

Data Envelopment Analysis (DEA)

Assoz. Univ.-Prof. Dr. Johann Burgstaller

Institut für betriebliche Finanzwirtschaft
Johannes-Kepler-Universität Linz

24.03.2021

- ▶ Produktivitäts- und Effizienzanalyse
- ▶ Effizienzkonzepte und -messung
- ▶ DEA: Anwendungsgebiete, Ablauf, Prämissen
- ▶ Modelldarstellung und Anwendungsbeispiel
- ▶ Vergleich mit SFA, Fallstricke, Erweiterungen & Varianten
- ▶ Software
- ▶ Literatur

Ausgangspunkt: Produktivitäts- bzw. Effizienzanalyse

Dyckhoff & Allen (1999), Ahn (2014), Mühlenkamp (2016)

Performance- bzw. Leistungsbestimmung – Quantifizierung von Produktivität, Effizienz, Wirtschaftlichkeit.

Aufdeckung und Analyse von Ineffizienzen vergleichbarer Produktiv- bzw. Leistungseinheiten: Entscheidungseinheiten (EE), Decision Making Units (DMUs).

Einsatz im strategischen Controlling (operationale Performancesteuerung), z.B. angebunden an eine Balanced Scorecard (BSC).

Allerdings: Verbreitung und Akzeptanz in der (unternehmerischen) Praxis ausbaufähig.

- ▶ Produktionseffizienz: technische Effizienz, Skaleneffizienz.
- ▶ Allokative bzw. ökonomische Effizienz (Kosten-, Erlös-, Gewinneffizienz).
- ▶ Marktebene: sozialer Überschuss (soziale Wohlfahrt).

Effizienzmessung: Kennzahlen(systeme) vs. Frontiermethoden

Dyckhoff & Allen (1999), Ahn (2014), Mühlenkamp (2016)

Problematiken (von Systemen) eindimensionaler Kennzahlen (einfacher, partieller Faktorproduktivitäten):

- ▶ Zumeist keine eindeutige Effizienzrangfolge (über alle Outputs bzw. Inputs) herstellbar.
- ▶ Technologische Zusammenhänge (z.B. in Form von Skalen- und Verbundeffekten) bleiben unberücksichtigt – Gefahr von Fehlinterpretationen.
- ▶ Speziell schwer messbare Outputs bleiben oft unberücksichtigt.
- ▶ Gefahr der interessengeleiteten Beeinflussung – bei der DEA müssen Inputs und Outputs nicht vorab (durch die Entscheider:innen) gewichtet werden.
- ▶ Berücksichtigung der Rahmenbedingungen (verborgene Heterogenität) bei Kennzahlen schwieriger, oft auch nicht vorgesehen.
- ▶ Bei Kennzahlen allerdings eher ein absoluter Referenzwert vorhanden.

Data Envelopment Analysis (DEA)

Dyckhoff & Allen (1999), Richter & Borsch (2017)

DEA = produktionswirtschaftlich orientiertes Benchmarking-Konzept.

Produktionsfunktion = technisch effizienter Rand des Produktionsmöglichkeitsbereiches.

Randproduktionsfunktion als stückweise Umhüllende der beobachteten Daten konstruiert.

Nicht-parametrisches Verfahren, Techniken der linearen Programmierung.

Fußt konzeptuell auf Farrell (1957), wird seit Charnes et al. (1978) als DEA bezeichnet.

Anwendungsgebiete

Daraio et al. (2020)

Die meisten *literature reviews* zur Anwendung von DEA und SFA gibt es in den Bereichen:

- ▶ Agrarwissenschaften
- ▶ Transport und Logistik
- ▶ Finanzwirtschaft, Bankwesen
- ▶ Energiesektor
- ▶ Gesundheitswesen

Konkreter (z.B. Dyckhoff & Allen, 1999): Banken, Hochschulen, Krankenhäuser, Luftverkehrsgesellschaften, Altenheime, Theater, ...

