

für $k \in \mathbb{R}[z]$, die für $k \neq 0$ die Bedingungen des Satzes 3.2 verletzt. ■

Das zulässige Regelgesetz (3.3) hat aber zwei Eingänge und einen Ausgang. Wenn man es als ein dynamisches System realisiert, dann kann es in der Form

$$u_z(z) = \frac{Z_V}{N_R}r_z(z) - \frac{Z_R}{N_R}y_z$$

mit $Z_V, Z_R, N_R \in \text{FIR}(z)$ geschrieben werden. Erfüllen diese Größen noch die Beziehungen

$$Z_V X_V + Z_R X_R + N_R Y_R = 1$$

mit $X_V, X_R, Y_R \in \text{FIR}(z)$, dann sind die Übertragungsfunktionen Z_V, Z_R, N_R teilerfremd oder es gibt kein $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ so, das $Z_V(\tilde{z}) = Z_R(\tilde{z}) = N_R(\tilde{z}) = 0$ gilt.

3.2 Interne Stabilität des Standardregelkreises

Bild 3.2 zeigt den Standardregelkreis mit zwei Freiheitsgraden. Regler und Strecke mögen die Bezout-Identitäten

$$ZX + NY = 1 \quad \text{und} \quad Z_V X_V + Z_R X_R + N_R Y_R = 1 \tag{3.6}$$

erfüllen. Die Beziehung zwischen den Eingängen v_1, v_2 und v_3 und den Ausgängen w_1 und

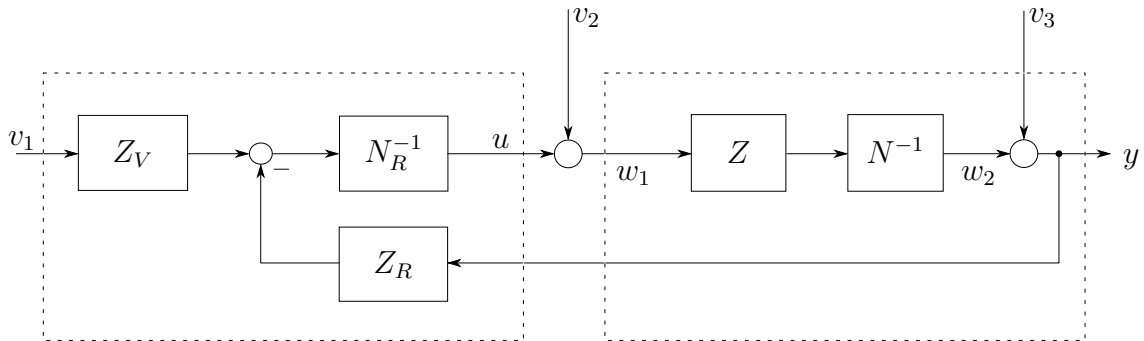


Bild 3.2: Standardregelkreis mit zwei Freiheitsgraden. Regler mit zwei Freiheitsgraden als ein dynamisches System

w_2 ist durch

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{z,1} \\ w_{z,2} \end{bmatrix}}_{\hat{w}} = \frac{1}{\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} N Z_V & N N_R & -N Z_R \\ Z Z_V & Z N_R & -Z Z_R \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} v_{z,1} \\ v_{z,2} \\ v_{z,3} \end{bmatrix}}_{\hat{v}}$$

mit

$$Z Z_R + N N_R = \Delta \quad (3.7)$$

gegeben. Der Standardregelkreis ist offensichtlich genau dann intern stabil, wenn alle Elemente der Übertragungsmatrix T BIBO-stabil sind. Gilt

$$\Delta^{-1} \in \mathbb{S}_+(z) \quad , \quad (3.8)$$

dann ist der Regelkreis sicher intern stabil. Dass diese Bedingung auch notwendig ist, besagt der nachfolgende Satz.

Satz 3.3. Der Standardregelkreis nach Bild 3.2 erfüllt die Beziehungen (3.6), dann ist er genau dann intern stabil, wenn die Beziehung (3.8) erfüllt ist.

Beweis. Um zu zeigen, dass (3.8) auch notwendig ist, werden die Eingänge mit beliebigen, aber betragsmäßig beschränkten Signalen der Form

$$v_z = \begin{bmatrix} X_V \\ Y_R \\ -X_R \end{bmatrix} p(z)$$

belegt. Als Ausgangssignal wählt man

$$q_z(z) = \begin{bmatrix} Y & X \end{bmatrix} w_z .$$

Man erhält dann die Beziehung

$$q_z(z) = \frac{1}{\Delta} p_z(z) ,$$

und damit diesen Satz. ■

Man überzeugt sich leicht, dass die Bedingung (3.8) durch $\Delta = 1$ ersetzt werden kann. Denn aus Gleichung (3.7) folgt

$$Z \frac{Z_R}{\Delta} + N \frac{N_R}{\Delta} = 1 ,$$

und damit für die Reglerübertragungsfunktion R

$$R = \frac{(Z_R/\Delta)}{(N_R/\Delta)} = \frac{\tilde{Z}_R}{\tilde{N}_R} ,$$

wobei noch $\tilde{Z}_R, \tilde{N}_R \in \mathbb{FIR}(z)$ gilt.

Jeder den Regelkreis intern stabilisierende Regler ist also eine Lösung der Gleichung

$$ZZ_R + NN_R = 1 .$$

Ihre allgemeine Lösung ist offensichtlich durch

$$Z \underbrace{(X + KN)}_{Z_R} + N \underbrace{(Y - KZ)}_{N_R} = 1$$

gegeben. Jeder Regler der Form

$$R = \frac{X + KN}{Y - KZ} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{S}_+(z)$$

stabilisiert also den Regelkreis nach Bild 3.2 intern. Es verbleibt noch zu untersuchen, ob es andere Übertragungsfunktionen R gibt, die ebenfalls den Regelkreis intern stabilisieren. Wegen Satz 3.6 gilt dann für R

$$R = \frac{Z_R}{N_R} \quad \text{und} \quad ZZ_R + NN_R = 1 .$$

Aus

$$\begin{array}{r} ZZ_R + NN_R = 1 \\ ZX + NY = 1 \quad / -1 \end{array}$$

folgt

$$Z(Z_R - X) + N(N_R - Y) = 0 .$$

Da $(N_R - Y) \in \mathbb{FIR}(z)$ ist, muss auch

$$(Z_R - X) \frac{Z}{N} \in \mathbb{FIR}(z)$$

gelten. Da aber $Z, N \in \mathbb{FIR}(z)$ teilerfremd sind, muss $(Z_R - X)$ ein Vielfaches von N sein, d.h., es gilt

$$Z_R = X + KN \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{S}_+(z) .$$

Durch Einsetzen in obige Beziehung

$$Z(X + KN) + NN_R = 1 ,$$

folgt wegen Gleichung (3.5)

$$NN_R = \underbrace{1 - ZX}_{NY} - ZNK$$

oder

$$N_R = Y - ZK .$$

D.h., zu jedem, den Regelkreis intern stabilisierenden Regler, kann ein geeignetes $K \in \mathbb{S}(s)$ gefunden werden. Mit der Bezeichnung

$$Z_V = Q$$

erhält man dann sofort den nachstehenden Satz.

Satz 3.4. Jedes den Standardregelkreis nach Bild 3.2 intern stabilisierende Regelgesetz ist von der Form

$$R = \frac{X + KN}{Y - KZ} , \quad V = \frac{Q}{Y - KZ} \quad (3.9)$$

mit

$$K(z), Q(z) \in \mathbb{S}_+(z) \quad \text{und} \quad ZX + NY = 1 .$$

Durch Satz 3.4 ist also eine Parametrisierung aller den Regelkreis intern stabilisierenden Regelgesetze gegeben.

3.3 Synthesegleichungen

Die Parametrierung nach Satz 3.4 erlaubt nicht nur Einsicht in die Beschränkungen, denen ein Reglerentwurf unterliegen muss, sie führen auch auf wesentlich einfachere Entwurfsgleichungen. Für die Reglersynthese ist im Allgemeinen die Abhängigkeit des Regelfehlers und der Stellgröße von der Führungs- und der Störgröße von Bedeutung.

Legt man dem Entwurf die Parameter V, R nach Gleichung 3.3 zugrunde, dann ergibt sich mit

$$e_z = r_z - y_z$$

folgender Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} u_z \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + RP} \begin{bmatrix} V & -R \\ 1 + P(R - V) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_z \\ d_z \end{bmatrix} .$$

Wählt man jedoch die Parameter Q, K nach Gleichung 3.9, dann haben die Synthesegleichungen die einfache Form

$$\begin{bmatrix} u_z \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NQ & -(X + KN)N \\ 1 - ZQ & -1 + (X + KN)Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_z \\ d_z \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Die neuen Synthesegleichungen sind nicht nur affin in den neuen Parametern, sie erlauben auch eine einfache Entkopplung des Führungsproblems vom Störproblem.

3.4 Polvorgabe

Die nachfolgenden Abkürzungen vereinfachen das Weitere.

Definition 3.4. Mit $z \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\mathbb{C}_{<1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$
2. $\mathbb{C}_{=1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
3. $\mathbb{C}_{\leq 1} = \mathbb{C}_{<1} \cup \mathbb{C}_{=1}$
4. $\mathbb{C}_{>1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$
5. $\mathbb{C}_{\geq 1} = \mathbb{C}_{>1} \cup \mathbb{C}_{=1}$
6. $\mathbb{C}_{>1,e} = \mathbb{C}_{>1} \cup \{\infty\}$
7. $\mathbb{C}_{\geq 1,e} = \mathbb{C}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$

Mit Hilfe von Gl. 3.10 kann besonders einfach das Problem der Polvorgabe sowohl für den Führungsfall, wie auch den Störfall gelöst werden. Gibt man z.B. die Übertragungsfunktion des Führungsfehlers vor, dann gilt

$$T_{e_z/r_z} = 1 - ZQ$$

oder

$$ZQ = (1 - T_{e_z/r_z}).$$

Da $Q \in \mathbb{S}_+(z)$ gilt, muss Z die Funktion $(1 - T_{e_z/r_z})$ in $\mathbb{S}_+(z)$ teilen. D.h., für alle $z \in \mathbb{C}_{\geq 1,e}$ mit

$$Z(z) = 0$$

muss auch

$$T_{y_z/r_z}(z) = (1 - T_{e_z/r_z}(z)) = 0$$

gelten. Gibt man nun die Übertragungsfunktion des Störfehlers vor, dann gilt

$$T_{e_z/d_z} = -1 + (X + KN)Z$$

oder

$$(X + KN)Z = T_{\hat{e}/\hat{d}} + 1.$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Gilt $P \in \mathbb{S}_+(z)$, dann gilt $N^{-1} \in \mathbb{S}_+(z)$ für $N \in \text{FIR}(z)$. Da nun die Gleichung

$$W = X + KN$$

für jedes $W \in \mathbb{S}_+(z)$ nach $K \in \mathbb{S}_+(z)$ auflösbar ist, kann man zuerst W aus

$$WZ = T_{\hat{e}/\hat{d}} + 1$$

bestimmen und dann K berechnen. Eine andere Möglichkeit ist die Bezout-Identität (3.5) im Ring $\mathbb{S}_+(z)$ anstelle von $\text{FIR}(z)$ zu betrachten. Eine besonders einfache Lösung ist dann

$$P = \frac{Z}{1} \quad \text{mit} \quad Z \cdot 0 + N \cdot 1 = 1$$

und man erhält die Gleichung

$$KZ = T_{e_z/d_z} + 1.$$

Abgesehen vom Vorzeichen ist hier kein Unterschied zum Führungsfall. Ist obige Bedingung nicht erfüllt, muss vorerst Z die Funktion wegen

$$T_{e_z/d_z} + 1 = (X + KN)Z$$

$T_{e_z/d_z} + 1$ teilen. D.h., für alle $z \in \mathbb{C}_{\geq 1,e}$ mit

$$Z = 0$$

muss auch

$$(1 + T_{e_z/d_z}(z)) = 0$$

gelten. Da weiters auch

$$T_{e_z/d_z} = N(ZK - Y)$$

mit $K \in \mathbb{S}_+(s)$ gilt, muss N die linke Seite teilen. D.h., für alle $z \in \mathbb{C}_{>1,e}$ mit

$$N(z) = 0$$

muss auch die Beziehung

$$T_{e_z/d_z}(z) = 0$$

erfüllt sein.

Durch obige Beziehungen sind die allgemeinen Bedingungen festgelegt, denen die vorzugebenden Funktionen unterliegen. Im allgemeinen wird man dann gleich V und R berechnen, ohne den Umweg über Q und K zu nehmen. Die Übertragung auf andere Funktionen, wie z.B. Stellgrößenübertragungsfunktion ist ebenfalls einfach möglich.

3.5 Realisierung mit den Parametern Q und K

Die Realisierung des Regelgesetzes ist durch die Gleichung 3.9 prinzipiell gelöst, wobei V und R als ein dynamisches System zu realisieren sind. Im Folgenden werden Realisierungen gesucht, die die Parameter Q und K explizit enthalten. Hiefür gelte aus Gründen der Einfachheit

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = 0,$$

dann lassen sich die Größen N und Y so bestimmen, dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} N(z) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = 1$$

und damit

$$Y = Y' + 1 \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} Y'(z) = 0$$

gilt.

Zuerst wird der Fall $P \notin \mathcal{S}_+(z)$ untersucht. Für die Stellgröße gilt

$$u_z = Vr_z - Ry_z$$

oder

$$(Y - KZ)u_z = Qr_z - (X + KN)y_z$$

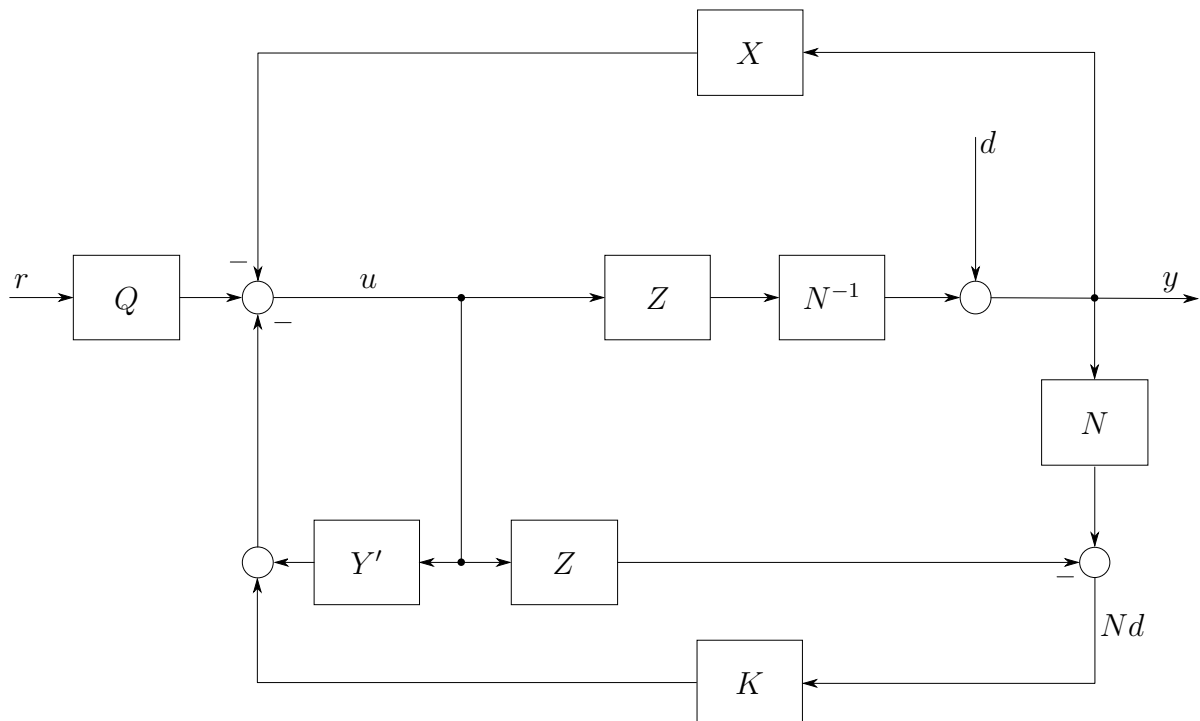


Bild 3.3: Realisierung mit Q und K bei instabiler Strecke

bzw.

$$u_z = Qr_z - Xy_z - Y'u_z - K(Ny_z - Zu_z) .$$

Die Realisierung obiger Beziehung ist Bild 3.3 zu entnehmen. Man erkennt sofort, dass Q nur als Steuerung wirkt. Wegen

$$Ny_z - Zu_z = Nd_z$$

wirkt aber auch K nur als Steuerung, die Stabilisierung wird von den Übertragungsfunktionen X und Y' übernommen.

Gilt $P \in \mathbb{S}(s)$, wird wieder die spezielle Faktorisierung

$$P = \frac{Z}{1} \quad \text{mit} \quad Z \cdot 0 + N \cdot 1 = 1$$

verwendet. Für die Stellgröße folgt dann

$$\hat{u} = Q\hat{r} - K(\hat{y} - Z\hat{u}) .$$

Die Realisierung dieses Gesetzes ist Bild 3.4 zu entnehmen. In diesem Fall entfällt natürlich das stabilisierende Netzwerk. Q und K wirken wieder als reine Steuerungen. Man erkennt, dass hier zwischen Führungs- und Störregelung kein Unterschied besteht, da hier im Gegensatz zu obigem Fall die Störung d rekonstruiert werden kann. Bei instabilen Strecken ist dies nur unter Verletzung der (internen) Stabilität möglich.

