Lösungen des Monats - Februar 2024

Kategorie: Maximathik
9./10. Schulstufe

Aufgabe 1: Rundes Waagnis
Dagobert begrüßt am Faschingsdienstag seine Partygäste mit folgendem Rätsel: Jemand hat 10 Säcke mit je 2024 Münzen, in einem sind jedoch nur gefälschte Münzen. Nicht gefälschte Münzen wiegen 10 Gramm, gefälschte Münzen 5 Gramm. Um zu bestimmen, in welchem Sack die gefälschten Münzen sind, hat man eine Digitalwaage. Man darf auch mehrere Münzen auf einmal wiegen. Wie oft muss man die Waage mindestens benutzen, um herauszufinden, in welchem Sack die gefälschten Münzen sind?

Ergebnis: 1

Lösung: Man nehme 1 Münze aus dem ersten Sack, 2 aus dem zweiten und so weiter und wiegt diese ab. Wäre keine Münze gefälscht, wäre das Gewicht:

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) \cdot 10 = 550$$

Wenn das tatsächliche Gewicht $550 - 5 \cdot k$ ist, also k falsche Münzen abgewogen wurden, gibt k an, in welchem Sack sich die gefälschten Münzen befinden.

Aufgabe 2: Quadratische Luftschlangen
Quadratsummenfanatiker Düsentrieb kann nicht widerstehen, auf eine frisch ausgeblasene Luftschlange die Zahlen von 1 bis n in einer bestimmten Reihenfolge so zu schreiben, dass die Summe von zwei aufeinanderfolgender Zahlen immer eine Quadratzahl ist. Was ist die kleinste Zahl n größer 1 mit dieser Eigenschaft?

Hinweise:
Die Zahl 23 erfüllt die Eigenschaft, was folgende Anordnung zeigt:

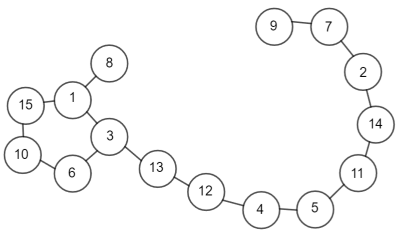
$$18, 7, 2, 23, 13, 12, 4, 21, 15, 10, 6, 19, 17, 8, 1, 3, 22, 14, 11, 5, 20, 16, 9$$

Eine nicht gültige Anordnung für die Zahl 5 ist:

$$1, 3, 2, 4, 5$$

Ergebnis: 15

Lösung: Man zeichne einen Graph, der alle Zahlen verbindet, deren Summe eine Quadratzahl ist. Damit man eine Folge findet, muss ein Pfad existieren der von jeder Zahl zu jeder anderen Zahl führt und dieser Pfad darf maximal 2 Zahlen mit einer ungeraden Anzahl an Verbindungen haben. Dies ist erst ab der Zahl 15 möglich. Der zugehörige Graph ist in folgender Abbildung veranschaulicht.



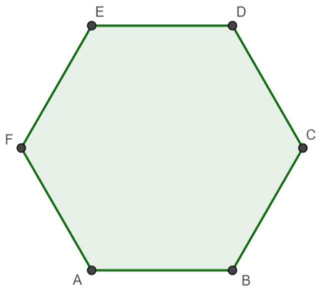
Eine mögliche Anordnung ist dann: 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

INDUSTRIELLENVEREINIGUNG OBERÖSTERREICH

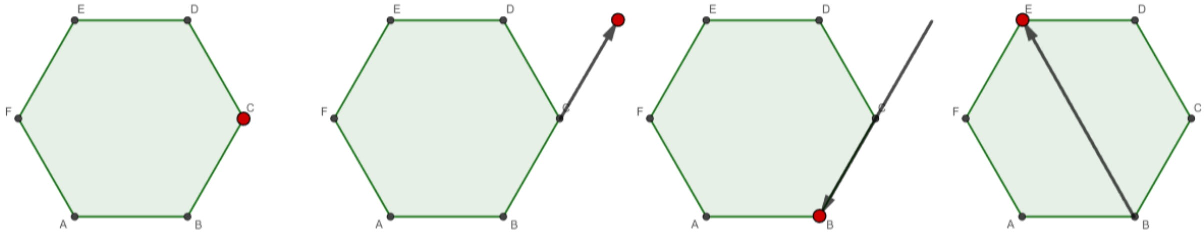
Aufgabe 3: Sechseckige Schnitzeljagd



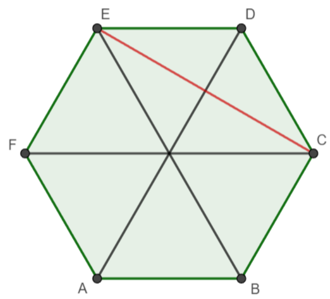
Daisy macht eine Schnitzeljagd. Sie befindet sich in einem Garten mit den 6 Bäumen A, B, C, D, E und F, die in einem regelmäßigen Sechseck der Seitenlänge $10 \cdot \sqrt{3}$ angeordnet sind. Um zum Schatz zu kommen, muss sie nach $C + \vec{BC} - \vec{AD} + 2\vec{AF}$ gehen. Sie möchte schneller sein, daher rechnet sie sich gleich aus, wo der Schatz versteckt ist. Dann geht Daisy den Weg direkt zum Schatz. Wie lang ist der direkte Weg?

Ergebnis: 30

Lösung: Folgt man den Vektoren, wie in folgender Abbildung dargestellt, kommt man bei Baum E an.



Der Weg dorthin ist zweimal die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $10 \cdot \sqrt{3}$.



Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks lässt sich mit dem Satz von Pythagoras berechnen:

$$h = \sqrt{(10 \cdot \sqrt{3})^2 - (\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{300 - 75} = \sqrt{225} = 15$$

Der direkte Weg ist als $2 \cdot 15 = 30$ lang.

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

INDUSTRIELLENVEREINIGUNG OBERÖSTERREICH