DEA: Ablauf, Entscheidungen, Problemfelder

Dyckhoff & Allen (1999)

- ▶ Ableitung der relevanten Inputs und Outputs aus dem Zielsystem.
- ▶ Bestimmung der umhüllenden Technik (DEA vs. FDH).
- ▶ Bestimmung der Form der Skalenerträge (CRS vs. VRS).
- ▶ Festlegung des Abstandsmaßes bzw. der Orientierung.
- ▶ Auffinden der effizienten Einheiten (*best practice*).
- ▶ Berechnung der Effizienzgrade der ineffizienten Einheiten.

Prämissen der (Basismodelle der) DEA

Siehe z.B. Dyckhoff & Allen (1999, 423)

- ▶ Alle Input- und Outputmengen sind nicht negativ.
- ▶ Alle DMU werden durch dieselben Input- und Outputarten beschrieben.
- ▶ Allen Aktivitäten liegt dieselbe (unbekannte) Technik zugrunde.
- ▶ Auch Konvexkombinationen der Aktivitäten sind technisch möglich.
- ▶ Bei allen Inputs und Outputs handelt es sich um erwünschte Objektarten. Im Sinne der Effizienz ist es umso besser, je höher die Outputs und je niedriger die Inputs sind.

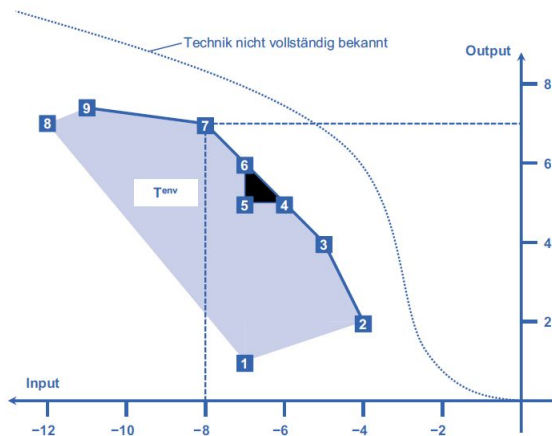
DEA im Produktionskontext

Richter & Borsch (2017), Ahn (2014)

- ▶ Quantitäten mehrerer Inputs und Outputs werden mittels DEA zu einem eindimensionalen Effizienzwert verdichtet.
- ▶ Exogene Preise sind dafür nicht notwendig.
- ▶ Effizienzbetrachtungen mit DEA sind daher auch für Aktivitäten möglich, für die keine objektiven Marktpreise (bzw. andere Präferenzinformationen der Entscheider:innen) existieren.
- ▶ Basiert auf dem Konstrukt Produktivität, d.h. dem Quotienten aus der gewichteten Summe wünschenswerter Outputs und der gewichteten Summe möglichst niedriger Inputs.
- ▶ Jeder DMU wird ein Effizienzgrad zwischen 0 und 100 (%) zugeordnet.
- ▶ Eine Aktivität (bzw. Produktion) ist effizient, wenn sie bei gleicher Technik von keiner anderen Aktivität dominiert wird.

DEA im Produktionskontext II – Umhüllende Technik

Richter & Borsch (2017, 39)



Quelle: In Anlehnung an Dyckhoff, 2006, S. 178.

Abb. 1: Umhüllende Technik

DEA im Produktionskontext III

Richter & Borsch (2017), Mühlenkamp (2016)

DEA ersetzt fehlende Marktpreise durch fiktive Gewichtungsfaktoren e_{jk} (für n Outputs) und c_{ik} (für m Inputs).

Für jede DMU (einzeln) so, dass der Quotient ϕ_k aus Output und Input maximal wird (sich ein möglichst hoher Effizienzgrad ergibt).

DEA in Form der Quotientenprogrammierung (individuelles Programm für jede DMU, die dabei jeweils mit 0 indiziert wird):

$$\max \phi_0 = \frac{\sum_{j=m+1}^{m+n} y_{j0} \cdot e_j}{\sum_{i=1}^m x_{i0} \cdot c_i} \quad (1)$$

DEA im Produktionskontext IV

Richter & Borsch (2017), Mühlkamp (2016)

Nebenbedingung: auch keine andere DMU k darf mit den für DMU 0 angesetzten Gewichtungsfaktoren einen Effizienzwert $\phi_k > 1$ erzielen.

$$\frac{\sum_{j=m+1}^{m+n} y_{jk} \cdot e_j}{\sum_{i=1}^m x_{ik} \cdot c_i} \leq 1, k = 1, \dots, K \quad (2)$$

Zusätzliche Nebenbedingungen: die Gewichtungen e_j und c_i sind nicht-negativ („Schattenpreise“ sind positiv).