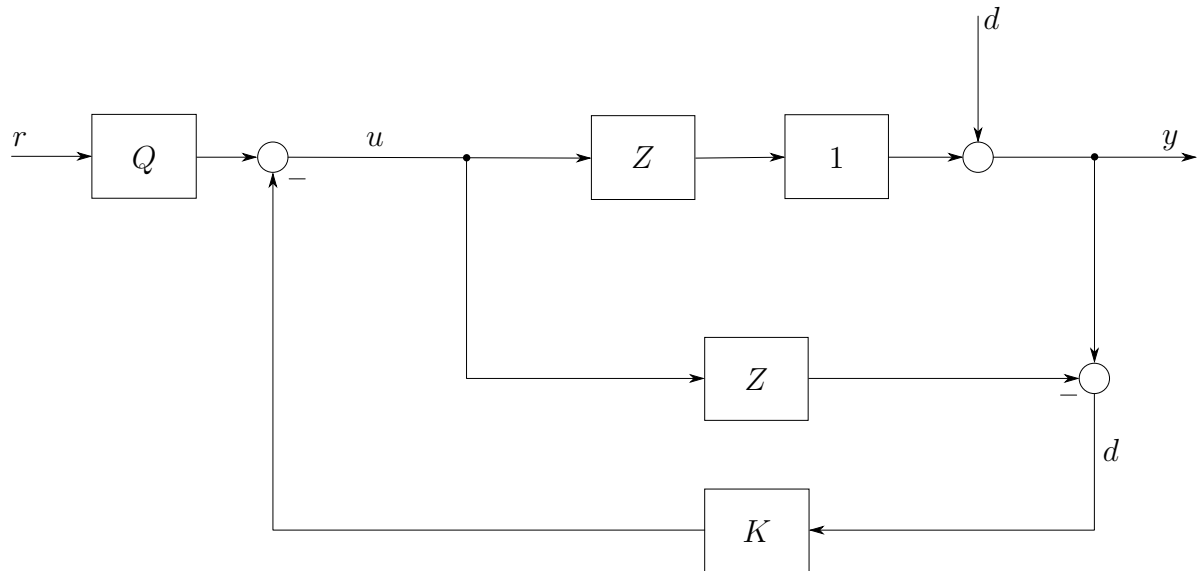


Bild 3.4: Realisierung mit Q und K bei stabiler Strecke

Literatur

Der Inhalt dieses Kapitels basiert im Wesentlichen auf den Büchern [4, 8]. Ersteres behandelt den Eingrößenfall, robuste lineare Regelung und den H_∞ -Entwurf. Den Mehrgrößenfall und die dazu benötigten algebraischen Grundlagen findet man im letzteren, aber auch viel mehr, wie H_2 -Entwurf oder Parametrierung von stabilen Reglern, die einen Regelkreis intern stabilisieren.

3.6 Aufgaben

Aufgabe 3.1. Im Ring der Polynome lässt sich jeder den Regelkreis stabilisierende Regler R als eine Lösung der Gleichung

$$zz_R + nn_R = d$$

darstellen. Wie müssen Sie den Grad von d wählen, damit der Regler realisierbar ist? Schreiben Sie dazu ein Programm in Maple.

Aufgabe 3.2. Berechnen Sie zur Strecke

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$$

die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $H(z)$. Bestimmen Sie eine teilerfremde Faktorisierung $H(z) = Z(z)/N(z)$ und lösen Sie die Bezout-Identität

$$ZX + NY = 1.$$

Erweitern Sie das Programm der vorigen Aufgabe so, dass es auch dieses Problem löst.

Aufgabe 3.3. Vereinfachen Sie die Gl. 3.10 für den Fall $P(z) \in \mathbb{S}_+(z)$. Können Sie den Regelkreis noch vereinfachen, wenn Sie eine spezielle Wahl $Q(z)$ und $K(z)$ treffen?

Aufgabe 3.4. Berechnen Sie zur Strecke

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$$

die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $H(z)$. Geben Sie die Interpolationsbedingungen an, welchen die Übertragungsfunktionen T_{y_z/r_z} und T_{e_z/d_z} genügen müssen. Setzen Sie geeignete Übertragungsfunktionen an und berücksichtigen Sie dabei das asymptotische Verhalten des Regelkreises (z.B. Ausgangsgröße für $t \rightarrow \infty$). Berechnen Sie den Regler und realisieren Sie den Regler als ein dynamisches System.

Aufgabe 3.5. Geben Sie allgemeine Interpolationsbedingungen für die Stellgrößenübertragungsfunktionen

$$T_{u_z/r_z} = NQ \quad \text{und} \quad T_{u_z/d_z} = -(X + KN)N$$

an. Unterscheiden Sie zwischen den Fällen $P(z) \in \mathbb{S}_+(z)$ und $P(z) \notin \mathbb{S}_+(z)$.

Kapitel 4

l_1 -optimale lineare Systeme

Der l_1 -Entwurf benutzt die Ergebnisse des vorigen Kapitels. Betrachtet man den Regelkreis von Abbildung 3.1, dann wäre eine naheliegende Wahl, den betraglich maximalen Fehler zu minimieren, wobei der betragliche Maximalwert der Stellgröße unter einer vorgegebenen Schranke bleiben soll. Wegen der Linearität, des Regelkreises ist dies nur möglich, wenn die Führungsgröße r und die Störgröße d Beschränkungen unterliegen. Eine mögliche Wahl ist

$$r_z = F_r(z) \tilde{r}_z \quad \text{und} \quad d_z = F_r(z) \tilde{d}_z$$

mit $\|\tilde{r}\|_\infty \leq 1$ und $\|\tilde{d}\|_\infty \leq 1$.

Als Erstes wird der Führungsentwurf betrachtet. Die Synthesgleichungen (3.10) nehmen nun die Form

$$e_z = (1 - ZQ) F_r \tilde{r}_z \quad \text{und} \quad u_z = NQ F_r \tilde{r}_z$$

an. Nach Satz 3.1 folgt dann

$$\|e\|_\infty = \|(1 - ZQ) F_r\|_1 \quad \text{sowie} \quad \|u\|_\infty = \|NQ F_r\|_1 .$$

Man beachte, dass zur Vereinfachung der Notation, die Abkürzung $\|f\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ sowohl für die Folge (f_0, f_1, \dots) , wie für die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} f_i/z^i$ verwendet wird. Mit Hilfe dieser Überlegungen wird das Entwurfsproblem ein infinites lineares Programm

$$\inf_Q \begin{array}{l} \|(1 - ZQ) F_r\|_1 \\ \|NQ F_r\|_1 \leq u_{\max} \end{array} . \quad (4.1)$$

Man überzeugt sich leicht, dass $Q \in \mathbb{S}_+(z)$ durch ein $\hat{Q} \in \text{FIR}(z)$ z.B. mit der Wahl $q_i = \hat{q}_i$, $i = 0, \dots, N$ beliebig genau approximiert werden kann. Mit einer geeigneten Wahl von F_r muss noch sicher gestellt werden, dass die Normen in (4.1) auch existieren. Dies ist z.B. immer für $F_r \in \mathbb{S}_+(z)$ der Fall. Formuliert man das Synthesproblem als finites lineares

Programm, dann muss auch gewährleistet sein, dass die finiten Absolutsummen gegen die unendlichen konvergieren. Wie dies erreicht wird, wird anhand der folgenden Beispiele gezeigt.

Der Störentwurf erfolgt ganz analog zum Führungsentwurf. Die Synthesgleichungen (3.10) haben jetzt die Form

$$e_z = (-1 + Z(X + KN)) F_d \tilde{d}_z \quad \text{und} \quad u_z = -(X + KN) N F_d \tilde{d}_z .$$

Nach Satz 3.1 folgt dann

$$\|e\|_\infty = \|(-1 + Z(X + KN)) F_d\|_1 \quad \text{sowie} \quad \|u\|_\infty = \|(X + KN) N F_d\|_1 .$$

Das Entwurfsproblem hat wieder die Form eines unendlichen linearen Programms

$$\inf_K \begin{array}{l} \|(-1 + Z(X + KN)) F_d\|_1 \\ \|(X + KN) N F_d\|_1 \end{array} \leq u_{\max} . \quad (4.2)$$

Mit einer geeigneten Wahl von F_d muss wieder sicher gestellt werden, dass die Normen in (4.2) auch existieren. So ist dies für $F_d \in \mathbb{S}_+(z)$ immer gegeben. Formuliert man das Synthesproblem als finites lineares Programm, dann muss man wieder sicherstellen, dass die finiten Absolutsummen gegen die unendlichen konvergieren.

Gilt $F_r, F_d \in \mathbb{S}_+(z)$, dann kann man diese Übertragungsfunktion immer durch geeignete Funktionen $\hat{F}_r, \hat{F}_d \in \mathbb{FIR}(z)$ approximieren. Mit dieser Wahl, treten in den Beziehungen (4.1) und (4.2) nur mehr finite Folgen auf. Dass aber auch unter gewissen Bedingungen $F_r, F_d \notin \mathbb{S}_+(z)$ zulässig ist, zeigen die folgenden Beispiele.

4.1 Beispiele

Für die Strecke

$$P(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

soll eine Regelung entworfen werden. Die zeitdiskrete Übertragungsfunktion lautet

$$P(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{(z - e^{-T_A})(z - 1)}, \quad a_0 = 1 - (T_A + 1)e^{-T_A}, \quad a_1 = T_A - 1 + e^{-T_A}, \quad \left| \frac{a_0}{a_1} \right| < 1 .$$

Mit der Faktorisierung

$$Z = \frac{a_0 + a_1 z}{z^2}, \quad N = \frac{(z - e^{-T_A})(z - 1)}{z^2}$$

folgen dann noch X und Y aus der Beziehung

$$ZX + NY = 1 .$$

Man beachte, dass $Z(1)X(1) = 1$ wegen $N(1) = 0$ gilt.

Für den Entwurf wird das nicht BIBO-stabile Filter

$$F_r = \frac{T_A z}{z - 1}$$

gewählt und man erhält die Beziehungen

$$\|e\|_\infty = \left\| (1 - ZQ) \frac{T_A z}{z - 1} \right\|_1 \quad \text{sowie} \quad \|u\|_\infty = \left\| \frac{T_A (z - e^{-T_A})}{z} Q \right\|_1 .$$

Offensichtlich muss Q noch der Beziehung $Z(1)Q(1) = 1$ genügen, damit $\|e\|_\infty < \infty$ gilt. Diese Bedingung wird beim infiniten Programm zwar automatisch erfüllt (Warum?), bei einer finiten Approximation ist es aber nur näherungsweise der Fall. Daher sollte das Programm mit dieser Interpolationsbedingung erweitert werden.

Für den Störfall wird das Filter des Führungsfalls gewählt, es gilt $F_d = F_r$. Damit erhält man die Synthesegleichungen

$$\|e\|_\infty = \left\| (-1 + Z(X + KN)) \frac{T_A z}{z - 1} \right\|_1 \quad \text{sowie} \quad \|u\|_\infty = \left\| -(X + KN) \frac{T_A (z - e^{-T_A})}{z} \right\|_1 .$$

Man beachte, dass jetzt keine zusätzlichen Interpolationsbedingungen auftreten. Allerdings folgt aus

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(z) &= X(z) + K(z)N(z) \\ \tilde{Q}(1) &= X(1) \\ \tilde{Q}(1)Z(1) &= 1, \end{aligned}$$

dass hier das Störproblem äquivalent zum Führungsproblem mit der Interpolationsbedingung $Z(1)\tilde{Q}(1) = 1$ ist. Im Allgemeinen ist es sehr einfach, das lineare Programm um Interpolationsbedingungen zu erweitern.

Als Nächstes wird die Strecke

$$P(s) = \frac{1}{s(1-s)}$$

betrachtet. Die zeitdiskrete Übertragungsfunktion lautet

$$P(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{(z - e^{T_A})(z - 1)}, \quad a_0 = (1 - T_A)e^{T_A} - 1, \quad a_1 = T_A + 1 - e^{-T_A}, \quad \left| \frac{a_0}{a_1} \right| < 1 .$$

Mit der Faktorisierung

$$Z = \frac{a_0 + a_1 z}{z^2}, \quad N = \frac{(z - e^{T_A})(z - 1)}{z^2}$$

folgen dann noch X und Y aus der Beziehung

$$ZX + NY = 1.$$

Für den Führungsentwurf wird, wie oben, das nicht BIBO-stabile Filter

$$F_r = \frac{T_A z}{z - 1}$$

gewählt und man erhält die Beziehungen

$$\|e\|_\infty = \left\| (1 - ZQ) \frac{T_A z}{z - 1} \right\|_1 \quad \text{sowie} \quad \|u\|_\infty = \left\| \frac{T_A (z - e^{T_A})}{z} Q \right\|_1.$$

Wie oben fügen wir noch die Bedingung $Z(1)Q(1) = 1$ hinzu.

Für den Störfall wird das gleiche Filter $F_d = F_r$ verwendet. Damit erhält man die Synthesegleichungen

$$\|e\|_\infty = \left\| (-1 + Z(X + KN)) \frac{T_A z}{z - 1} \right\|_1 \quad \text{sowie} \quad \|u\|_\infty = \left\| -(X + KN) \frac{T_A (z - e^{T_A})}{z} \right\|_1.$$

Wie erwartet, treten keine zusätzlichen Interpolationsbedingungen auf. Man könnte das lineare Programm aber auch mit \tilde{Q} ,

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(z) &= X(z) + K(z)N(z) \\ \tilde{Q}(1) &= X(1) \\ \tilde{Q}(e^{T_A}) &= X(e^{T_A}), \end{aligned}$$

formulieren.

Das letzte Beispiel behandelt die Strecke

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

mit der zeitdiskreten Übertragungsfunktion

$$P(z) = \frac{(z + 1)T_A^2}{2(z - 1)^2}.$$

Mit der Faktorisierung

$$Z = \frac{(z + 1)T_A^2}{2z^2}, \quad N = \frac{(z - 1)^2}{z^2}$$

folgen dann noch X und Y aus der Beziehung

$$ZX + NY = 1 .$$

Für den Führungsentwurf wird, wie oben, das nicht BIBO-stabile Filter

$$F_r = \frac{T_A z}{z - 1}$$

gewählt und man erhält die Beziehungen

$$\|e\|_\infty = \left\| (1 - ZQ) \frac{T_A z}{z - 1} \right\|_1 \quad \text{sowie} \quad \|u\|_\infty = \left\| \frac{T_A (z - 1)}{z} Q \right\|_1 .$$

Wie oben fügen wir noch die Bedingung $Z(1)Q(1) = 1$ hinzu.

Für den Störfall wird wieder das gleiche Filter $F_d = F_r$ verwendet. Damit erhält man die Synthesegleichungen

$$\|e\|_\infty = \left\| (-1 + Z(X + KN)) \frac{T_A z}{z - 1} \right\|_1 \quad \text{sowie} \quad \|u\|_\infty = \left\| -(X + KN) \frac{T_A (z - 1)}{z} \right\|_1 .$$

Wie erwartet, treten keine zusätzlichen Interpolationsbedingungen auf. Man könnte das lineare Programm aber auch mit \tilde{Q} ,

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(z) &= X(z) + K(z)N(z) \\ \tilde{Q}(1) &= X(1) \\ \partial_z \tilde{Q}(1) &= \partial_z X(1) , \end{aligned}$$

formulieren. Allerdings werden die Lösungen der linearen Programme gegen eine Lösung konvergieren, bei der die zweite Interpolationsbedingung verletzt wird. Damit hat dieses Problem keine optimale Lösung. Man kann aber den Grenzfall durch suboptimale Lösungen beliebig genau approximieren. Dieser Umstand rührt von der Tatsache her, dass für diese Strecke bei intern stabiler Regelung, der bleibende Schleppfehler für die Störung verschwinden muss. Bei der Führungsregelung entfällt natürlich diese strukturelle Einschränkung.

Einige Bemerkungen

Dieses Kapitel ist eine Anwendung der Grundlagen, die in den vorigen Kapiteln präsentiert worden sind. Allgemein kann angemerkt werden, dass man das Verhalten eines linearen Regelkreises an Hand spezieller Testsignale oder an Hand vom Übertragungsverhalten beurteilt werden kann. Die hier behandelten Verfahren gehören zur letzteren Gruppe, wobei man Normen für Eingänge und Ausgänge festlegt und die induzierte Operatornorm minimiert. Hier wurde die Norm $\|\cdot\|_\infty$ für die Eingänge und Ausgänge gewählt. Als induzierte Norm erhält man $\|\cdot\|_1$ für die Impulsantworten.

4.2 Aufgaben

Aufgabe 4.1. Entwickeln Sie ein Programm in Matlab oder Maple, das die Aufgabe

$$\begin{aligned} \min_X \|A - BX\|_1 \\ \|X\|_1 \leq c \end{aligned}$$

für BIBO-stabile Übertragungsfunktionen A und B löst. Welche Bedingungen erfordert ein finites Programm, damit X BIBO-stabil ist?

Aufgabe 4.2. Entwickeln Sie ein Programm in Matlab oder Maple, das den Führungsentwurf nach Gleichung (4.1) löst. Betrachten Sie dabei auch Fälle mit nicht BIBO-stabiler Übertragungsfunktion $F_r(z)$. Welche zusätzlichen Bedingungen müssen dann erfüllt werden? Welche Bedingungen muss ein finites Programm erfüllen, damit der Regelkreis intern stabil ist?

Aufgabe 4.3. Entwickeln Sie ein Programm in Matlab oder Maple, das den Störentwurf nach Gleichung (4.2) löst. Betrachten Sie dabei auch Fälle mit nicht BIBO-stabiler Übertragungsfunktion $F_d(z)$. Welche zusätzlichen Bedingungen müssen dann erfüllt werden? Welche Bedingungen muss ein finites Programm erfüllen, damit der Regelkreis intern stabil ist?

Kapitel 5

h_2 -optimale Systeme

Der h_2 -Entwurf benutzt wieder die Ergebnisse des Kapitels 3. Betrachtet man den Regelkreis 3.1, dann wäre eine Alternative: Man wählt Testfolgen \tilde{r} , \tilde{d} und geeignete Filter

$$r_z = F_r(z) \tilde{r}_z \quad \text{und} \quad d_z = F_d(z) \tilde{d}_z$$

und die Regelung wird dann so entworfen, dass die Größen

$$\|e_r\|_2^2 + \rho_r^2 \|u_r\|_2^2 \quad \text{bzw.} \quad \|e_d\|_2^2 + \rho_d^2 \|u_d\|_2^2$$

minimiert werden. Für diese Aufgabe werden noch einige Grundlagen benötigt.

Definition 5.1. Mit $l_2(-\infty, \infty)$ wird der Vektorraum der komplexen Zahlenfolgen $(f_i), (g_i), i = -\infty, \dots, \infty$ mit dem inneren Produkt

$$(f, g) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i g_i^*$$

und der Norm

$$\|f\|_2^2 = (f, f) < \infty$$

bezeichnet. Mit \sim wird die Abbildung $f^\sim = (f_{-i}^*)$ und mit σ die Verschiebeoperation $\sigma(f) = (f_{i+1})$ bezeichnet. Die Projektionen auf die kanonischen Teilintervalle $I \subset (-\infty, \infty)$ werden mit pr_I bezeichnet. Für den Fall $[m, m]$ wird einfach pr_m geschrieben.

