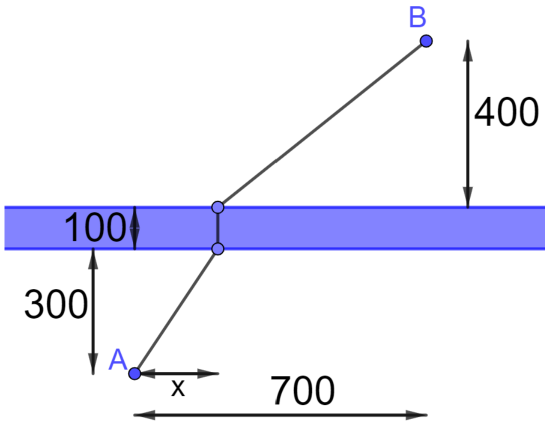
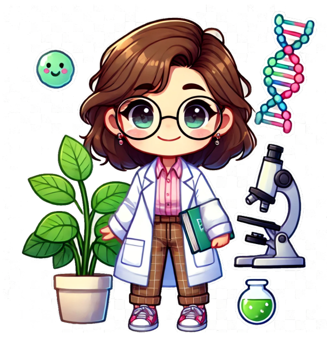
Lösungen des Monats - März 2025

Maximathik - die offene Kategorie

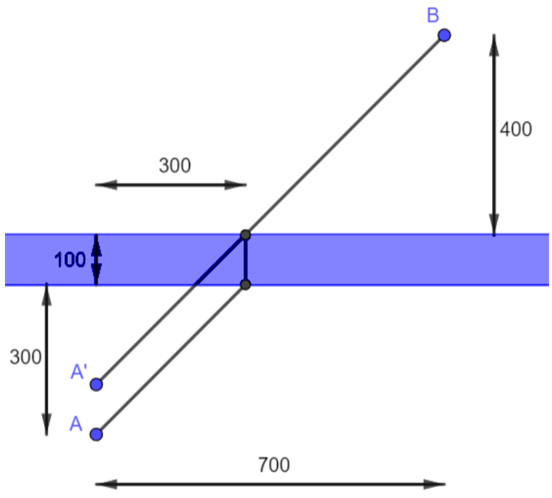
Aufgabe 1: Florale Fährtensuche
Die Biolehrerin Flora Fauna hat ein neues Blumenbeet mit besonders schönen Krokussen entdeckt. Sie geht dort mehrfach hin und möchte auch für ihre Lieblingsklasse einige Krokuszwiebeln mitnehmen. Auf dem Weg dorthin muss sie aber einen Bach überwinden. Beim ersten Mal nimmt sie dafür ein stabiles Holzbrett mit, welches sie rechtwinklig über den Bach legt. Wo soll sie das Brett hinlegen, damit sie den kürzest möglichen Weg von A zu B hat? Bestimme dazu x!





Ergebnis: 300

Lösung: Wir nehmen an, dass wir zuerst über das Holzbrett gehen können und verschieben A um 100 nach oben, dadurch erhalten wir A'. Dann ist der kürzeste Weg die direkte Verbindung von A' nach B. A' und B sind 700 vertikal und 700 horizontal von einander entfernt. Das obere Ende des Baches ist 300 vertikal von A' entfernt, also auch 300 horizontal, wenn man den kürzesten Weg geht. Damit muss x gleich 300 sein.



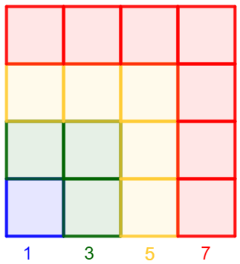
Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst.

Aufgabe 2: Flächendeckendes Farbenmeer

Gloria Gauna, die ebenfalls ein sehr großer Krokusfan ist, möchte in ihrem riesigen Garten bunte Krokussreihen pflanzen, wobei die Reihen aus 1, 3, 5, ... 97, 99 Krokussen bestehen sollen. Wie viele Krokusse benötigt Gloria insgesamt dafür?

Ergebnis: 2 500

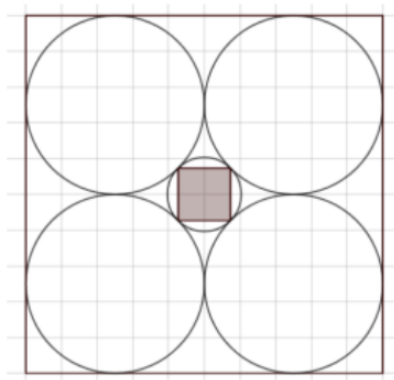
Lösung:



Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich n^2. 99 ist die $\frac{99+1}{2} = 50$te ungerade Zahl, die Summe ist somit $50^2 = 2500$.

Aufgabe 3: Fresher Froschkönig

Florian Froschkönig, der fesche Freund von Flora, ist Mathelehrer und hat Flora eine geometrische Skizze zum Valentinstag geschenkt, die Flora für ihr neues Blumenbeet verwenden kann. Auf dieser ist folgendes zu sehen: In einem Quadrat Q_1 sind vier gleich große Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 wie in der Skizze eingeschrieben, sodass jeder Kreis zwei andere berührt und außerdem zwei Seiten von Q_1 jeweils einmal berührt. In die entstehende Lücke in der Mitte ist der größtmögliche Kreis k' eingeschrieben, der alle vier vorigen Kreise berührt. In diesem Kreis ist das größtmögliche Quadrat Q_2 eingeschrieben.



Wie viel Prozent p des Flächeninhalts von Q_1 wird durch Q_2 belegt? Gib deine Antwort mit zwei Nachkommastellen an.

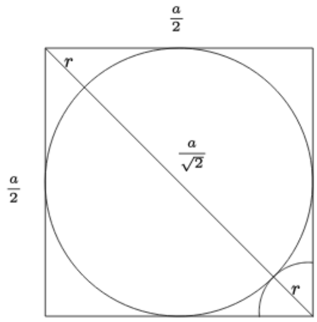
Ergebnis: 2,14

Lösung: Sei a die Seitenlänge von Q_1. Dann hat es den Flächeninhalt $A_1 = a^2$. Für die Diagonale d von Q_1 gilt dann: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Die vier großen Kreise haben jeweils einen Durchmesser von $\frac{a}{2}$. Betrachten wir nun ein Viertel von Q_1:

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst.

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

INDUSTRIELLENVEREINIGUNG OBERÖSTERREICH



Die Diagonale dieses Viertels hat die Länge $\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ziehen wir von dieser Diagonale nun den Durchmesser des großen Kreises ab, so erhalten wir zweimal den Radius r des Kreises k'. Also:

$$r = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)$$

Wie man der Skizze aus der Angabe entnehmen kann, ist r die halbe Diagonale des kleineren Quadrats. Somit ist die Seitenlänge des kleinen Quadrats $\sqrt{2}r$. Daher gilt für den Flächeninhalt A_2 des kleinen Quadrats:

$$\begin{aligned}
A_2 &= 2r^2 \\
&= 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)\right)^2 \\
&= 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Der Prozentsatz p wird nun berechnet mit:

$$\begin{aligned}
p &= 100 \cdot \frac{A_2}{A_1} \\
&= 100 \cdot \frac{\frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{a^2} \\
&= 50 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2,144660\ldots \\
&\approx 2,1447
\end{aligned}$$

Rufe mit Hilfe des QR-Codes unsere Website auf. Dort findest du eine Anleitung, wie du deine Lösungen abgeben kannst. Jeden Monat gibt es neue Aufgaben, bei denen du Punkte sammeln kannst.

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

INDUSTRIELLENVEREINIGUNG OBERÖSTERREICH