Effizienzwerte zeigen den Abstand zum effizienten Rand der Technik.

Da die reale Technik (zumindest teilweise) unbekannt ist, wird sie durch die die „besten“ beobachteten Aktivitäten umhüllende Technik angenähert.

Effizienzgrenzen

Cantner et al. (2007, 157)

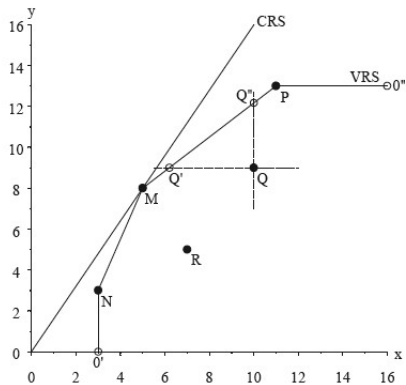


Abb. 5.4. Frontierfunktionen

Outputorientiertes DEA-Modell

Cantner et al. (2007)

Lineares Quotientenprogramm bei Annahme konstanter Skalenerträge:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} k &= \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{q}}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{p}} \\ \text{N.B.} \quad \frac{\mathbf{x}_l^T \mathbf{q}}{\mathbf{y}_l^T \mathbf{p}} &\geq 1 \quad \text{für alle } l \in \{1, \dots, n\} \\ \mathbf{p} &> \mathbf{0} \\ \mathbf{q} &> \mathbf{0} \end{aligned}$$

Multiplizier- bzw. Productivity-Form via Charnes-Cooper-Transformation (Multiplikation der Zähler und Nenner der Zielfunktion sowie Nebenbedingungen mit $\mathbf{y}_i^T \mathbf{p}$):

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \mathbf{v}} k &= \mathbf{x}_i^T \mathbf{v} \\ \text{N.B.} \quad \mathbf{x}_l^T \mathbf{v} - \mathbf{y}_l^T \mu &\geq 0 \quad \text{für alle } l \in \{1, \dots, n\} \\ \mathbf{y}_i^T \mu &= 1 \\ \mu &> 0 \\ \mathbf{v} &> \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Outputorientiertes DEA-Modell II

Cantner et al. (2007)

bzw.

$$\begin{array}{ll} \min_{\mu, \mathbf{v}} & k = \mathbf{x}_i^T \mathbf{v} \\ \text{N.B.} & \mathbf{X}^T \mathbf{v} - \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y}_i^T \boldsymbol{\mu} = 1 \\ & \boldsymbol{\mu} > \mathbf{0} \\ & \mathbf{v} > \mathbf{0} \end{array}$$

Envelopment-Form (nach Anwendung des Dualitätstheorems der linearen Programmierung):

$$\begin{array}{ll} \max_{\varphi, \boldsymbol{\lambda}} & \varphi \\ \text{N.B.} & \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{x}_i \\ & \varphi \mathbf{y}_i - \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Outputorientiertes DEA-Modell III

Cantner et al. (2007)

Productivity- und Envelopment-Form für variable Skalenerträge:

$$\begin{array}{ll} \min_{\mu, \nu, v_0} & \tilde{k} = \mathbf{x}_i^T \mathbf{v} + v_0 \\ \text{N.B.} & \mathbf{X}^T \mathbf{v} - \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{1}v_0 \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y}_i^T \boldsymbol{\mu} = 1 \\ & \boldsymbol{\mu} > \mathbf{0} \\ & \mathbf{v} > \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max_{\tilde{\varphi}, \lambda} & \tilde{\varphi} \\ \text{N.B.} & \mathbf{X}\lambda \leq \mathbf{x}_i \\ & \tilde{\varphi} \mathbf{y}_i - \mathbf{Y}\lambda \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{1}^T \lambda = 1 \\ & \lambda \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Normierung der Effizienzparameter zwischen 0 und 100%: Kehrwert!