Es gelte $f \in l_2[0, \infty) = \text{pr}_{[0, \infty)}(l_2(-\infty, \infty))$, dann wird die Menge der Funktionen

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} \tag{5.1}$$

mit h_2 bezeichnet. Gilt $f \in l_2(-\infty, -1] = l_2^\perp[0, \infty) = \text{pr}_{(-\infty, -1]} l_2(-\infty, \infty)$, dann wird

die Menge der Funktionen

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{-1} f_i z^{-i} \quad (5.2)$$

mit h_2^\perp bezeichnet.

Man beachte die Beziehung

$$f^\sim(z) = f^*(z) \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}_{=1}.$$

Die Wahl der Bezeichnung h_2, h_2^\perp ist offensichtlich, allerdings fehlt für diese Menge noch ein geeignetes inneres Produkt.

Lemma 5.1. Für Folgen in $l_2[0, \infty), l_2^\perp[0, \infty)$ gilt:

1. $f \in l_2[0, \infty)$:

$$|f(z)| < \infty, \quad z \in \mathbb{C}_{>1}.$$

2. $f \in l_2^\perp[0, \infty)$:

$$|f(z)| < \infty, \quad z \in \mathbb{C}_{<1}.$$

Beweis. Um 1. von Lemma 5.1 zu zeigen, beachte man, dass $|f(a)| \leq |\sum_{i=0}^{\infty} f_i a^{-i}| = |(f, g)|$ mit der Folge $g = ((a^*)^{-i})$ gilt. Wegen $|a|_i > 1$ gilt $a \in l_2[0, \infty)$. Mit $|f(a)| = |(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$, siehe Satz 1.1, erhält man das gewünschte Ergebnis. Da Punkt 2 analog zu 1 gezeigt werden kann, wird hier darauf verzichtet. ■

Man beachte, dass die Reihe $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i}$ für $f \in l_2[0, \infty)$ am Einheitskreis nicht notwendigerweise absolut konvergent sein muss. Ein einfaches Beispiel dazu ist $f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} 1/(i z^i)$. Beschränkt man sich auf die Menge der rationalen Funktionen, dann entfällt dieses Problem.

Anmerkung 5.1. Wenn im Folgenden mit komplexen Funktionen gerechnet wird, ist zu beachten, wo gewisse Reihendarstellungen konvergieren. So ist f mit

$$f(z) = \frac{z}{z-a}$$

für alle Werte von $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ wohl definiert. Man betrachte nun die beiden Reihendarstellungen

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^i \\ f_2(z) &= -\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^i. \end{aligned}$$

Gilt $|a| < 1$, dann konvergiert $f_1(z)$ für $z \in \mathbb{C}_{\geq 1, e}$ und es folgt $\text{pr}_{[0, \infty)}((a^i)) = f_1 \in l_2[0, \infty)$. Die Reihe $f_2(z)$ ist aber nicht für alle $z \in \mathbb{C}_{\leq 1}$ konvergent, bzw. man erhält $f_2 \notin l_2^\perp[0, \infty)$. Für $|a| > 1$ erhalten wir die gespiegelten Verhältnisse. Es konvergiert $f_2(z)$ für $z \in \mathbb{C}_{\leq 1}$ und es folgt $\text{pr}_{(-\infty, -1]}((a^i)) = f_2 \in l_2^\perp[0, \infty)$. Die Reihe $f_1(z)$ ist nun nicht für alle $z \in \mathbb{C}_{\geq 1, e}$ wegen $f_1 \notin l_2[0, \infty)$ konvergent. Gilt $|a| = 1$, dann konvergieren $f_1(z)$ für $z \in \mathbb{C}_{> 1, e}$ und $f_2(z)$ für $z \in \mathbb{C}_{< 1}$, allerdings gilt $f_1 \notin l_2[0, \infty)$ und $f_2 \notin l_2^\perp[0, \infty)$.

Diese Überlegungen lassen sich leicht auf rationale Funktionen erweitern. Für die rationale Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= f_a(z) + f_b(z) \\ f_a(z) &= \text{pr}_{h_2}(f(z)) \\ f_b(z) &= \text{pr}_{h_2^\perp}(f(z)) \end{aligned}$$

gelte, $|f_a(z)| < \infty$ für $z \in \mathbb{C}_{\geq 1, e}$, sowie $|f_b(z)| < \infty$ für $z \in \mathbb{C}_{\leq 1}$ und $\lim_{z \rightarrow 0} f_b(z) = 0$. Dann konvergieren die Reihen

$$\begin{aligned} f_a(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} f_{a,i} z^{-i}, \quad z \in \mathbb{C}_{\geq 1, e} \\ f_b(z) &= \sum_{i=1}^{\infty} f_{b,-i} z^i, \quad z \in \mathbb{C}_{\leq 1} \end{aligned}$$

und es gilt $\|f_a\|_2 < \infty$, sowie $\|f_b\|_2 < \infty$.

Nun betrachte man die Faltung

$$\begin{aligned} h_i &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j g_{i-j}^\sim \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j g_{j-i}^* \end{aligned}$$

für $f, g \in l_2(-\infty, \infty)$. Man erhält die Reihe

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i z^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} (\sigma^i(f), g) z^i + (f, g) + \sum_{i=1}^{\infty} (f, \sigma^i(g)) z^{-i},$$

wobei noch $|h_i| \leq \|f\| \|g\|$ gilt. Mit

$$h(z) = f(z) g^\sim(z)$$

sieht man, dass man das innere Produkt am nullten Term der Reihe ablesen kann. Nun betrachte man das Wegintegral

$$\int_{S_1} z^{-i} dz = \int_0^{2\pi} e^{-ij\varphi} de^{j\varphi} = j \int_0^{2\pi} e^{(1-i)j\varphi} d\varphi$$

entlang des Einheitskreises S_1 in der komplexen z -Ebene. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \int_{S_1} z^{-1} dz &= 2\pi j \\ \int_{S_1} z^{-i} dz &= 0 \quad i \neq 1 \end{aligned}$$

und man erhält damit die Beziehung

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi j} \int_{S_1} f(z) g^{\sim}(z) \frac{dz}{z}.$$

Insbesondere gilt noch

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{S_1} |f(z)|^2 \frac{dz}{z}.$$

Satz 5.1. Es gelte $f, g \in l_2(-\infty, \infty)$, dann folgt für $f(z), g(z)$ die Beziehung

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi j} \int_{S_1} f(z) g^{\sim}(z) \frac{dz}{z}. \quad (5.3)$$

Sind die Koeffizienten der Reihen noch reell, dann vereinfacht sich diese zu

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi j} \int_{S_1} f(z) g\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (5.4)$$

Man beachte, dass Übertragungsfunktionen in diesem Szenario anders interpretiert werden müssen.

Definition 5.2. Die Menge der Funktionen $F(z) \in \mathbb{R}(z)$, die auf dem Gebiet $\mathbb{C}_{\geq 1, e}$ beschränkt sind, wird mit h_∞ bezeichnet, und die Menge der Funktionen F , die auf dem Gebiet $\mathbb{C}_{\leq 1}$ beschränkt sind, mit \hat{h}_∞ .¹

Mit dieser Definition erhält man unmittelbar das nachfolgende Lemma:

Lemma 5.2. Es gelte $H(z) \in h_\infty$, $F(z) \in \hat{h}_\infty$, $u_z(z) \in h_2$, $v_z(z) \in h_2^\perp$, dann folgt:

1. $H(z) u_z(z) \in h_2$, $\text{pr}_{h_2^\perp}(F(z) u_z(z)) \subset V$, wobei $(\alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1}) \frac{1}{n_F}$, $n = \text{grad}(n(F))$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ eine Basis von V ist.
2. $F(z) v_z(z) \in h_2^\perp$, $\text{pr}_{h_2}(H(z) v_z(z)) \subset W$, wobei $(\beta_0 + \dots + \beta_{n-1} z^{n-1}) \frac{1}{n_H}$, $n = \text{grad}(n(H))$ mit $\beta_i \in \mathbb{R}$ eine Basis von W ist.

Auf den einfachen Beweis mit Hilfe von Partialbruchzerlegungen wird hier verzichtet.

¹Im Zusammenhang mit dem Raum h_∞ wird normalerweise eine Norm $\|F(z)\|_\infty = \max(F(z))$ mit $z \in \mathbb{C}_{\geq 1}$ eingeführt. Ansonsten fällt der Raum mit dem Ring der BIBO-stabilen Übertragungsfunktionen \mathbb{S}_+ zusammen.

5.1 Das Folgeproblem

Man betrachte das Problem, zu einer gegebenen Übertragungsfunktion $P(z) \in \mathbb{S}_+(z)$ wird ein Korrekturglied $Q(z) \in \mathbb{S}_+(z)$ so gesucht, dass der Fehler

$$\inf_{Q \in h_\infty} \|(1 - PQ)r\|_2 \quad (5.5)$$

für eine gewählte Testfolge $r \in l_2[0, \infty)$ minimal wird. Gilt $P^{-1}(z) \in \mathbb{S}_+(z)$ dann wird das Problem trivial. Dieser Fall wird ab jetzt ausgeschlossen.

Das Problem kann nun mit speziellen Übertragungsfunktionen, den Allpässen, wesentlich vereinfacht werden.

Definition 5.3. Eine Funktion $I(z) \in \mathbb{R}(z)$ heißt Allpass, wenn $I(z)I^\sim(z) = 1$ gilt.

Man überzeugt sich leicht, dass wegen Gleichung (5.3) das nachfolgende Lemma gilt.

Lemma 5.3. Es sei I ein Allpass, dann gilt $\|f\|_2 = \|If\|_2$.

Mit Hilfe von Allpässen erhält man eine interessante Zerlegung von Übertragungsfunktionen.

Lemma 5.4. Es gelte $P(z) \in h_\infty$ mit $P(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}_{=1}$, dann gilt

$$P(z) = I(z)O(z)$$

mit einem Allpass $I(z) \in \mathbb{S}_+(z)$ und einer weiteren Übertragungsfunktion $O(z) \in \mathbb{S}_+(z)$ mit $O^{-1}(z) \in \mathbb{S}_+(z)$. Gilt $P(z) = 0$ für gewisse $z \in \mathbb{C}_{=1}$, dann folgt $O(z) = 0$ eben dort.

Der einfache Beweis beruht auf der Zerlegung $z(P)(z) = a(z)b(z)$ des Zählerpolynoms von P , wobei $a(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}_{\geq 1}$ und $b(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}_{\leq 1}$ gilt. Dann erhält man

$$P(z) = \frac{a(z)b(z)}{n(P)(z)} = \underbrace{\frac{a(z)b^\sim(z)z^k}{n(P)(z)}}_{O(z)} \underbrace{\frac{b(z)}{z^k b^\sim(z)}}_{I(z)}$$

mit einer geeigneten Wahl von k .

Mit diesen Voraussetzungen können wir das obige Optimierungsproblem (5.5) einfach lösen. Zur Vereinfachung und ohne wesentliche Einschränkung setzen wir voraus, dass es keinen nicht trivialen Allpass $I_r(z) \in h_\infty$ mit $r_z = I_r(z)\hat{r}_z$ gibt. Es gilt

$$\begin{aligned} \|(1 - PQ)r\|_2^2 &= \|r_z - I(z)O(z)Q(z)r_z\|_2^2 \\ &= \|I^\sim(z)r_z - O(z)Q(z)r_z\|_2^2 \\ &= \left\| \text{pr}_{h_2}(I^\sim(z)r_z) + \text{pr}_{h_2^\perp}(I^\sim(z)r_z) - O(z)Q(z)r_z \right\|_2^2 \\ &= \left\| \text{pr}_{h_2}(I^\sim(z)r_z) - O(z)Q(z)r_z \right\|_2^2 + \left\| \text{pr}_{h_2^\perp}(I^\sim(z)r_z) \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Das Optimum folgt dann mit

$$Q(z) = \frac{\text{pr}_{h_2}(I^\sim(z)r_z)}{O(z)r_z}, \quad (5.6)$$

falls $O^{-1}(z) \in h_\infty$ gilt, andernfalls hat das Problem keine Lösung. Im Weiteren wird dann gezeigt, wie das Führungs- und Störproblem auf das Folgeproblem zurückgeführt werden kann.

5.2 Der Führungsentwurf

Der Führungsentwurf nach den Beziehungen (3.10) hat die Gestalt

$$\min_{Q \in h_\infty} \|(1 - ZQ)r\|_2^2 + \rho_r^2 \|NQr\|_2^2,$$

die durch quadratische Ergänzung auf die Form (5.5) gebracht wird. Es gilt, siehe auch Satz 5.1,

$$\begin{aligned} ((1 - Z(z)Q(z))r_z)^\sim (1 - Z(z)Q(z))r_z + (N(z)Q(z)r_z)^\sim \rho_r^2 N(z)Q(z)r_z = \\ ((B(z) - A(z)Q(z))r_z)^\sim (B(z) - A(z)Q(z))r_z + (C(z)r_z)^\sim C(z)r_z \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A^\sim(z)A(z) &= Z^\sim(z)Z(z) + \rho^2 N^\sim(z)N(z) \\ B(z) &= Z^\sim(z)(A^\sim)^{-1}(z) \\ C(z) &= \rho_r N(z)A^{-1}(z). \end{aligned}$$

Kritisch für diese Darstellung ist, ob man die Funktion $A(z)$ finden kann. Diese Frage beantwortet der nachstehende Satz.

Satz 5.2. Für $F \in \mathbb{R}(z)$ gelte $F(z) \geq a$ für $z \in \mathbb{C}_{=1}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, dann existiert eine Funktion $A(z)$, $A^{-1}(z) \in h_\infty$ so, dass gilt

$$A^\sim(z)A(z) = F(z).$$

Die Funktion $A(z)$ mit $A(1) = \sqrt{F(1)}$, heißt auch der Spektralfaktor von F .

Beweis. Man beachte, dass für $F(z) = A^\sim(z)A(z)$ gelten muss, damit die Bedingung am Einheitskreis erfüllt ist. Zu jeder Null- bzw. Polstelle z_i gibt es eine mit z_i^{-1} . Mit Hilfe dieser Eigenschaft erhält man

$$A(z) = k \frac{\prod_{i=1}^n (z - b_i)}{\prod_{i=1}^n (z - a_i)}$$

mit $|a_i| < 1$, $|b_i| < 1$ und $A(1) = \sqrt{F(1)}$. ■

Man beachte, dass zu $Z^\sim(z)Z(z) + \rho_r^2 N^\sim(z)N(z)$ immer der Spektralfaktor existiert. Nun nimmt das Optimierungsproblem die Form

$$\min_{Q \in h_\infty} \left\| \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} - A(z)Q(z) \right) r_z \right\|_2^2 + \rho_r^2 \left\| \frac{N(z)}{A(z)} r_z \right\|_2^2 \quad (5.7)$$

an. Sind noch die Voraussetzungen von Gleichung (5.6) erfüllt, dann folgt sofort

$$Q(z) = \frac{\text{pr}_{h_2} \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} r_z \right)}{A(z) r_z}.$$

5.2.1 Der Sprung als Testfunktion

Wie Gleichung (5.7) zeigt, ist es notwendig, dass $\left\| \frac{N(z)}{A(z)} r_z \right\| < \infty$. Hat die Strecke integrierenden Charakter, es gilt $N(1) = 0$, dann ist dies erfüllt. Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{Z^\sim(1)}{A^\sim(1)} \frac{z}{z-1} + h(z), \quad h(z) \in h_2^\perp$$

folgt dann sofort

$$Q(z) = \frac{Z^\sim(1)}{A^\sim(1)} \frac{1}{A(z)} = \frac{A(1)}{Z(1)A(z)}. \quad (5.8)$$

Hat die Strecke keinen integrierenden Charakter, dann ist die Fragestellung sinnlos. Allerdings kann man das Gütekriterium modifizieren. Eine Wahl wäre

$$\min_{\substack{Q \in h_\infty \\ Z(1)Q(1) = 1}} \left\| \left(1 - Z(z)Q(z) \right) \frac{z}{z-1} \right\|_2^2 + \rho_r^2 \left\| \left(\frac{N(1)}{Z(1)} - N(z)Q(z) \right) \frac{z}{z-1} \right\|_2^2.$$

Nach kurzer Rechnung erhält man das Problem

$$\min_{\substack{Q \in h_\infty \\ Z(1)Q(1) = 1}} \left\| \left(\frac{Z^\sim(z)Z(1) + \rho_r^2 N^\sim(z)N(1)}{A^\sim(z)Z(1)} - A(z)Q(z) \right) \frac{z}{z-1} \right\|_2^2 + \rho_r^2 \left\| \frac{N(z)Z(1) - Z(z)N(1)}{A(z)Z(1)} \frac{z}{z-1} \right\|_2^2,$$

das nun wieder einfach gelöst werden kann. Mit der Abkürzung

$$\hat{Z}(z) = Z(z) + \rho_r^2 N(z) \frac{N(1)}{Z(1)}$$

erhält man das Problem

$$\begin{aligned} \min_{\substack{Q \in h_\infty \\ Z(1)Q(1) = 1}} & \left\| \left(\frac{\hat{Z}^\sim(z)}{A^\sim(z)} - A(z)Q(z) \right) \frac{z}{z-1} \right\|_2^2 \\ & + \rho_r^2 \left\| \frac{N(z)\hat{Z}(1) - \hat{Z}(z)N(1)}{A(z)Z(1)} \frac{z}{z-1} \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Dieses ist formal äquivalent zum obigen, bereits gelösten Problem, und man erhält

$$Q(z) = \frac{\hat{Z}^\sim(1)}{A^\sim(1)} \frac{1}{A(z)} = \frac{A(1)}{Z(1)A(z)}. \quad (5.9)$$

5.3 Der Störentwurf

Der Störentwurf nach den Beziehungen (3.10) hat die Gestalt

$$\min_{K \in h_\infty} \|(1 - ZW)d\|_2^2 + \rho_d^2 \|NWd\|_2^2, \quad W = X + KN.$$

Mit den Ergebnissen für den Führungsentwurf folgt

$$\min_{K \in h_\infty} \left\| \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} - A(z)(X(z) + K(z)N(z)) \right) d_z \right\|_2^2 + \rho_d^2 \left\| \frac{N(z)}{A(z)} d_z \right\|_2^2 \quad (5.10)$$

mit

$$A^\sim(z)A(z) = Z^\sim(z)Z(z) + \rho_d^2 N^\sim(z)N(z).$$

Wir setzen voraus, dass die Funktion $N(z)$ Nullstellen in $\mathbb{C}_{>1}$ hat, damit der Störentwurf nicht formal mit dem Führungsentwurf zusammenfällt. Sind noch die Voraussetzungen von Gleichung (5.6) erfüllt, dann folgt sofort

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{\text{pr}_{h_2} \left(I^\sim(z) \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} - A(z)X(z) \right) d_z \right)}{A(z)O(z)d_z} . \\ N(z) &= I(z)O(z) . \end{aligned}$$

Man beachte, dass im Allgemeinen $N(z)$ keine Nullstellen am Einheitskreis haben darf.

