

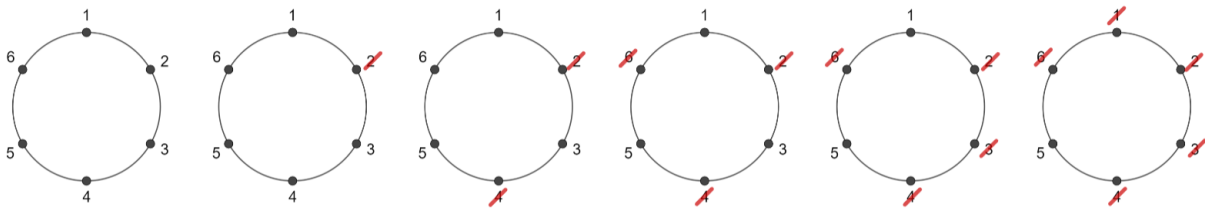
# Lösungen des Monats - Jänner 2024

## Kategorie: Maximathik 9./10. Schulstufe

### Aufgabe 1: Alternierende Silvesterparty

Bei der großen Silvesterparty sitzen 127 Personen rund um einen riesigen Tisch. Im Laufe der Nacht verlässt nacheinander jede zweite Person den Tisch, bis nur noch eine Person übrig bleibt. Die wievielte Person bleibt am längsten?

*Hinweise:* Wären es sechs Personen, würde die fünfte Person am längsten bleiben, wie folgende Abbildung zeigt:



*Ergebnis:* 127

*Lösung:* Diese Aufgabe kann klarerweise graphisch gelöst werden, in dem man die 127 Zahlen aufschreibt und schrittweise vorgeht.

Wir zeigen hier eine allgemeinere Lösung:

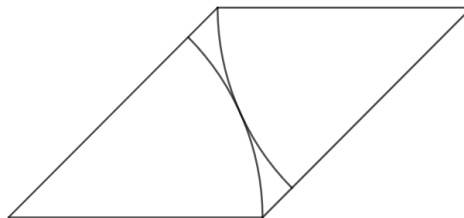
Betrachten wir zunächst den Fall, dass  $2^n$  Personen mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 2$  um den Tisch sitzen. In der ersten Runde werden alle geraden Zahlen gestrichen. Es bleiben dann genau  $2^{n-1}$  Personen übrig und es wird wieder bei 1 gestartet. Dies wird solange wiederholt, bis nur mehr die erste Person übrig bleibt.

Haben wir nun  $2^n + \ell$  Personen, wollen wir diesen Fall auf den vorherigen zurückführen. Dazu streichen wir die  $\ell$  Personen  $2, 4, 6, \dots, 2\ell$ . Die Person danach ist dann unsere neue erste Person mit  $2^n$  Personen am Tisch und wird deswegen übrig bleiben.

Für die konkrete Aufgabe gehen wir daher so vor: 127 ist gleich  $2^6 + 63$ . Wir streichen also die 63 Personen  $2, 4, 6, \dots, 126$ . Die letzte Zahl, die gestrichen wird, ist 126. Die 127. Person bleibt also am Schluss übrig.

### Aufgabe 2: Schräger Pi-zzakarton

Pizzabäcker Alex liefert Pizzen mit seinen neu designten Pizzakartons an eine Silvesterparty. Dabei sollen 2 Achtel-Pizzastücke mit einem Radius von 16 cm im Pizzakarton Platz haben. Diese werden wie in der Abbildung angeordnet. Wie viel Quadratzentimeter Karton braucht Alex für den parallelogrammförmigen Boden des Pizzakartons?