5.3.1 Der Sprung als Testfunktion

Wie Gleichung (5.10) zeigt, ist es notwendig, dass $\left\| \frac{N(z)}{A(z)} d_z \right\| < \infty$ zutrifft. Hat die Strecke integrierenden Charakter, es gilt $N(1) = 0$, dann ist dies erfüllt. Im Prinzip wäre man

fertig, aber da nun d spezifiziert ist, kann man das Ergebnis wieder detaillierter angeben: Es gilt

$$\begin{aligned} I^\sim(z) \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} - A(z) X(z) \right) \frac{z}{z-1} &= \frac{I^\sim(z)}{A^\sim(z)} (Z^\sim(z) - A^\sim(z) A(z) X(z)) \frac{z}{z-1} \\ &= h_a(z) + h_b(z), \quad h_a(z) \in h_2, \quad h_b(z) \in h_2^\perp \end{aligned}$$

wegen $Z^\sim(1) = A^\sim(1) A(1) X(1)$ und man erhält

$$K(z) = \frac{h_a(z)}{O(z) A(z) \frac{z}{z-1}}.$$

Hat $O(z)$ außer bei $z = 1$ eine einfache und sonst keine weitere Nullstelle in $\mathbb{C}_{=1}$, dann gilt $(O(z) \frac{z}{z-1})^{-1} \in h_\infty$. Offensichtlich gilt auch

$$I^\sim(z) A(z) X(z) \frac{z}{z-1} = \frac{c(z)}{z(I(z))} \frac{z}{z-1} - h_a(z), \quad h_a(z) \in h_2$$

und damit

$$I^\sim(z) \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} - A(z) X(z) \right) \frac{z}{z-1} = I^\sim(z) \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} - C(z) \right) \frac{z}{z-1} + h_a(z),$$

$h_a(z) \in h_2$ mit

$$C(z) = \frac{c(z)}{n(I(z))}, \quad C(1) = \frac{Z^\sim(1)}{A^\sim(1)} = \frac{A(1)}{Z(1)}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} I^\sim(z) \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} - A(z) W(z) \right) \frac{z}{z-1} \\ &= I^\sim(z) \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} - A(z) (X(z) + K(z) N(z)) \right) \frac{z}{z-1} \\ &= I^\sim(z) \left(\frac{Z^\sim(z)}{A^\sim(z)} - C(z) \right) \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

folgt

$$W(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$$

am optimalen Punkt. Zum Vergleich der Ergebnisse ist zweckmäßig die normierte Funktion

$$A(1) C_n(z) = C(z) Z(1)$$

einzuführen, die dann die Interpolationsbedingung

$$C_n(1) = 1$$

erfüllt. Es gilt dann

$$W(z) = \frac{A(1)C_n(z)}{Z(1)A(z)}, \quad (5.11)$$

wobei $C_n(z)$ noch die Interpolationsbedingungen

$$C_n(z_i) = \frac{Z(1)}{A(1)}A(z_i)X(z_i) = Z(1)\frac{Z^\sim(z_i)}{A^\sim(z_i)} = \frac{Z(1)A(z_i)}{A(1)Z(z_i)} \quad (5.12)$$

für alle Nullstellen z_i von $N(z)$ außerhalb des Einheitskreises erfüllt.

Hat die Strecke keinen integrierenden Charakter, dann wird das Gütekriterium

$$\min_{\substack{W \in h_\infty \\ Z(1)W(1) = 1}} \left\| (1 - Z(z)W(z)) \frac{z}{z-1} \right\|_2^2 + \rho_d^2 \left\| \left(\frac{N(1)}{Z(1)} - N(z)W(z) \right) \frac{z}{z-1} \right\|_2^2$$

betrachtet. Mit Hilfe der vorigen Überlegungen erhält man mit

$$\hat{Z}(z) = Z(z) + \rho_d^2 N(z) \frac{N(1)}{Z(1)}$$

das Problem

$$\min_{\substack{K \in h_\infty \\ Z(1)W(1) = 1}} \left\| \left(\frac{\hat{Z}^\sim(z)}{A^\sim(z)} - A(z)(X(z) + K(z)N(z)) \right) \frac{z}{z-1} \right\|_2^2 + \rho_d^2 \left\| \frac{N(z)\hat{Z}(1) - \hat{Z}(z)N(1)}{A(z)Z(1)} \frac{z}{z-1} \right\|_2^2,$$

das nun wieder formal äquivalent zu vorigen Problem ist. Man erhält

$$C(z) = \frac{c(z)}{n(I(z))}, \quad C(1) = \frac{\hat{Z}^\sim(1)}{A^\sim(1)} = \frac{A(1)}{Z(1)},$$

sowie

$$W(z) = \frac{C(z)}{A(z)}.$$

Benutzt man noch die normierte Funktion $A(1)C_n(z) = C(z)Z(1)$, dann folgt

$$W(z) = \frac{A(1)C_n(z)}{Z(1)A(z)} \quad (5.13)$$

zusammen mit den Interpolationsbedingungen

$$C_n(z_i) = \frac{Z(1)}{A(1)}A(z_i)X(z_i) = \frac{Z(1)Z^\sim(z_i)}{A(1)A^\sim(z_i)} = \frac{Z(1)A(z_i)}{A(1)Z(z_i)} \quad (5.14)$$

für alle Nullstellen z_i von $N(z)$ außerhalb des Einheitskreises sowie für $z = 1$.

5.4 Vorgaben des Stabilitätsbereichs

Wählt man nun für die Norm $\| \cdot \|$ die Beziehung

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i)^2 a^{2i},$$

dann kann man anstelle der Folge $f = (f_0, f_1, \dots)$ die Folge $f_a = (f_0 a^0, f_1 a^1, \dots)$ betrachten. Die z -Transformierten stehen in der Verbindung

$$f_a(z) = f\left(\frac{z}{a}\right).$$

Diese Modifikation kann einfach beim Entwurf berücksichtigt werden. So führt man den Führungsentwurf mit den Daten

$$\begin{aligned} P_{a_r}(z) &= P\left(\frac{z}{a_r}\right) \\ r_{z,a}(z) &= r_z\left(\frac{z}{a_r}\right) \end{aligned}$$

und den Störentwurf mit

$$\begin{aligned} P_{a_d}(z) &= P\left(\frac{z}{a_d}\right) \\ d_{z,a_d}(z) &= d_z\left(\frac{z}{a_d}\right) \end{aligned}$$

durch. Den Regler erhält man dann als

$$\begin{aligned} Q(z) &= Q_{a_r}(z a_r) \\ W(z) &= W_{a_d}(z a_d). \end{aligned}$$

5.5 Reglerrealisierung

Die Berechnung des Reglers wird hier nur für den Sprung als Testfunktion hergeleitet. Sie basiert auf den Beziehungen

$$Q(z) = \frac{A_r(1)}{Z(1) A_r(z)}, \quad A_r^{\sim}(z) A_r(z) = Z^{\sim}(z) Z(z) + \rho_r^2 N^{\sim}(z) N(z),$$

siehe die Gleichungen (5.8, 5.9) und

$$W(z) = \frac{A_d(1) C_n(z)}{Z(1) A_d(z)}, \quad A_d^{\sim}(z) A_d(z) = Z^{\sim}(z) Z(z) + \rho_d^2 N^{\sim}(z) N(z),$$

siehe die Gleichungen (5.11, 5.13). Die Beziehungen

$$ZQ = \frac{VP}{1 + RP}, \quad ZW = \frac{RP}{1 + RP} \quad (5.15)$$

dienen zur Berechnung von V und R . Wählt man die Faktorisierung

$$P(z) = \frac{Z(z)}{N(z)}, \quad Z(z) = \frac{z(P)}{z^n}, \quad N(z) = \frac{n(P)}{z^n},$$

dann gilt für einen Spektralfaktor A ,

$$A(z) = \frac{z(A)(z)}{z^n}.$$

Mit der zweiten Beziehung von (5.15) folgt

$$\begin{aligned} Z(z) \frac{A_d(1) C_n(z)}{Z(1) A_d(z)} &= \frac{R(z) P(z)}{1 + R(z) P(z)} \\ \frac{A_d(1) z(P)(z) z(C_n)(z)}{Z(1) n(I)(z) z(A_d)(z)} &= \frac{z(P)(z) z(R)(z)}{z(P)(z) z(R)(z) + n(P)(z) n(R)(z)}. \end{aligned}$$

Nun gelte für P die Beziehung $n(p)(z) = a(z)(z-1)z(I)(z)$ mit dem EK-Polynom a . Wählt man

$$z(R)(z) = A_d(1) z(C_n)(z) a(z)$$

dann folgt

$$(z-1)z(I)(z)n(R)(z) = Z(1)n(I)(z)z(A_d)(z) - A_d(1)z(P)(z)z(C_n)(z).$$

Diese Gleichung ist jedoch nur dann nach $n(R)(z)$ auflösbar, wenn für alle Nullstellen z_i von $(z-1)z(I)(z)$ gilt

$$\begin{aligned} A_d(1)z(P)(z_i)z(C_n)(z_i) &= Z(1)n(I)(z_i)z(A_d)(z_i) \\ C_n(z_i) &= \frac{Z(1)A_d(z_i)}{A_d(1)Z(z_i)}. \end{aligned}$$

Dies sind aber genau die Interpolationsbedingungen (5.12). Man erhält damit einen Regler

$$R(z) = \frac{A_d(1)z(C_n)(z)a(z)}{(Z(1)n(I)(z)z(A_d)(z) - A_d(1)z(P)(z)z(C_n)(z)) / ((z-1)z(I)(z))} \quad (5.16)$$

der Ordnung $n-1$. Das Vorfilter V folgt dann noch aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{VRP}{1 + RP} &= ZQR \\ V &= \frac{Q}{W}R, \end{aligned}$$

siehe Gleichung (5.15) und man erhält

$$\begin{aligned}
 V(z) &= \frac{A_r(1) A_d(z) R(z)}{A_d(1) A_r(z) C_n(z)} \\
 &= \frac{A_r(1) z(A_d)(z) n(I)(z) A_d(1) z(C_n)(z) a(z)}{A_d(1) z(A_r)(z) z(C_n)(z) n(R)(z)} \\
 &= \frac{A_r(1) z(A_d)(z) A_d(1) a(z) n(I)(z)}{\underbrace{A_d(1) z(A_r)(z)}_{V_2(z)} \underbrace{n(R)(z)}_{V_1(z)}}.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Gilt $A_r = A_d$, dann folgt $V_2 = 1$, gilt $z(I) = n(I) = 1$. Dann folgt $V_1 = R$.

Die Herleitung für den Fall P mit $n(p)(z) = a(z)z(I)(z)$ mit dem EK-Polynom a ist vollkommen analog zum Vorigen. Man erhält dann den Regler R ,

$$R(z) = \frac{A_d(1) z(C_n)(z) a(z)}{(Z(1) n(I)(z) z(A_d)(z) - A_d(1) z(P)(z) z(C_n)(z)) / z(I)(z)}$$

der Ordnung n . Wegen der Interpolationsbedingungen (5.14) folgt dann noch

$$z(I)(1) n(R)(1) = 0$$

oder $n(R)(1) = 0$.

Einige Bemerkungen

Dieses Kapitel ist wieder eine Anwendung der Grundlagen, die in den vorigen Kapiteln präsentiert worden sind. Im Gegensatz zum $\|\cdot\|_1$ -Entwurf, der eine Operatornorm minimiert, wird jetzt die Norm $\|\cdot\|_2$ von Ausgängen für festgelegte Eingänge bewertet. Der Entwurf selbst erfolgt im Bildbereich, da man hier besonders einfache Beziehungen für Eingrößensysteme bekommt. Es soll aber nicht verschwiegen werden, dass alle Schritte auch mit Hilfe von Zustandsdarstellung durchführbar sind.

5.6 Aufgaben

Aufgabe 5.1. Entwickeln Sie ein Programm in Matlab oder Maple, das die Zerlegung nach Lemma 5.4 berechnet.

Aufgabe 5.2. Entwickeln Sie ein Programm in Matlab oder Maple, das den Spektralfaktor nach Satz 5.2 berechnet.

Aufgabe 5.3. Entwickeln Sie ein Programm in Matlab oder Maple, das den h_2 -Führungs- und h_2 -Störentwurf für Testsignale $r, d \in l_2[0, \infty)$ berechnet.

Aufgabe 5.4. Entwickeln Sie ein Programm in Matlab oder Maple, das den h_2 -Führungs- und h_2 -Störentwurf für den Sprung als Testsignal berechnet.

Aufgabe 5.5. Erweitern Sie die obigen Programme so, dass Sie den Stabilitätsbereich nach Abschnitt 5.4 vorgeben können.

Aufgabe 5.6. Ersetzen Sie nun die Testfunktionen r, d durch $r_z = F_r(z) \tilde{r}_z$, $d_z = F_d(z) \tilde{d}_z$ mit $\tilde{r}, \tilde{d} \in l_2[0, \infty)$ oder Sprüngen.

Kapitel 6

Einfache elektrische Netze

Elektrische Netze werden oftmals aus idealisierten Elementen aufgebaut, reale Bauelemente werden dann mit Hilfe idealisierter Elemente approximiert. Die einzelnen Elemente werden geeignet zu einem Netzwerk zusammengefügt. Zur Beschreibung von idealisierten Elementen werden hier Pole benutzt, die zu n -Tupeln, den n -Polen, zusammengefasst werden. Von praktischer Bedeutung sind die Fälle $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Für $n = 2$ verwendet man die Bezeichnung Zweipol, für $n = 3$ die Bezeichnung 3-Pol und für $n = 4$ die Bezeichnung 4-Pol. Man beachte, dass der Name 4-Pol in der älteren Literatur auch für ein 2-Tor verwendet wird. Jedem Pol¹ q_j eines n -Pols q wird ein Potential $p_{q,j}$ und ein Strom $i_{q,j}$ zugeordnet, wobei noch gilt

$$i_q + \sum_{j=1}^n i_{q,j} = 0 \quad (6.1)$$

mit dem Summenstrom i_q .

Im Weiteren werden 1-Pole zum Aufbau von Netzen verwendet. Werden die Pole (a_1, \dots, a_m) mit dem 1-Pol q verbunden, dann gilt

$$p_q = p_{a_i}, \quad i_q + \sum_{j=1}^m i_{a_j} = 0. \quad (6.2)$$

n -Pole werden dann mit Knoten zu einem Netzwerk verbunden. Knoten sind spezielle 1-Pole:

- Knoten q mit Potenzialvorgabe: Das Potential p_q kann vorgegeben werden, es gelten die Beziehungen (6.2).
- Knoten q ohne Potenzialvorgabe: Es gelten die Beziehungen (6.2) mit $i_q = 0$.

¹Im Falle $n = 1$ wird der Index j unterdrückt.

Ein 1–Tor (oder Tor) q ist ein spezieller 2–Pol (q_1, q_2) . Es gelten die Beziehungen (6.1) mit $i_q = 0$, bzw.

$$i_q = i_{q_1} = -i_{q_2} . \quad (6.3)$$

Einem 1–Tor wird noch eine Spannung u_q gemäß der Beziehung

$$u_q = p_{q,1} - p_{q,2} \quad (6.4)$$

zugeordnet. Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten, Strom- und Spannungsquellen können als spezielle 1–Tore modelliert werden. 3– und 4–Pole sind z.B. in Drehstromnetzen von Bedeutung, sie werden hier aber nicht weiter betrachtet. Mit Hilfe von Toren können weitere ideale Bauelemente modelliert werden wie strom/spannungsgesteuerte Strom- oder Spannungsquellen, ideale Übertrager oder Operationsverstärker.

Zur Vervollständigung der Netzwerkgleichungen werden noch die Beziehungen für die einzelnen Bauelemente benötigt. Bei einfachen Netzwerken wie hier wird angenommen, dass diese Beziehungen nur von den Torströmen (6.3) und den Torspannungen (6.4) abhängen. Nun ist es einfach, das Gleichungssystem für so ein Netzwerk zu erstellen.

1. Man erstellt Variablenlisten für die Knotenpotenziale, die Torspannungen und Torströme.
2. Man erstellt das System der Netzwerkgleichungen, es umfasst die Knotenbeziehungen (6.2), die Kantenbeziehungen (6.3, 6.4), sowie die Beziehungen für die Bauelemente. Man beachte, dass mindestens ein Knoten mit Potenzialvorgabe vorhanden sein muss.
3. Man wählt aus den Listen von 1 jene Variablen, die nicht zur Beschreibung des Problems benötigt werden, aus und eliminiert diese Variablen aus den Netzwerkgleichungen. Die verbleibenden Beziehungen bilden dann die gewünschten Netzwerkgleichungen.

Beispiel 6.1. Es wird ein Netzwerk betrachtet, das als dynamische Elemente nur aus Induktivitäten mit

$$\dot{i} = \frac{1}{L}u ,$$

Kapazitäten mit

$$\dot{u} = \frac{1}{C}i ,$$

sowie Widerständen, idealen Verstärkern, Strom- und Spannungsquellen aufgebaut ist. Ist das Netz einfach, dann ist die Wahl, Spannungen der Kapazitäten und Ströme der Induktivitäten für den Zustand zulässig. Einige der Quellen modellieren die Eingänge, gewisse Spannungen und Ströme werden für den Ausgang gewählt. Gemäß des obigen Rezepts werden die Netzwerkgleichungen hergeleitet, wobei alle Größen bis auf die Ströme und Spannungen der dynamischen Elemente, sowie die Ausgangs- und Eingangsgrößen eliminiert werden. Nun löst man die verbleibenden Gleichungen nach den Spannungen

der Induktivitäten, den Strömen der Kapazitäten und den Ausgangsgrößen auf. Mit den obigen Differenzialgleichungen erhält man dann die Gleichungen des Netzwerks in Zustandsform.

Dieses Beispiel ist nicht nur einfach auf komplexere Netzwerke zu erweitern, es zeigt auch, dass man mit einem relativ großen Gleichungssystem beginnt, das erst vereinfacht werden muss. Auch sind die Knotenbeziehungen (6.2) und die Kantenbeziehungen (6.3, 6.4) einfache lineare Gleichungen. Es ist nun naheliegend, diese zuerst zu vereinfachen, wozu man sich der elementaren Graphentheorie bedient.

6.1 Grundbegriffe der Graphentheorie

Die *Verbindungsstellen von Polen (Klemmen)* sind in einem Netzwerksgraphen die *Knoten*, die Tore werden durch *Kanten* dargestellt.

Definition 6.1. Ein Graph G besteht aus einer Menge der Knoten X und der Menge der Kanten Y . Jedem Element $y \in Y$ wird genau ein geordnetes Paar (a, b) (ungeordnetes Paar $[a, b]$) von Knoten $a, b \in X$ zugeordnet. Ist jeder Kante ein geordnetes Paar von Knoten zugeordnet, heißt der Graph *gerichtet*, und er wird mit

$$G = (X, Y)$$

bezeichnet. In diesem Fall heißen die Kanten auch *Bögen*. Im anderen Fall heißt der Graph ungerichtet, er wird mit

$$G = [X, Y]$$

bezeichnet (Bild 6.1).

Oft ist es notwendig, Teile eines Graphen zu betrachten (Bild 6.2).

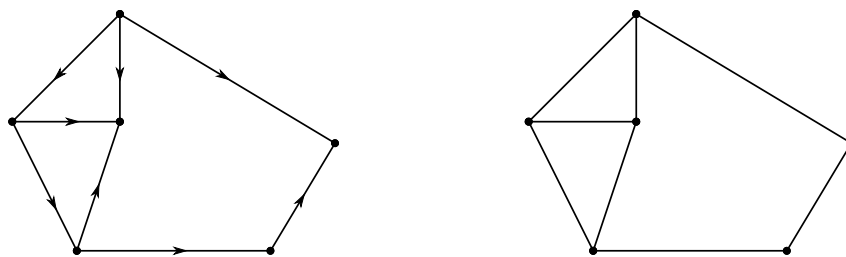


Bild 6.1: Linkes Bild: Gerichteter Graph, Rechtes Bild: Ungerichteter Graph.

Definition 6.2. Ist $G = (X, Y)$ oder $G = [X, Y]$, so wird jeder Graph $G' = (X', Y')$ bzw. $G' = [X', Y']$ mit $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ als *Untergraph* bezeichnet. G' heißt *Teilgraph*, wenn $X = X'$ gilt.

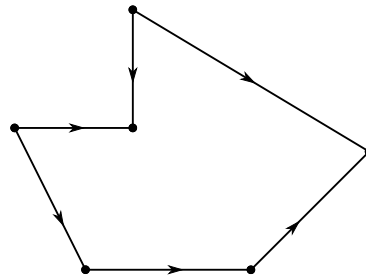


Bild 6.2: Zum Begriff Teilgraph.

Wenn man die Struktur eines Netzwerkes untersuchen will, tritt oft die Frage auf, ob es möglich ist, von einem Knoten a zu einem anderen Knoten b zu gelangen.

Definition 6.3. $G = (X, Y)$ sei ein gerichteter Graph. Eine *Kantenfolge*

$$z = (y_1, y_2, \dots, y_k), y_i \in Y, i = 1, \dots, |Y| ,$$

wobei y_{i-1}, y_i einen Knoten von y_i und y_i, y_{i+1} den anderen Knoten von y_i für $i = 2, \dots, k - 1$ gemeinsam haben, heißt *Kette*. $k = l(z)$ heißt die *Länge* der Kette z . Kommt in einer Kette keine Kante mehrmals vor, heißt sie *einfach* (Bild 6.3). Eine einfache Kette, die geschlossen ist, d.h. y_1 und y_n haben einen gemeinsamen Knoten, wird *Zyklus* genannt (Bild 6.3). Eine einfache Kette, in der jeder Knoten nur einmal vorkommt, heißt *elementar* (Bild 6.3). Eine geschlossene elementare Kette wird *Elementarzyklus* (Bild 6.3) genannt.

Damit kommt man zum Begriff des zusammenhängenden Graphens.

Definition 6.4. Ein Graph $G = (X, Y)$ heißt *zusammenhängend*, wenn jedes Paar von Knoten durch eine Kette verbunden werden kann. Ein *maximaler, zusammenhängender* Untergraph heißt *Komponente*.

Mit maximal ist hier gemeint, dass für jeden anderen Graphen mit größerer Knoten- oder Kantenmenge diese Eigenschaft nicht zutrifft.

6.2 Zyklen eines Graphen

Ketten und Zyklen eines Graphen $G = (X, Y)$ lassen sich einfach durch Vektoren darstellen. Man geht dabei von einer einmal festgelegten Folge aller Kanten $(y_1, y_2, \dots, y_{|Y|})$ aus. Jeder einfachen Kette

$$z = (y_\alpha, y_\beta, \dots, y_\eta) \tag{6.5}$$

wird ein durch die Aufeinanderfolge der Bögen von links nach rechts festgelegter Durchlaufsinns zugeordnet. Damit lassen sich die Elemente von z in zwei Mengen aufspalten.

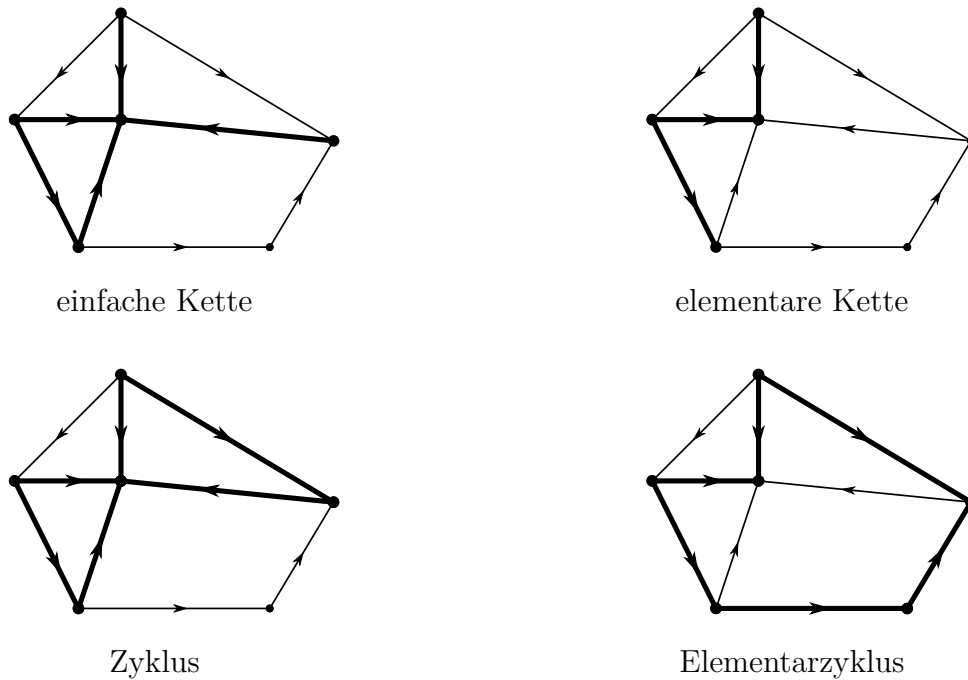


Bild 6.3: Ketten und Zyklen.

z^+ umfasst jene Bögen, die im Durchlaufsinne gerichtet sind, und z^- umfasst jene Bögen, die gegen den Durchlaufsinne gerichtet sind. Nun wird z der Vektor $z \in \mathbb{R}^{|Y|}$,

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{|Y|} \end{bmatrix}$$

nach der Vorschrift

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } y_i \in z^+ \\ -1 & \text{falls } y_i \in z^- \\ 0 & \text{falls } y_i \notin z^+ \cup z^- \end{cases} \quad (6.6)$$

zugeordnet. Mit der Summe von Zyklen ist im Folgenden immer die Summe der den Zyklen zugeordneten Vektoren gemeint.

Satz 6.1. Jeder Zyklus z ist als Summe von Elementarzyklen darstellbar, die paarweise keine Kante gemeinsam haben.

Zum Beweis nehme man an, dass der Zyklus z in der Form

$$z = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, \dots, y_l, y_{l+1}, \dots, y_r)$$

vorliege. Man durchlaufe z von links nach rechts, bis man auf einen Knoten x stößt, den man bereits durchlaufen hat. x sei den Kanten y_{k-1}, y_k und y_l, y_{l+1} gemeinsam. Man teilt

nun z in die Ketten

$$\tilde{z} = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{l+1}, \dots, y_r) \quad \text{und} \quad z_1 = (y_k, \dots, y_l)$$

auf, die ihrer Konstruktion nach wieder Zyklen sind. z_1 ist sogar ein Elementarzyklus. Man wiederholt nun diese Vorgangsweise solange für \tilde{z} , bis nur mehr Elementarzyklen auftreten. Dass die Vektorsumme der Elementarzyklen z ergibt, folgt unmittelbar aus Vorschrift 6.6.

Definition 6.5. Eine Menge $B = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ von Elementarzyklen eines Graphen $G = (X, Y)$ heißt *Zyklensbasis* von G , wenn die Elemente von B linear unabhängig sind, und jeder Zyklus z als Linearkombination der Form

$$z = \sum_i^k \alpha_i z_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k,$$

dargestellt werden kann. $k = k(G)$ ist die Dimension der Basis, und sie wird auch *zyklomatische Zahl* genannt.

Man beachte, dass zu einem Graphen G durchaus mehrere Zyklensbasen existieren können. Diese Basen haben jedoch alle dieselbe Dimension.

Satz 6.2. Der Graph $G = (X, Y)$ besitze $n = |X|$ Knotenpunkte, $m = |Y|$ Kanten und p Komponenten. Dann gilt

$$k(G) = m - n + p.$$

Beweis. Für einen Graphen mit $n = 2$, $m = 1$ und $p = 1$ ist obiger Satz offensichtlich richtig. Das Weitere folgt durch Induktion, indem man annimmt, dass er für gegebenes m , n und p richtig sei. Fügt man eine Kante y hinzu, verbindet man zwei Knoten x_i und x_j . Sind x_i und x_j Knoten verschiedener Komponenten, werden zwar die Komponenten verbunden, es entsteht aber kein neuer Zyklus. Somit ist obiger Satz für diesen Fall korrekt. Sind x_i und x_j Knoten ein und derselben Komponente, werden diese Knoten durch die triviale Kette (y) verbunden. Da x_i und x_j Knoten derselben Komponente sind, sind sie mindestens durch eine andere elementare Kette $z_1 = (y_i, \dots, y_k)$ verbunden. Die Kette (y_i, \dots, y_k, y) ist also ein neuer Elementarzyklus. Damit ist auch dieser Fall abgedeckt. Fügt man nun einen Knoten x hinzu, entsteht trivialerweise eine neue Komponente, und die Zahl der Zyklen bleibt unverändert. ■

6.3 Der Baum

Für das Aufstellen von Gleichungssystemen von Netzwerken sind zyklensfreie Graphen von Bedeutung (siehe Bild 6.4).

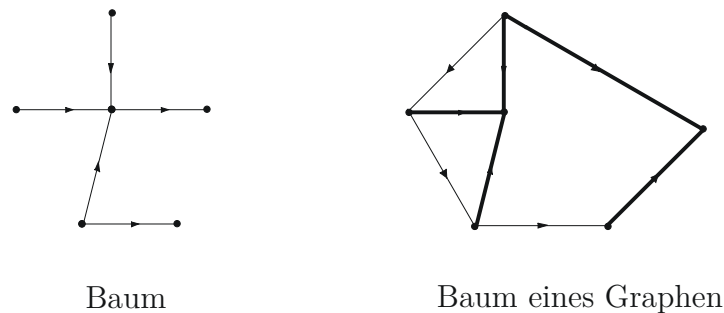


Bild 6.4: Zum Baum.

Definition 6.6. Ein zusammenhängender Graph $H = (X, Y)$ mit mindestens einem Knoten, der keine Zyklen besitzt, heißt *Baum*. Ist H nicht zusammenhängend, trifft aber obige Eigenschaft auf jede Komponente zu, nennt man H einen *Wald*.

Die wichtigsten Eigenschaften eines Baumes fasst der nachstehende Satz zusammen:

Satz 6.3. Folgende Eigenschaften sind äquivalent, damit ein Graph $H = (X, Y)$ mit $|X| = n \geq 1$ Knoten ein Baum ist:

1. H ist zusammenhängend und zyklensfrei.
2. H ist zyklensfrei und hat $n - 1$ Kanten.
3. H ist zusammenhängend und hat $n - 1$ Kanten.
4. H ist zyklensfrei, durch Hinzufügen einer Kante enthält der neue Graph genau einen Zyklus.
5. H ist zusammenhängend, durch Entfernen einer Kante zerfällt der Graph in Komponenten.
6. Jedes Paar von Knoten ist durch genau eine elementare Kette verbunden.

Zum Beweis der (elementaren) Eigenschaften dieses Satzes siehe den Abschnitt Aufgaben. Bäume als Teilgraphen von Graphen spielen eine besondere Rolle.

Satz 6.4. Jeder zusammenhängende Graph $G = (X, Y)$ besitzt einen Baum $H = (X, Y')$ mit $Y' \subseteq Y$.

Beweis. Zum Beweis dieses Satzes suche man eine Kante y von G , die man entfernen kann, ohne den Zusammenhang zu zerstören. Existiert keine solche Kante, ist man wegen Satz 6.3 fertig. Anderenfalls wiederhole man dieses Verfahren, das wegen der endlichen Kantenanzahl zum Ziel führen muss. ■

Für die Netzwerkstheorie ist es entscheidend, dass Bäume und Zyklenbasen eng zusammenhängen.

Satz 6.5. $G = (X, Y)$ sei ein zusammenhängender Graph mit dem Baum $H = (X, Y')$ mit $Y' \subseteq Y$. Wird eine Kante $y \in Y - Y'$ hinzugefügt, so enthält der Graph $H' = (X, Y' \cup \{y\})$ genau einen *Elementarzyklus* \mathbf{z}_y . Die Menge aller so gebildeten Zyklen $\{\mathbf{z}_y\}$ mit $y \in Y - Y'$ bildet eine *Zyklenbasis*.

Beweis. Zum Beweis beachte man vorerst, dass im Falle von $Y = Y'$ nichts mehr zu beweisen ist. Ist Y' eine echte Teilmenge von Y , dann enthält $H' = (X, Y' \cup \{y\})$ nach Satz 6.1 genau einen Elementarzyklus. Gilt $|X| = n$ mit n , der Anzahl der Knoten von G , und $|Y| = m$, der Anzahl der Kanten von G , dann folgt nach Satz 6.3 $|Y'| = n - 1$. Es gilt also $|Y - Y'| = m - |Y'| = m - n + 1$. Man erhält also $k(G)$ Elementarzyklen (siehe Satz 6.4). Dass diese Elementarzyklen linear unabhängig sind, folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass sie jeweils eine Kante enthalten, die in den anderen so gebildeten Elementarzyklen nicht enthalten ist. ■

6.4 Strom und Spannung eines Graphen

Alle bisherigen Betrachtungen sagen im wesentlichen etwas über die Struktur des Graphen und damit über die des Netzwerkes aus. Als nächstes werden dem Graphen Größen zugeordnet, mit deren Hilfe man physikalische Vorgänge beschreiben kann. Ordnet man z.B. den Kanten elektrische Ströme und den Knoten Potentiale zu, kann man elektrische Vorgänge beschreiben. Welche Größen wird man den Knoten und Kanten zuordnen müssen, damit man Gasnetze oder Wassernetze beschreiben kann?

Definition 6.7. $G = (X, Y)$ sei ein zusammenhängender Graph. Ordnet man jeder Kante y eine reelle Zahl w_y zu, dann heißt w_y eine Bewertung der Kante y . Für eine festgelegte Folge $(y_1, y_2, \dots, y_{|Y|})$ aller Kanten von G heißt der Vektor

$$w = \begin{bmatrix} w_{y_1} \\ w_{y_2} \\ \vdots \\ w_{y_{|Y|}} \end{bmatrix} \quad \text{oder kürzer} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{|Y|} \end{bmatrix}$$

eine *Bewertung* von G .

Man ordnet nun einem Knoten $x \in X$ zwei Mengen von Kanten zu. P_x ist die Menge aller mit x verbundenen Kanten, deren Bewertung *positiv* gezählt wird, und M_x ist die Menge aller mit x verbundenen Kanten, deren Bewertung *negativ* gezählt wird. Jedem Knoten x wird nun die Funktion

$$\varphi(x) = \sum_{j \in P_x} w_j - \sum_{j \in M_x} w_j$$

zugeordnet. Man kann nun φ auf Mengen von Knoten X' erweitern, und meint mit $\varphi(X')$ dann die Funktion

$$\varphi(X') = \sum_{x \in X'} \varphi(x).$$

Satz 6.6. Für jede Bewertung \mathbf{w} eines Graphen $G = (X, Y)$ gilt

$$\varphi(X) = 0.$$

Zum Beweis beachte man, dass gilt

$$\varphi(X) = \sum_{x \in X} \varphi(x) = \sum_{x \in X} \left(\sum_{j \in P_x} w_j - \sum_{j \in M_x} w_j \right).$$

Mit $x_i \neq x_j$ und

$$P_{x_i} \cap P_{x_j} = \{\} \quad \text{bzw.} \quad M_{x_i} \cap M_{x_j} = \{\} \quad \text{für alle} \quad x_i, x_j \in X$$

folgt

$$\bigcup_{x \in X} P_x = Y \quad \text{und} \quad \bigcup_{x \in X} M_x = Y,$$

und damit

$$\varphi(X) = \sum_{j \in Y} w_j - \sum_{j \in Y} w_j = 0.$$

Definition 6.8. Gilt für eine Bewertung w auf einem Graphen $G = (X, Y)$

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in X,$$

dann nennt man w einen Strom auf G . Einen Strom bezeichnet man mit i .