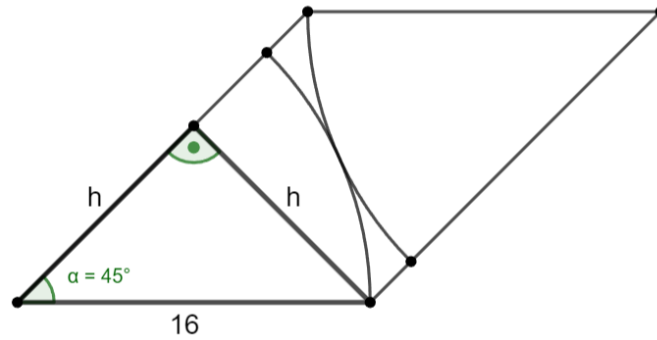


Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst



Ergebnis: 210,66

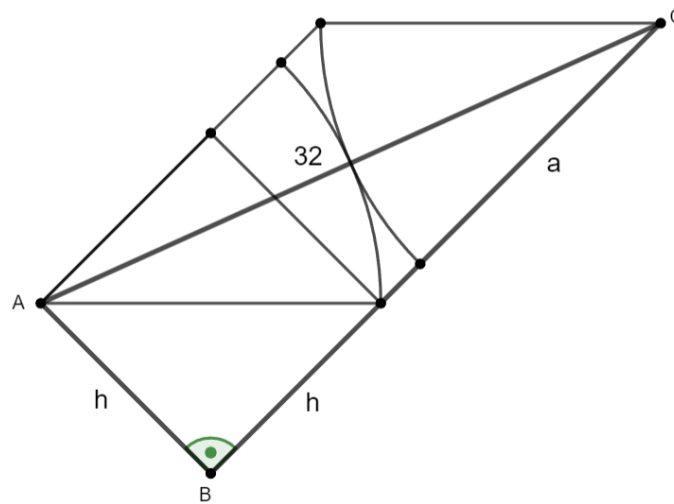
Lösung:



Da es Achtel-Pizzastücke sind, ist der spitze Winkel im Parallelogramm gleich  $45^\circ$ . Die Höhe des Parallelogramms lässt sich mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

$$h^2 + h^2 = 16^2 \Rightarrow h = \sqrt{128}$$

Da sich die Kreise berühren, wissen wir, dass die längere Diagonale 32 lang ist. Wenn wir nun das eingezeichnete gleichschenklige Dreieck nach unten klappen, dann erhalten wir gemeinsam mit der Diagonale ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$ .



Wenn wir die unbekannte Seite des Parallelogramm mit  $a$  bezeichnen, lautet der Satz des Pythagoras für dieses Dreieck:

$$(a + h)^2 + h^2 = 32^2.$$

Damit können wir nun  $a$  berechnen:

$$\begin{aligned}(a + h)^2 &= 32^2 - h^2 \\ a + h &= \sqrt{32^2 - h^2} \\ a &= \sqrt{32^2 - h^2} - h \\ a &= \sqrt{1024 - 128} - \sqrt{128} \\ a &= 8(\sqrt{14} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

Die Fläche ist somit  $a \cdot h = 8(\sqrt{14} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{128} = 210,66 \text{ cm}^2$  groß.

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst



### Aufgabe 3: Gemein(sam)es Geburtstagsrätsel

Charlotte sagt zu Anna und Benjamin, dass sie an einem der folgenden Tage Geburtstag hat: 1. Jän, 3. Jän, 4. Jän, 5. Jän, 2. Feb, 2. Mär, 3. Mär, 1. Apr, 2. Apr, 3. Apr, 4. Apr, 6. Mai, 7. Mai, 6. Jun, 7. Jun. Zusätzlich verrät sie Anna das Monat und Benjamin den Monatstag. Anna und Benjamin führen dann folgendes Gespräch:

- (1) Anna: „Ich weiß, dass du das Datum von Charlottes Geburtstag nicht weißt.“
- (2) Benjamin: „Ich weiß, dass du das Datum auch nicht weißt.“
- (3) Anna: „Ich weiß, dass du das Datum noch immer nicht weißt.“
- (4) Benjamin: „Jetzt kennen wir beide das Datum.“

Wann hat Charlotte Geburtstag?

*Bemerkung:* Wenn der 6. Mai (= 6.5.) die Lösung ist, gib 65 als Antwort ein.

*Ergebnis:* 33

*Lösung:* Wegen (1) kann man den Jänner ausschließen:

Würde Charlotte Benjamin 5 sagen, würde er das Datum wissen. Weil Anna weiß, dass Benjamin es nicht wissen kann, ist der Monat Jänner nicht möglich.

Wegen (2) kann man den 2. jedes Monats ausschließen:

Würde Charlotte Anna den Monat Februar sagen, würde sie das Datum wissen. Weil Benjamin weiß, dass Anna es nicht wissen kann, ist der 2. jedes Monat nicht möglich.

Wegen (3) kann man den April ausschließen:

Würde Charlotte Benjamin 1 oder 4 sagen, würde er das Datum wissen. Weil Anna weiß, dass Benjamin es nicht wissen kann, ist der Monat April nicht möglich.

Wegen (4) bleibt nur noch der 3. März übrig:

Würde Charlotte Benjamin 6 oder 7 sagen, würde er das Datum noch immer nicht wissen. Würde Charlotte Anna Mai oder Juni sagen, würde sie das Datum noch immer nicht wissen. Da nun beide das Datum wissen, kann es nur der 3. März sein.

*Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst*