Ein Strom besitzt also weder *Quellen* noch *Senken*. Man kann nun immer einen Graphen so erweitern, dass anstelle einer Bewertung w nur mehr Ströme auftreten (siehe den Abschnitt Aufgaben).

Satz 6.7. Sind i_1 und i_2 Ströme eines Graphen G , dann ist auch

$$i = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 \quad \text{für} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

ein Strom.

Um diesen Satz zu zeigen, beachte man nur

$$\varphi(x) = \sum_{j \in P_x} i_j - \sum_{j \in M_x} i_j = \alpha_1 \left(\sum_{j \in P_x} i_{1,j} - \sum_{j \in M_x} i_{1,j} \right) + \alpha_2 \left(\sum_{j \in P_x} i_{2,j} - \sum_{j \in M_x} i_{2,j} \right) = 0.$$

Da jeder Zyklenvektor \mathbf{z} ein Strom ist (warum?), gelangt man zum nachfolgenden Satz.

Satz 6.8. $G = (X, Y)$ sei ein zusammenhängender Graph mit einem Baum $H = (X, Y')$. $Y - Y' = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ seien die Kanten, die nicht zum Baum gehören, und $B = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ die zum Baum H gehörende Zyklensbasis, wobei die Orientierung der Zyklen z_i mit der von y_i übereinstimmt. Dann ist jeder Strom i von G durch seinen Wert auf den Kanten y_i , die nicht zu H gehören, festgelegt. Es gilt

$$i = \sum_{j=1}^k z_j i_j \quad \text{mit} \quad z_j \in B.$$

Dass jede Linearkombination von Elementarzyklen ein Strom ist, folgt aus der Tatsache, dass jeder Elementarzyklus ein Strom ist, und aus Satz 6.7. Um zu zeigen, dass nur Ströme nach Satz 6.8 zulässig sind, hilft folgende Definition:

Definition 6.9. $G = (X, Y)$ sei ein zusammenhängender Graph mit einem Baum $H = (X, Y')$ und der Zyklensbasis $B = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ nach Satz 6.8. Die $m \times k$ Matrix mit $m = |Y|$ und $k = k(G)$

$$Z = [z_1, z_2, \dots, z_k]$$

heißt *Fundamentalmatrix* von G .

Für die Fundamentalmatrix gilt nun:

Lemma 6.1. Für die *Fundamentalmatrix* Z eines Graphen $G = (X, Y)$ gilt

$$\text{rang}(Z) = k(G)$$

mit $k(G)$ als *zyklomatische Zahl* von G .

Zum Beweis siehe den Abschnitt Aufgaben. Mit obigen Satz ist aber auch gezeigt, dass nur Ströme nach Satz 6.8 zulässig sind.

Man kann nun auch jedem Elementarzyklus z zwei Mengen zuordnen. Mit P_z ist dann die Menge der Kanten gemeint, die im Durchlaufsinne orientiert sind, mit M_z ist die Menge der Kanten gemeint, die gegen den Durchlaufsinne orientiert sind.

Definition 6.10. Ist jeder Kante y eines zusammenhängenden Graphens $G = (X, Y)$ eine reelle Zahl u_y so zugeordnet, dass für jeden Elementarzyklus z von G gilt

$$\sum_{j \in P_z} u_j = \sum_{j \in M_z} u_j,$$

dann heißt der Vektor $u \in (\mathbb{R}^{|Y|})^*$ (für eine festgelegte Folge $(y_1, y_2, \dots, y_{|Y|})$) aller

Kanten von G)

$$u = \begin{bmatrix} u_{y_1} \\ u_{y_2} \\ \vdots \\ u_{y_{|Y|}} \end{bmatrix} \quad \text{oder kürzer} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{|Y|} \end{bmatrix}$$

eine *Spannung* von G .

Man beachte, dass obige Gleichung auch einfach in der Form

$$u^T Z = 0$$

geschrieben werden kann.

Satz 6.9. Sind u_1 und u_2 *Spannungen* eines Graphen $G = (X, Y)$, dann ist auch

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad \text{für} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

eine *Spannung*.

Der Beweis erfolgt analog zu Satz 6.7. Anstelle den Kanten y_i Spannungen u_i zuzuordnen, kann man den Knoten x_j Potentiale v_j zuordnen. Spannung und Potential sind dann durch die Beziehung

$$u_y = v_{p_y} - v_{m_y}$$

verbunden. p_y bezeichnet dabei den Knoten, von dem der Strom abfließend positiv gezählt wird, m_y den anderen.

Satz 6.10. $G = (X, Y)$ sei ein zusammenhängender Graph mit einem Baum $H = (X, Y')$. Eine Spannung von G ist eindeutig festgelegt, wenn sie auf allen Kanten Y' festgelegt ist. Ein Potential von G ist eindeutig bestimmt, wenn die Spannung von G gegeben ist, und das Potential eines Knotens $x \in X$ festgelegt ist.

Beweis. Von den $|Y|$ Komponenten des Spannungsvektors sind $|X| - 1$ Komponenten durch die Kanten des Baumes festgelegt. Dann sind die verbleibenden Größen durch die Spannungsregeln eindeutig bestimmt. Die Eigenschaft des Potentials folgt aus der Tatsache, dass G $|X|$ Knoten besitzt. ■

Für die Netzwerkstheorie von besonderer Bedeutung ist der nachstehende Satz, der Satz von Tellegen.

Satz 6.11. Ein Vektor $i \in \mathbb{R}^{|Y|}$ ist genau dann ein *Strom* auf G , wenn er von *jeder* Spannung $u \in (\mathbb{R}^{|Y|})^*$ von G *annihiliert* wird. Ein Vektor $u \in (\mathbb{R}^{|Y|})^*$ ist genau dann eine *Spannung* auf G , wenn er von *jedem* Strom $i \in (\mathbb{R}^{|Y|})^*$ von G *annihiliert* wird. D.h. es gilt

$$u^T i = 0$$

für jeden Strom i und jede Spannung u von G .

Beweis. Zum Beweis beachte man, dass ein Spannungsvektor die Beziehungen

$$u^T z_i = 0$$

für alle Vektoren der Zyklenbasis B erfüllt. In Matrixschreibweise gilt

$$u^T Z = 0 .$$

Da der Strom i mittels der Beziehung

$$i = Z i_B$$

eindeutig durch den Vektor i_B der Ströme jener Kanten, die die Basis festlegen, bestimmt ist, folgt unmittelbar

$$u^T Z i_B = 0$$

und damit obiger Satz. ■

L_i , L_u seien lineare Operationen, die einer Spannung u oder einem Strom i das Bild $L_u(u)$ bzw. $L_i(i)$ zuordnet. Für eine vektorielle Größe gelte diese Zuordnung komponentenweise.

Satz 6.12. i und u seien Strom und Spannung eines Graphen G (Satz 6.11). Dann gilt für lineare Operationen L_i und L_u :

$$L_u(u^T) L_i(i) = 0.$$

Beweis. Zum Beweis beachte man, dass aus

$$u^T Z = 0$$

folgt

$$L_u(u^T Z) = L_u(u^T) Z = 0 ,$$

und man erhält mit

$$L_u(u^T) Z L_i(i_B) = 0$$

obigen Satz. ■

Beispiel 6.2. Wählt man für L_u die zeitliche Ableitung und für L_i die identische Abbildung, dann folgt

$$u^T \dot{i} = 0 .$$

Vertauscht man die Abbildungen, dann erhält man

$$\dot{u}^T i = 0 .$$

Mit Hilfe der Fundamentalmatrix Z bekommt man eine explizite Darstellung des Stroms, es gilt $i = Zi_B$, und eine implizite Darstellung der Spannung mit $u^T Z = 0$. Ein Strom ist aber eine Bewertung, die alle Knotengleichungen mit 0 erfüllt. Schreibt man diese in der Form $Di = 0$, dann folgt $DZi_B = 0$. Beachtet man noch, dass die Zeilen von D linear abhängig sind, wenn man alle Knotengleichungen heranzieht, dann erhält man sofort das folgende Lemma.

Lemma 6.2. Zur Fundamentalmatrix Z existiert ein Annihilator $Z^\perp = K$, der zeilenweise mit Hilfe der Knotengleichungen gebildet wird. Weiters gilt, jede Spannung u kann mit Hilfe der Beziehung

$$u = K^T u_B$$

und den Basisspannungen u_B dargestellt werden.

Der zweite Teil dieses Lemmas folgt unmittelbar aus Satz 6.11.

6.5 Der Satz von Brayton und Moser

Im Folgenden werden nichtlineare 1-Tor Netzwerke mit Induktivitäten, Kapazitäten, Quellen und Widerständen betrachtet. Auf eine Erweiterung auf Mehrtere wird hier verzichtet, obwohl sie einfach möglich ist. Für eine Induktivität gelte $\psi = \psi(i)$ und $\partial_i \psi(i) = l(i)$, dann folgt

$$\begin{aligned} u &= \frac{d}{dt} \psi \\ i u dt &= i d\psi \\ e_L(i) &= \int_{i_0}^i l(\tau) \tau d\tau \end{aligned} \tag{6.7}$$

für die gespeicherte Energie. Analog folgt für eine Kapazität mit $q = q(u)$ und $\partial_u q(u) = c(u)$:

$$\begin{aligned} i &= \frac{d}{dt} q \\ i u dt &= u dq \\ e_C(u) &= \int_{u_0}^u c(\tau) \tau d\tau . \end{aligned} \tag{6.8}$$

Ebenso gilt

$$\frac{d}{dt} \partial_i e_L(i) = u \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \partial_u e_C(u) = i .$$

Ein nichtlinearer Widerstand genüge der Beziehung $u = f(i)$, wobei angenommen wird, dass die Kennlinie auch invertierbar ist. Das Netzwerk darf auch Spannungs- und Stromquellen beinhalten.

Das Netzwerk sei wieder einfach, oder man kann die Ströme der Induktivitäten und die Spannungen der Kapazitäten als Zustand wählen, siehe Beispiel 6.1. Die Indexfolgen C, L, Q_I, Q_U, R , beinhalten alle Indizes der Kapazitäten, Induktivitäten, Strom- und Spannungsquellen, sowie die der Widerstände. Wegen der Sätze 6.11 und 6.12 gilt

$$\sum_{\alpha \in C} u_\alpha i_\alpha + \sum_{\beta \in L} u_\beta i_\beta + \sum_{\gamma \in Q_I} u_\gamma i_\gamma + \sum_{\delta \in Q_U} u_\delta i_\delta + \sum_{\epsilon \in R} u_\epsilon i_\epsilon = 0 \quad (6.9)$$

$$\sum_{\alpha \in C} \dot{u}_\alpha i_\alpha + \sum_{\beta \in L} \dot{u}_\beta i_\beta + \sum_{\gamma \in Q_I} \dot{u}_\gamma i_\gamma + \sum_{\epsilon \in R} \dot{u}_\epsilon i_\epsilon = 0 \quad (6.10)$$

$$\sum_{\alpha \in C} u_\alpha \dot{i}_\alpha + \sum_{\beta \in L} u_\beta \dot{i}_\beta + \sum_{\delta \in Q_U} u_\delta \dot{i}_\delta + \sum_{\epsilon \in R} u_\epsilon \dot{i}_\epsilon = 0. \quad (6.11)$$

Man führt nun das Potenzial $P(u_C, i_L)$,

$$P = \sum_{\alpha \in C} u_\alpha i_\alpha + \sum_{\delta \in Q_U} u_\delta i_\delta + \sum_{\epsilon \in QR} \int_{i_{\epsilon,0}}^{i_\epsilon} f(\tau) dt \quad (6.12)$$

ein. Einerseits gilt

$$\dot{P} = \sum_{\alpha \in C} \partial_{u_\alpha} P \dot{u}_\alpha + \sum_{\beta \in L} \partial_{i_\beta} P \dot{i}_\beta,$$

aber wegen Gleichung (6.11) auch

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \sum_{\alpha \in C} (\dot{u}_\alpha i_\alpha + u_\alpha \dot{i}_\alpha) + \sum_{\delta \in Q_U} u_\delta \dot{i}_\delta + \sum_{\epsilon \in R} u_\epsilon \dot{i}_\epsilon \\ &= \sum_{\alpha \in C} \dot{u}_\alpha i_\alpha - \sum_{\beta \in L} u_\beta \dot{i}_\beta. \end{aligned}$$

Kombiniert man diese Gleichungen folgt

$$\frac{d}{dt} \partial_{i_\beta} e_\beta(i_\beta) = -\partial_{i_\beta} P(u_C, i_L) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \partial_{u_\alpha} e_\alpha(u_\alpha) = \partial_{i_\alpha} P(u_C, i_L), \quad (6.13)$$

da die Größen \dot{u}_α und \dot{i}_β frei wählbar sind.

Die duale Version erhält man mit dem Potenzial $Q(u_C, i_L)$,

$$Q = \sum_{\beta \in L} u_\beta i_\beta + \sum_{\gamma \in Q_I} u_\gamma i_\gamma + \sum_{\epsilon \in R} \int_{u_{\epsilon,0}}^{u_\epsilon} f^{-1}(\tau) dt. \quad (6.14)$$

Nun gilt wieder

$$\dot{Q} = \sum_{\alpha \in C} \partial_{u_\alpha} Q \dot{u}_\alpha + \sum_{\beta \in L} \partial_{i_\beta} Q \dot{i}_\beta$$

aber wegen Gleichung (6.10) auch

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \sum_{\beta \in L} (\dot{u}_\beta i_\beta + u_\beta \dot{i}_\beta) + \sum_{\gamma \in Q_I} \dot{u}_\gamma i_\gamma + \sum_{\epsilon \in Q_R} \dot{u}_\epsilon i_\epsilon \\ &= \sum_{\beta \in L} u_\beta \dot{i}_\beta - \sum_{\alpha \in C} \dot{u}_\alpha i_\alpha.\end{aligned}$$

Die Kombination der Gleichungen liefert dann

$$\frac{d}{dt} \partial_{i_\beta} e_\beta(i_\beta) = \partial_{i_\beta} Q(u_C, i_L) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \partial_{u_\alpha} e_\alpha(u_\alpha) = -\partial_{i_\alpha} Q(u_C, i_L). \quad (6.15)$$

Die Potenziale (6.12) und (6.14) werden auch gemischte Potenziale genannt, die Gleichungen (6.13) und (6.15) bilden den Inhalt des Satzes von Brayton und Moser.

Zum Abschluss soll noch die Änderung der in den dynamischen Elementen gespeicherte Energie $E(u_C, i_L)$,

$$E(u_C, i_L) = \sum_{\alpha \in C} e_\alpha(u_\alpha) + \sum_{\beta \in C} e_\beta(i_\beta) \quad (6.16)$$

betrachtet werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{E}(u_C, i_L) &= \sum_{\alpha \in C} \partial_{u_\alpha} e_\alpha(u_\alpha) \dot{u}_\alpha + \sum_{\beta \in C} \partial_{i_\beta} e_\beta(i_\beta) \dot{i}_\beta \\ &= \sum_{\alpha \in C} u_\alpha \dot{c}_\alpha(u_\alpha) \dot{u}_\alpha + \sum_{\beta \in C} i_\beta \dot{l}_\beta(i_\beta) \dot{i}_\beta \\ &= \sum_{\alpha \in C} u_\alpha \dot{i}_\alpha + \sum_{\beta \in C} i_\beta \dot{u}_\beta \\ &= \sum_{\gamma \in Q_I} u_\gamma \dot{i}_\gamma + \sum_{\delta \in Q_U} u_\delta \dot{i}_\delta + \sum_{\epsilon \in R} u_\epsilon \dot{i}_\epsilon\end{aligned}$$

wegen der Gleichungen (6.7), (6.8) und (6.9).

Literatur

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die elementare Graphentheorie, wie man sie z.B. in [1] findet. Ihre Anwendung auf elektrische Netze und den Satz von Tellegen findet man z.B. in [2]. Diese Herleitung des Satzes von Brayton und Moser ist in dem Buch [3] zu finden. Es muss betont werden, dass dieses Buch nicht nur eine exzellente Einführung in die Theorie dynamischer Systeme und der dazu benötigten linearen Algebra ist, sondern auch exzellent dargestellte Beiträge zur Theorie nichtlinearer Systeme beinhaltet.

6.6 Aufgaben

Aufgabe 6.1. Beweisen Sie Satz 6.5.

Aufgabe 6.2. Formulieren Sie die Gleichungen (6.13) und (6.15) mit Hilfe der Beziehung (6.16).

Aufgabe 6.3. Betrachten Sie die Schaltung aus Bild 6.5.

- Zeichnen Sie den Graphen dieser Schaltung.
- Zeichnen Sie in diesem Graphen einen Zyklus (keinen Elementarzyklus) ein.
- Zeigen Sie, dass dieser Zyklus als Summe von Elementarzyklen darstellbar ist (Satz 6.1).
- Berechnen Sie die zyklomatische Zahl.
- Zeichnen Sie einen Baum in diesem Graphen ein und zeigen Sie die Eigenschaften von Satz 6.3.
- Zeichnen Sie einen Baum der alle Knoten des Graphen beinhaltet.
- Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Baumes und dem Satz 6.5 eine Zyklenbasis des Graphens.
- Finden Sie eine andere Zyklenbasis für diesen Graphen.
- Berechnen Sie eine Fundamentalmatrix.

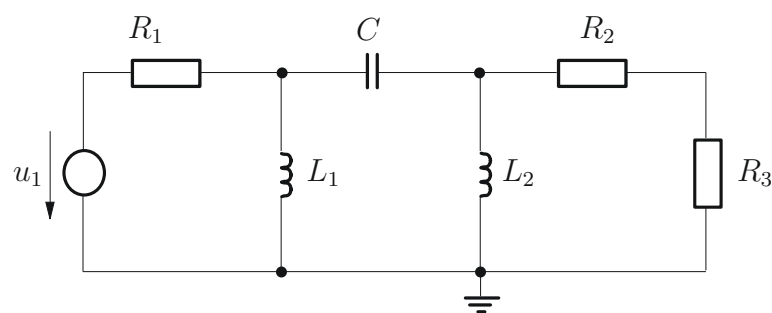


Bild 6.5: RLC Netzwerk.

Aufgabe 6.4. Betrachten Sie die Schaltung aus Bild 6.6.

- Ersetzen Sie den beschalteten Operationsverstärker mit der Beschaltung (R_2, aR_2)

durch eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle.

- Stellen Sie ein vollständiges Gleichungssystem aller Bauelemente und Knoten auf.
- Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der Ausgangsgröße \hat{u}_b .
- Zeichnen Sie den Graphen dieser Schaltung.
- Berechnen Sie die zyklomatische Zahl.
- Bestimmen Sie eine Zyklenbasis.
- Geben Sie die expliziten und impliziten Gleichungen für Spannung und Strom an.

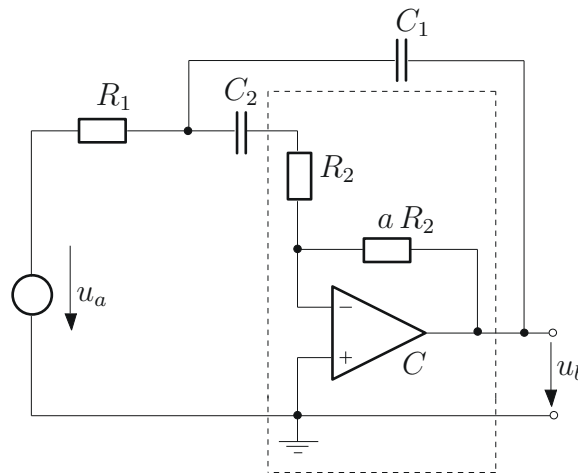


Bild 6.6: Netzwerk mit Operationsverstärker.

Kapitel 7

Einfache mechanische Systeme

Ein einfacher Zugang zu finitdimensionalen mechanischen Systemen beginnt mit dem Wirkungsintegral. Es gelte $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^m$, dann erhalten wir mit Hilfe der Lagrangefunktion $L(t, q, \dot{q})$,

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

das Wirkungsintegral

$$S((t, \gamma)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma(t), \partial_t \gamma(t)) dt \quad (7.1)$$

für $q = \gamma(t)$. Folgt man dem Hamiltonschen Prinzip, dann beschreiben jene Kurven, für die das Wirkungsintegral stationär wird, mechanische Systeme.

Für das Weitere werden noch einige Abkürzungen und Konventionen benötigt. Die Koordinaten q beschreiben die Lage, also Punkte der Konfigurationsmannigfaltigkeit \mathcal{M} mit $q \in \mathcal{M}$, wobei \mathcal{M} die Dimension m hat, aber im Allgemeinen keine lineare Struktur aufweist. Eine Bewegung ist eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$. Nun ist es zweckmäßiger anstelle der Kurve γ den Graphen $\sigma(t) = (t, \gamma(t))$ zu betrachten. Offensichtlich gilt $\sigma(t) \in \mathcal{E} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$, mit Koordinaten (t, q) . Es ist nun einfach σ um zeitliche Ableitungen zu erweitern mit $j\sigma(t) = (t, \gamma(t), \partial_t \gamma(t))$, $j^2\sigma(t) = (t, \gamma(t), \partial_t \gamma(t), \partial_t^2 \gamma(t))$. Mit $J\mathcal{E}$ und $J^2\mathcal{E}$ werden die Mengen mit den Koordinaten (t, q, \dot{q}) , bzw. $(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $j\sigma(t) \in J\mathcal{E}$, bzw. $j^2\sigma(t) \in J^2\mathcal{E}$. Es sei f eine Funktion $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, dann kann man mit d_t ,

$$d_t = \partial_t + \sum_{i=1}^m \dot{q}_i \partial_{q_i} \quad (7.2)$$

und für $f : J\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d_t = \partial_t + \sum_{i=1}^m (\dot{q}_i \partial_{q_i} + \ddot{q}_i \partial_{\dot{q}_i}) \quad (7.3)$$

die totalen Zeitableitungen einführen. Es gilt:

$$d_t f = \partial_t f + \partial_q f \dot{q} + \partial_{\dot{q}} f \ddot{q} .$$

Hier wurden bereits die Abkürzungen

$$\partial_q f = \left[\partial_{q_1} f \quad \cdots \quad \partial_{q_m} f \right],$$

etc. für die Jacobimatrizen verwendet.

Ein Fluss $\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ bildet Punkte $(t, q) \in \mathcal{E}$ auf Punkte $(\bar{t}, \bar{q}) = \varphi_\varepsilon(t, q) \in \mathcal{E}$ ab. Er ist Lösung der gewöhnlichen Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \varphi(t, q)|_{\varepsilon=0} &= (t', q') \\ (t', q') &= (\eta(t, q), \xi(t, q)) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon q(\varepsilon) &= \xi(t(\varepsilon), q(\varepsilon)) \\ \partial_\varepsilon t(\varepsilon) &= \eta(t(\varepsilon), q(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Wir verwenden hier die Koordinaten t', q' , um einer Kurve $(t(\varepsilon), q(\varepsilon))$ ihren Tangentialvektor $(t', q') = \partial_\varepsilon(t(\varepsilon), q(\varepsilon))$ zuzuordnen. Der Tangentialraum \mathcal{TE} von \mathcal{E} mit den Koordinaten (t, q, t', q') erlaubt die Beschreibung von Kurven und deren Tangentialvektoren. Da der Fluss vom Tangentialvektorfeld $v(t, q) \in \mathcal{TE}$,

$$v(t, q) = \eta(t, q) \partial_t + \sum_{i=1}^m \xi_i(t, q) \partial_{q_i} \quad (7.4)$$

erzeugt wird, nennt man dieses auch seinen infinitesimalen Generator. Man betrachte eine Bewegung $\sigma(t)$, sowie $j\sigma(t)$. Mit $q = \gamma(t)$, $t' = 1$ und $q' = \partial_t \gamma(t)$. Offensichtlich kann man einer Bewegung einen Punkt von \mathcal{TE} mit Koordinaten (t, q, t', q') zuordnen. Analog zum Bisherigen kann man den Tangentialraum \mathcal{TJE} von \mathcal{JE} mit den Koordinaten $(t, q, \dot{q}, t', q', \dot{q}')$ einführen. Ein Tangentialvektorfeld v hat dann die Form

$$v(t, q, \dot{q}) = \eta(t, q, \dot{q}) \partial_t + \sum_{i=1}^m (\xi_i(t, q, \dot{q}) \partial_{q_i} + \zeta_i(t, q, \dot{q}) \partial_{\dot{q}_i}). \quad (7.5)$$

Für die totale Zeitableitung von Gleichung (7.2) gilt $d_t \in \mathcal{TE}$ mit gegebenen Werten von q . Sie ist jedoch kein Tangentialvektorfeld, solange \dot{q} nicht durch Funktionen von t, q ersetzt werden. Analoge Betrachtungen gelten für die totale Zeitableitung $d_t \in \mathcal{TJE}$ nach Gleichung (7.3).

7.1 Die Lagrangeschen Gleichungen

Folgend dem Hamiltonschen Prinzip beschreibt eine Bewegung ein mechanisches System, wenn das Wirkungsintegral stationär wird. Dabei ist es zulässig die Bewegung so zu variieren, dass die Zeit t und die Bewegung zu den Zeitpunkten t_0, t_1 nicht verändert

wird. Jeder Fluss φ auf \mathcal{E} , der von einem Tangentialvektorfeld v , siehe Gleichung (7.4), mit $\eta(t, q) = 0$ und $\xi(t_0, q) = \xi(t_1, q) = 0$, erzeugt wird, generiert so eine Variation. Da aber $L(t, q, \dot{q})$ von \dot{q} abhängt, muss der Fluss φ auf \mathcal{E} zu einem Fluss $j\varphi$ auf $J\mathcal{E}$ erweitert werden. Dies ist besonders einfach mit seinem infinitesimalen Generator v . Mit der totalen Zeitableitung von Gleichung (7.2) erhält man die Erweiterung jv ,

$$\begin{aligned} jv(t, q, \dot{q}) &= \sum_{i=1}^m (\xi(t, q) \partial_{q_i} + d_t \xi_i(t, q) \partial_{\dot{q}_i}) \\ \dot{q}' &= d_t \dot{q}' = d_t \xi(t, q) . \end{aligned} \quad (7.6)$$

Jetzt kann die Variation des Wirkungsintegrals einfach erfolgen:

$$\begin{aligned} S(\varphi_\epsilon \circ \sigma) &= \int_{t_0}^{t_1} L dt \circ j\varphi_\epsilon \circ j\sigma(t) \\ \partial_\epsilon S(\varphi_\epsilon \circ \sigma)|_{\epsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_1} (\partial_q L \xi + \partial_{\dot{q}} L d_t \xi) dt \circ j\sigma(t) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\partial_q L - d_t \partial_{\dot{q}} L) \xi dt \circ j^2 \sigma(t) + (\partial_{\dot{q}} L \xi) \circ j\sigma(t) \Big|_{t_0}^{t_1} . \end{aligned}$$

Die Variation am zeitlichen Rand verschwindet gemäß Annahme. Da ξ frei gewählt werden kann, muss $j^2 \sigma$ den Lagrangeschen Gleichungen

$$d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L = 0 \quad (7.7)$$

genügen, damit die Variation verschwindet.

Man überzeugt sich leicht, dass verschiedene Lagrangesche Funktionen zu den selben Bewegungsgleichung führen können. Trifft dies auf $L_1(t, q, \dot{q})$ und $L_2(t, q, \dot{q})$ zu, dann gilt

$$L_1(t, q, \dot{q}) - L_2(t, q, \dot{q}) = d_t f(t, q) .$$

Anmerkung 7.1. Dies folgt unmittelbar aus

$$\int_{t_0}^{t_1} d_t f(t, q) dt = f(t, q) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

und der am Rand verschwindenden Variation. Da nun $d_t \partial_{\dot{q}}(d_t f) - \partial_q(d_t f)$ identisch zu Null wird, hat man einen einfachen Test, ob für eine Funktion $g(t, q, \dot{q})$ gilt $g(t, q, \dot{q}) = d_t f(t, q)$.

Man beachte noch die Beziehung

$$\begin{aligned} d_t (\partial_{\dot{q}} L \dot{q} - L) &= d_t \partial_{\dot{q}} L \dot{q} + \partial_{\dot{q}} L \ddot{q} - \partial_t L - \partial_q L \dot{q} - \partial_{\dot{q}} L \ddot{q} = -\partial_t L , \\ &= (d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L) \dot{q} - \partial_t L \\ &= -\partial_t L \end{aligned} \quad (7.8)$$

wobei Gleichung (7.7) benutzt wurde. Die Größe E ,

$$E = \partial_{\dot{q}} L \dot{q} - L \quad (7.9)$$

entspricht in vielen Fällen der Systemenergie.

7.2 Symmetrien und Konstanten der Bewegung

Man betrachte ein Lagrangesches System mit $L(t, q, \dot{q})$, für das gelte $\partial_{q_i} L = 0$. Dann folgt wegen Gleichung (7.7)

$$d_t \partial_{\dot{q}_i} L(t, q, \dot{q}) = 0$$

oder

$$\partial_{\dot{q}_i} L(t, q, \dot{q}) = \partial_{\dot{q}_i} L(t, q(t_0), \dot{q}(t_0)) ,$$

und man erhält eine sogenannte *Konstante der Bewegung*. Löst man diese Gleichung noch nach \dot{q}_i auf, dann kann man \dot{q}_i als Funktion $\dot{q}_i = f(t, q, \dot{q})$ wegen $\partial_{\dot{q}_i} f = \partial_{q_i} f = 0$ in Abhängigkeit der verbleibenden Größen ausdrücken. Solche Überlegungen erlauben dann die Gleichungen zu vereinfachen. Das Vektorfeld ∂_{q_i} erzeugt den Fluss φ mit $\bar{t} = t$, $\bar{q}_i = q_i + \varepsilon$, $\bar{q}_j = q_j$ für $j \neq i$, $\bar{\dot{q}} = \dot{q}$ und es gilt $L(t, q, \dot{q}) = L(\bar{t}, \bar{q}, \bar{\dot{q}})$. Dieser Fluss ist eine *Symmetrie* und er hängt mit der Konstanten der Bewegung eng zusammen.

Nun wird das allgemeine Tangentialvektorfeld, siehe Gleichung (7.5), verwendet, um eine größere Klasse von Symmetrien zu finden. Um die Erweiterung jv von v zu bestimmen, ist allerdings die Methode des vorigen Abschnitts nicht direkt anwendbar. Das Vektorfeld hat die Zeitkomponente η , womit der zugehörige Fluss auch die Zeitableitung ändert. Die totale Zeitableitung d_t von Gleichung (7.2) ist ein Vektorfeld auf \mathcal{E} , mit seiner Hilfe wird das Vektorfeld

$$v(t, q, \dot{q}) - \eta d_t = \sum_{i=1}^m (\xi_i - \eta \dot{q}_i) \partial_{q_i}$$

gebildet. Gemäß dem vorigen Abschnitt erhält man

$$j(v - \eta d_t) = \sum_{i=1}^m ((\xi_i - \eta \dot{q}_i) \partial_{q_i} + d_t (\xi_i - \eta \dot{q}_i) \partial_{\dot{q}_i})$$

mit der zeitlichen Ableitung nach Gleichung (7.3), da die Komponenten von \tilde{v} von \dot{q} abhängen. Dieses Vektorfeld hängt auch von \ddot{q} ab, im Gegensatz zum Vektorfeld (7.6). Allerdings muss die vorige Korrektur rückgängig gemacht werden und man erhält

$$\begin{aligned} jv &= j(v - \eta d_t) + \eta d_t \\ jv(t, q, \dot{q}) &= \eta(t, q) \partial_t + \sum_{i=1}^m (\xi_i(t, q) \partial_{q_i} + (d_t \xi_i(t, q) - \dot{q}_i d_t \eta(t, q)) \partial_{\dot{q}_i}) \end{aligned} \quad (7.10)$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= d_t \xi(t, q) - \dot{q} d_t \eta(t, q) \\ dt' &= d_t \eta(t, q) dt . \end{aligned}$$

Man beachte, dass hier die totale Zeitableitung nach Gleichung (7.3) verwendet werden muss (warum?).

Nun wird eine Symmetrie $(\bar{t}, \bar{q}) = \varphi_\varepsilon(t, q)$ mit Erweiterung $(\bar{t}, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = j\varphi_\varepsilon(t, q, \dot{q})$ gesucht, die das Wirkungsintegral

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} L(\bar{t}, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) d\bar{t}$$

unverändert lässt. Da dies für alle $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ gelten muss, folgt

$$L(t, q, \dot{q}) dt = L(\bar{t}, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) d\bar{t}$$

oder

$$\partial_\varepsilon L(\bar{t}, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) d\bar{t} \Big|_{\varepsilon=0} = jv(t, q, \dot{q}) L(t, q, \dot{q}) dt = 0$$

mit dem infinitesimalen Generatoren nach Gleichung (7.4), (7.5) für φ_ε und $j\varphi_\varepsilon$. Die Auswertung dieser Bedingung führt auf

$$\begin{aligned} (\partial_t L \eta + \partial_q L \xi + \partial_{\dot{q}} L (d_t \xi - \dot{q} d_t \eta) + L d_t \eta) dt &= 0 \\ ((d_t L - d_t (\partial_{\dot{q}} L \dot{q})) \eta + (\partial_q L - d_t \partial_{\dot{q}} L) \xi + d_t (\partial_{\dot{q}} L \xi)) &= 0 \\ -d_t (\partial_{\dot{q}} L \dot{q} \eta) + d_t (\partial_{\dot{q}} L \dot{q}) \eta + L d_t \eta) dt &= 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$((\partial_q L - d_t \partial_{\dot{q}} L) \xi + d_t (\partial_{\dot{q}} L \xi + (L - \partial_{\dot{q}} L \dot{q}) \eta)) dt = 0, \quad (7.12)$$

wobei Gleichung (7.8) verwendet wurde. Damit erhält man sofort den folgenden Satz, auch Theorem von Emmy Noether genannt.

Satz 7.1. Für ein Lagrangesches System mit $L(t, q, \dot{q})$ und das Tangentialvektorfeld v nach Gleichung (7.4) mit seiner Erweiterung nach Gleichung (7.5) gelte

$$jv(L) = 0,$$

dann ist $\partial_{\dot{q}} L \xi + (L - \partial_{\dot{q}} L \dot{q}) \eta$ die zugehörige Konstante der Bewegung.

Beweis. Zum Beweis beachte man nur, dass wegen Bedingung des Satzes 7.1 die Gleichung (7.12) erfüllt ist. Ist noch Gleichung (7.7) erfüllt, dann erhält man sofort das gewünschte Ergebnis. ■

Anmerkung 7.2. Erzeugt das Tangentialvektorfeld ∂_{q_i} eine Symmetrie, dann nennt man q_i auch zyklische Koordinate. Erzeugt das Tangentialvektorfeld ∂_t eine Symmetrie, dann ist die Gesamtenergie eine Konstante der Bewegung.

7.3 Ausgänge, Eingänge und Potenziale

Ein einfaches mechanisches System hat oft eine Lagrangesche Funktion vom Typ

$$\begin{aligned}
 L(t, q, \dot{q}) &= E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} \\
 E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \\
 E_{\text{pot}} &= P_0(q) \\
 (\partial_q - d_t \partial_{\dot{q}}) E_{\text{pot}} &= \partial_q P_0(q) .
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Für die Gesamtenergie E , siehe Gleichung (7.9), folgt dann

$$\begin{aligned}
 E &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \\
 d_t E &= 0
 \end{aligned}$$

wegen Gleichung (7.8). Allerdings kann man anstelle von E_{pot} , wie oben, auch die Funktion

$$\begin{aligned}
 L(t, q, \dot{q}) &= E_{\text{kin}} - E_{\text{epot}} \\
 E_{\text{epot}} &= P_0(q) + P(q) \dot{q} \\
 P &= [P_1 \dots P_m]
 \end{aligned}$$

wählen. Man beachte, dass wegen

$$(\partial_q - d_t \partial_{\dot{q}}) E_{\text{epot}} = -d_t P + \partial_q (P \dot{q}) + \partial_q P_0(q) \tag{7.14}$$

keine Terme mit \ddot{q} erzeugt werden. Für die Gesamtenergie E gilt noch

$$\begin{aligned}
 E &= \partial_{\dot{q}} L \dot{q} - L = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \\
 d_t E &= 0 .
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass der zusätzliche Term $P(q) \dot{q}$ nichts zur Gesamtenergie beiträgt. Das Potential der Lorentzkraft ist von diesem Typ.

Oftmals werden Lagrangesche Systeme in der Art

$$d_t \partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q}) - \partial_q L(q, \dot{q}) = uW(q) \tag{7.15}$$

mit den Eingängen $u \in (\mathbb{R}^m)^*$ erweitert. Für die Energieänderung folgt dann

$$d_t E = uW \dot{q} .$$

Eine natürliche Wahl für die Ausgangsgröße ist

$$y = W \dot{q} .$$

Man nennt diese Wahl auch *Kollokation* von Ein- und Ausgang, weil das Produkt uy der in das System fließenden Leistung entspricht. Gilt noch

$$\begin{aligned} W &= \partial_q Q, \\ Q^T &= [Q_1 \dots Q_m] \end{aligned}$$

dann kann man noch die Funktion

$$V_{\text{in}} = uQ(q) \quad (7.16)$$

einführen. Die Bewegungsgleichungen haben dann die Form

$$d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L = u \partial_q (Q)$$

und es gilt

$$d_t E = u d_t (Q) . \quad (7.17)$$

Eine natürlich Wahl für die Ausgangsgröße ist jetzt Q . Ihre totale Zeitableitung $y = d_t(Q)$ ist dann die zu u *kollokierte Größe*.

| Beispiel 7.1. Man wähle $Q = q$, dann folgt $d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L = u$ und $u\dot{q}$ für die Leistung.

Wenn man den Eingang u zur Regelung verwendet, ist es von Interesse, ob dem Regelgesetz $u(t, q, \dot{q})$ ein Potenzial P_0 zugeordnet werden kann, es gilt also

$$-\partial_q P_0 = -u \partial_q Q ,$$

siehe Gleichung (7.13). Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \partial_{q_i} P_0 &= u \partial_{q_i} Q \\ \partial_{q_j} P_0 &= u \partial_{q_j} Q \end{aligned}$$

bekommt man die Integrabilitätsbedingungen

$$\partial_{q_j} (u \partial_{q_i} Q) = \partial_{q_i} (u \partial_{q_j} Q) ,$$

die die lokale Existenz des Potenzial P_0 für das Regelgesetz $u = u(q)$ sicherstellen.

| Beispiel 7.2. Man betrachte den Fall $Q = q$ und $u = qK$ mit $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Gilt $K = K^T$ dann hat das Regelgesetz ein Potential.

Noch von Interesse ist der Fall

$$d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L = uW(q, \dot{q}) , \quad W_{ij}(q, \dot{q}) = w_{ij}(q) \dot{q} . \quad (7.18)$$

Gilt noch

$$W(q, \dot{q}) = -d_t U + \partial_q (U(q) \dot{q}) ,$$

dann kann man dem Eingang noch, siehe Gleichung (7.14), die Funktion

$$V_{ein} = uU(q)\dot{q}$$

zuordnen und man erhält die Bewegungsgleichungen

$$d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L = u (d_t \partial_{\dot{q}} (U(q)\dot{q}) - \partial_q (U(q)\dot{q})) .$$

Für den kollokierten Ausgang y gilt $y = (-d_t U + \partial_q (U(q)\dot{q}))\dot{q}$. Man beachte, dass

$$\begin{aligned} d_t (U(q)\dot{q}) &= \partial_q (U(q)\dot{q})\dot{q} + \partial_{\dot{q}} (U(q)\dot{q})\ddot{q} \\ &= \partial_q (U(q)\dot{q})\dot{q} + d_t (U(q)\dot{q}) - d_t U(q)\dot{q} \end{aligned}$$

noch gilt

$$\partial_q (U(q)\dot{q})\dot{q} - d_t U(q)\dot{q} = 0$$

und damit $y = 0$ folgt. Auf die Herleitung von Integrabilitätsbedingungen für W , die die Existenz von U ermöglichen, wird hier verzichtet.

Beispiel 7.3. Man betrachte den Fall $m = 2$, $Q = q$ und $u = \dot{q}^T J$ mit

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & \dot{q}_1 \end{bmatrix} .$$

Mit $P = \frac{1}{2} q^T J$ folgt

$$\begin{aligned} d_t P - \partial_q (P\dot{q}) &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \dot{q}_2 & -\dot{q}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{q}_2 & -\dot{q}_1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \dot{q}_2 & -\dot{q}_1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Dieses Regelgesetz entspricht in seiner Wirkung einer Lorentzkraft.

Abschließend werden noch dissipative Eingänge in die Lagrangeschen Gleichungen aufgenommen. Zu einem dissipierenden Eingang $u = u(\dot{q})$ kann man die Rayleighsche Dissipationsfunktion mit

$$R(\dot{q}) = \int_{\dot{q}_0}^{\dot{q}} u(z) dz \partial_q Q(q)$$

eingeführen. Hier wird vorausgesetzt, dass das Integral wegunabhängig sei. Man erhält die Gleichungen

$$d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L + \partial_{\dot{q}} R = d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L + u(\dot{q}) \partial_q Q(q) = 0$$

mit der Leistungsbilanz

$$\begin{aligned} d_t (\partial_{\dot{q}} L \dot{q} - L) &= -u \partial_q Q \dot{q} \\ &= -u \dot{q} . \end{aligned}$$

7.4 Gleichungsbeschränkungen

Die einfachste Form von Gleichungsbeschränkungen für ein Lagrangesches System mit Lagrangescher Funktion $L(t, q, \dot{q})$ ist

$$Y(q) = 0 \tag{7.19}$$

mit $\dim(Y) = \bar{m}$. Ein erster Ansatz ist, die Anzahl der Koordinaten zu reduzieren. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= X(q) \\ y &= Y(q) \end{aligned}$$

sei nach q auflösbar. Mit den Beziehungen

$$q = F(x, y), \quad \dot{q} = \partial_x F \dot{x} + \partial_y F \dot{y}$$

erhält man dann die vereinfachte Lagrangesche Funktion

$$\tilde{L}(t, x) = L(t, F(x, 0), \partial_x F(x, 0) \dot{x}) .$$

Die Gleichung (7.19) beschreibt eine Mannigfaltigkeit im Raum der Bewegungen in impliziter Form. Für eine explizite Parametrierung $q = G(x)$ erhält man die vereinfachte Lagrangesche Funktion in der Form

$$\tilde{L}(t, x) = L(t, G(x), \partial_x G(x) \dot{x}) .$$

Es ist jedoch nicht notwendig, die Anzahl der Koordinaten zu verkleinern, man kann auch die Anzahl der Gleichungen erhöhen. Die Lagrangeschen Gleichungen (7.7) folgten aus der Forderung, dass die Variation

$$(d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L) \xi = 0 \tag{7.20}$$

für alle ξ verschwindet. Hier ist aber die Variation ξ wegen Gleichung (7.19) eingeschränkt, denn es gilt

$$\partial_q Y \xi = 0 .$$

Wegen eines einfachen Satzes aus der linearen Algebra¹ folgt sofort

$$d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L = \lambda \partial_q Y . \tag{7.21}$$

Dies ist äquivalent zum d'Alembertschen Prinzip, wenn man $F = \lambda \partial_q Y$ als Zwangsterm interpretiert. Vergleicht man diese Gleichung mit (7.17), dann kann man $\lambda = u$ als Eingang mit kolloziertem Ausgang $y = \partial_q Y \dot{q} = d_t Y$ interpretieren, wobei y auf der Mannigfaltigkeit, siehe Gleichung (7.19), verschwindet. Man überzeugt sich leicht, dass man mit der erweiterten Lagrangeschen Funktion $L - \lambda Y$ zum selben Ergebnis kommt.

¹ $\forall x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow cx = 0, c \in (\mathbb{R}^n)^* \iff c = \lambda A, \lambda \in (\mathbb{R}^n)^* .$

Beispiel 7.4. Man betrachte das ebene Pendel mit Koordinaten q_1, q_2 mit Lagrangescher Funktion,

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - mlgq_2 \\ l^2 &= q_1^2 + q_2^2, \end{aligned}$$

das sich auf einem Kreis mit Radius l bewegt. In der Umgebung von $q_1 = 0, q_2 = -l$, kann q_1 als Lagekoordinate gewählt werden und es gilt $q_2 = -\sqrt{1 - q_1^2}$. Mit der Lagrangeschen Funktion

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + mlg\sqrt{1 - q_1^2} \\ \dot{q}_2 &= \frac{\dot{q}_1 q_1}{\sqrt{1 - q_1^2}}, \end{aligned}$$

erhält man die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q}_1 = - \frac{q_1 \left(\sqrt{l^2 - q_1^2} l^2 \dot{q}_1^2 + gl^4 - 2gl^2 q_1^2 + gq_1^4 \right)}{(l^2 - q_1^2)^{3/2} l^2}.$$

Mit Hilfe der Methode nach Gleichung (7.21) folgt sofort

$$m \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 + g \end{bmatrix} = 2\lambda \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}.$$

Mit den weiteren Gleichungen

$$\begin{aligned} 2q_1 \dot{q}_1 + 2q_2 \dot{q}_2 &= 0 \\ 2q_1 \ddot{q}_1 + 2\dot{q}_1^2 + 2q_2 \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

kann man die Größen λ, q_2, \dot{q}_2 und \ddot{q}_2 eliminieren.

Nun dürfen die Beschränkungen auch von \dot{q} abhängen, wobei hier der Fall

$$Z(q) \dot{q} = 0 \tag{7.22}$$

mit \bar{m} in \dot{q} linearen Gleichungen untersucht wird. So eine Beschränkung entsteht auch durch Differenzieren von Gleichung (7.19), denn es gilt $d_t Y(q) = \partial_q Y(q) \dot{q} = 0$. Die Matrix $\partial_q Y(q)$ beschreibt dann die Ebenen tangential zur Fläche $Y(q) = \text{const}$. Interpretiert man die Matrix $Z(q)$ in diesem Sinne, allerdings existiert zu ihr im allgemeinen keine Fläche, dann folgt für die Variation

$$Z\xi = (\partial_{\dot{q}} Z \dot{q}) \xi = 0.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen haben dann die Form

$$d_t \partial_{\dot{q}} L - \partial_q L = \lambda \partial_{\dot{q}} Z \dot{q}. \tag{7.23}$$

Vergleicht man diese Beziehungen mit Gleichung (7.15), dann kann man $\lambda = u$ wieder als Eingang mit kollokierten Ausgang $y = Z(q)\dot{q}$ interpretieren, wobei y auf der Mannigfaltigkeit nach Gleichung (7.22) verschwindet. Gilt noch

$$Z(q)\dot{q} = N(q)d_t Y(q) ,$$

dann kann man die Bedingungen (7.22) durch solche nach Gleichung (7.19) mit $Y(q) = Y(q(0))$ ersetzen.

Beispiel 7.5. Eine Scheibe mit Radius R und Masse m rollt vertikal, das ist eine Zwangsbedingung, in der (x_1, x_2) Ebene. Mit ϕ wird der Winkel relativ zur x_3 -Achse und mit ψ der Winkel relativ zur x_1 -Achse bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{I_0}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{I_1}{2} \dot{\psi}^2 \\ 0 &= R\dot{\phi} \cos(\psi) - \dot{x}_1 \\ 0 &= R\dot{\phi} \sin(\psi) - \dot{x}_2 \end{aligned}$$

mit den Trägheitsmomenten I_0 und I_1 . Die Gleichungen nach (7.23) lauten

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_1 & m\ddot{x}_2 & I_0\ddot{\phi} & I_1\ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_1 R \cos(\psi) + \lambda_2 R \sin(\psi) & 0 \end{bmatrix} .$$

Eliminiert man die nicht benötigten Größen λ_1 , λ_2 , \ddot{x}_1 , und \ddot{x}_2 , erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= R\dot{\phi} \cos(\psi) \\ \dot{x}_2 &= R\dot{\phi} \sin(\psi) \\ (mR^2 + I_0)\ddot{\phi} &= 0 \\ I_1\ddot{\psi} &= 0 , \end{aligned}$$

die einfach gelöst werden können. Mit $\phi = \phi_0 + \dot{\phi}_0 t$ und $\psi = \psi_0 + \dot{\psi}_0 t$ folgt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= R\dot{\phi}_0 \cos(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) \\ \dot{x}_2 &= R\dot{\phi}_0 \sin(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) , \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1,0} + R \frac{\dot{\phi}_0}{\dot{\psi}_0} \cos(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) \\ x_2 &= x_{2,0} - R \frac{\dot{\phi}_0}{\dot{\psi}_0} \sin(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) . \end{aligned}$$

Die Scheibe bewegt sich offensichtlich auf einem Kreis.

Man kann die Beschränkungen nach Gleichung (7.19) und (7.22) sehr einfach zu

$$Y(t, q) = 0 \quad \text{und} \quad Z(t, q) \dot{q} + z(t, q) = 0$$

erweitern, siehe dazu den Abschnitt Aufgaben.

7.5 Die Legendretransformation und die Hamiltonschen Gleichungen

Die Lagrangeschen Gleichungen (7.7) mit

$$d_t \partial_{\dot{q}} L(t, q, \dot{q}) = \partial_q L(t, q, \dot{q})$$

können mit der Abkürzung

$$P(t, q, \dot{q}) = \partial_{\dot{q}} L(t, q, \dot{q})$$

in die Form

$$d_t P(t, q, \dot{q}) = \partial_q L(t, q, \dot{q})$$

überführt werden. Wenn die Koordinatentransformation und ihre Inverse

$$\begin{aligned} p &= \partial_{\dot{q}} L(t, q, \dot{q}) \\ \dot{q} &= \partial_{\dot{q}} L^{-1}(t, q, p) , \end{aligned}$$

sie heißt Legendretransformation, existiert, dann erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial_{\dot{q}} L^{-1}(t, q, p) \\ \dot{p} &= \partial_q L \left(t, q, \partial_{\dot{q}} L^{-1}(t, q, p) \right) . \end{aligned}$$

Aus einem System von m Gleichungen 2-ter Ordnung entsteht so ein System von $2m$ Gleichungen 1-ter Ordnung. Man beachte, dass die totale Zeitableitung jetzt durch

$$d_t = \partial_t + \sum_{i=1}^m (\dot{q}_i \partial_{q_i} + \dot{p}_i \partial_{p_i})$$

gegeben ist. Mit Hilfe der Hamiltonschen Funktion H ,

$$H(t, q, p) = p \partial_{\dot{q}} L^{-1}(t, q, p) - L \left(t, q, \partial_{\dot{q}} L^{-1}(t, q, p) \right)$$

erhält man dann die Hamiltonschen Gleichungen in kanonischer Form

$$\begin{aligned} \dot{q}^T &= \partial_p H(t, q, p) \\ \dot{p} &= -\partial_q H(t, q, p) . \end{aligned}$$

Beweis. Mit Hilfe der Funktion $\tilde{L}(t, q, p) = L(t, q, \dot{q}(t, q, p))$ erhält man die Beziehung

$$\partial_q \tilde{L} = \partial_q L + \partial_{\dot{q}} L \partial_q \dot{q} = \partial_q L + p \partial_q \dot{q}$$

oder

$$\partial_q L = \partial_q (\tilde{L} - p\dot{q}) .$$

Damit ist eine Hälfte gezeigt. Mit

$$\partial_p \tilde{L} = \partial_{\dot{q}} L \partial_p \dot{q} = p \partial_p \dot{q}$$

folgt dann noch

$$\partial_p (\tilde{L} - p\dot{q}) = -\dot{q} ,$$

womit auch die zweite Hälfte gezeigt ist. ■

Abschließend wird noch die Lagrangesche Funktion

$$\hat{L}(t, q, \dot{q}, p) = p\dot{q} - H(t, q, p)$$

betrachtet. Die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen sind

$$d_t \partial_{\dot{q}} \hat{L} - \partial_q \hat{L} = d_t p + \partial_q H = 0 .$$

Diese Beziehungen zeigen, dass man die Hamiltonschen Gleichungen auch aus einem Variationsprinzip herleiten kann.

Literatur

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Beschreibung Lagrangescher Systeme, wie man sie z.B. in [5] findet. Allerdings wurden die Systeme um Eingänge und Regelgesetze, die Potential besitzen, erweitert. Ein kleiner Unterschied zur Standardliteratur sind hier die \dot{q} -abhängigen Potentiale.

7.6 Aufgaben

Aufgabe 7.1. Entwickeln Sie ein Programm in einem Computeralgebrasystem, z.B. Maple, das die Bewegungsgleichungen nach Gleichung (7.7) herleitet.

Aufgabe 7.2. Entwickeln Sie ein Programm in einem Computeralgebrasystem, z.B. Maple, das die Konstanten der Bewegung nach Satz 7.1 bestimmt und versuchen Sie die Symmetrien mit Hilfe ihres infinitesimalen Generators zu berechnen.

Aufgabe 7.3. Erweitern Sie das Programm von Aufgabe 7.1 so, dass es die Eingänge und Potentiale von Abschnitt 7.3 handhaben kann.

Aufgabe 7.4. Erweitern Sie das Programm von Aufgabe 7.1 so, dass es die Beschränkungen nach Gleichung (7.19) und (7.22) handhaben kann.

Aufgabe 7.5. Erweitern Sie das Beispiel (7.5) so, dass die Scheibe nicht mehr vertikal rollen muss und auf sie die Schwerkraft wirkt.

Aufgabe 7.6. Entwickeln Sie ein Programm, das mit Hilfe der Legendretransformation die Hamiltonschen Gleichungen in kanonischer Form herleitet.

Aufgabe 7.7. Erweitern Sie das Programm der vorigen Aufgabe um Eingänge, Potentiale dissipativer Eingänge und Beschränkungen.

Literaturverzeichnis

- [1] N. Christofides. *Graph Theory: An Algorithmic Approach*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, wydanie 4, 1986.
- [2] C. A. Desoer, L. O. Chua, E. S. Kuh. *Linear and Nonlinear Circuits*. Mc Graw - Hill, 1987.
- [3] M. W. Hirsch, S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1974.
- [4] A. T. John C. Doyle, Bruce A. Francis. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co., 1992.
- [5] G. José, E. Saletan. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, USA, 1998.
- [6] D. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons, Inc., New York, US, 1969.
- [7] D. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison–Wesley Publishing Company, Massachusetts, US, 1984.
- [8] M. Vidyasagar. *Control System Synthesis, A Factorization Approach*. MIT Press 1987, 1987.