Einfaches Anwendungsbeispiel

Richter & Borsch (2017)

Lernaktivitäten 20 Studierender A-T. Studieninputs und -outputs:

Studierender	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
I1: Studiensemester	9	8	7	7	5	8	<u>7</u>	8	6	6	6	7	13	10	6	6	7	<u>6</u>	7	9
I2: Lernaufwand/Woche [h]	35	30	46	29	50	45	<u>12</u>	35	40	37	35	20	29	15	30	31	50	<u>14</u>	60	35
I3: Anzahl Wiederholungen	2	9	1	4	0	3	<u>1</u>	8	4	0	0	3	7	8	2	1	3	<u>4</u>	7	8
O1: Praxiserfahrung	12	12	12	12	12	12	<u>14</u>	12	20	12	12	12	24	12	12	12	12	<u>18</u>	16	12
O2a: Abschlussnote	1,5	2,3	3,2	2,5	1,1	2,4	<u>2,0</u>	3,0	2,9	1,9	2,2	2,4	3,3	2,1	1,7	1,9	1,5	<u>2,2</u>	2,4	3,1
O2b: Punkteäquivalent	55	47	38	45	59	46	<u>50</u>	40	41	51	48	46	37	49	53	51	55	<u>48</u>	46	39

Tab. 1: Beispieldaten des Studien Leistungsvergleichs

Eventuelle Ausgangssituation: Ermittlung des besten Gesamteindruckes, relevant z.B. im Rahmen eines Bewerbungsgespräches.

Die Gewichtung (das Preissystem) wäre in diesem Fall der (unbekannte) Stellenwert, den die Personalleiterin den einzelnen Leistungsmerkmalen beimisst.

Einfaches Anwendungsbeispiel II

Richter & Borsch (2017)

Notwendige Gestaltungsentscheidungen in Bezug auf das Modell: Wahl der Orientierung und der Skalenertragsform.

Inputorientiertes Modell, da angenommen werden kann, dass die Studierenden eher Inputs denn Outputs kontrollieren (beeinflussen) können.

Variable Skalenerträge, da angenommen wird, dass z.B. eine Verdopplung der Studiendauer nicht zu einer Verdopplung der Praxiserfahrung oder der Punktezahl führt bzw. führen muss.

Resultate (nachfolgende Tabelle) aus dem inputorientierten BCC-Modell in der Envelopment-Form. 7 Studierende als „effizient“ ausgewiesen.

Spalte „Benchmark“ gibt an, welche DMUs anderen DMUs als Vorbild dienen.

Lambda-Werte: Konvexkombination von Benchmarks (Vorbilder-Menge), auf die die DMUs projiziert wurden, um ihre Effizienzwerte zu bestimmen.

Einfaches Anwendungsbeispiel III

Richter & Borsch (2017, 42)

Student	BCC-Effizienz	Benchmark (Lambda)
A	94,60%	E (0,556); G (0,444)
B	72,33%	E (0,214); R (0,786)
C	79,62%	E (0,640); G (0,214); R (0,146)
D	81,85%	E (0,270); R (0,730)
E	100,00%	E (1,000)
F	69,14%	E (0,476); G (0,007); R (0,517)
G	100,00%	G (1,000)
H	71,21%	E (0,303); R (0,697)
I	100,00%	I (1,000)
J	100,00%	J (1,000)
K	100,00%	K (1,000)
L	88,24%	E (0,118); G (0,294); R (0,588)
M	100,00%	M (1,000)
N	80,00%	G (1,000)
O	96,02%	E (0,421); G (0,183); R (0,396)
P	98,20%	E (0,477); G (0,370); R (0,153)
Q	76,16%	E (0,669); R (0,331)
R	100,00%	R (1,000)
S	78,57%	E (0,500); I (0,500)
T	64,07%	E (0,234); R (0,766)

Tab. 2: Effizienzwerte der DMUs und Benchmarks

Ergebnisse

Richter & Borsch (2017)

Ergebnisdiskussion: z.B. DMU E (hoher Lernaufwand, geringe Studiendauer, beste Note) versus DMU M (geringer Inputeinsatz, die meisten Praktikumswochen, aber unterdurchschnittliche Note).

DMU N versus DMU G.

DEA vergleicht DMUs mit ähnlichen Output-Input-Relationen. Ähnliche Noten und Praktikumsdauern, aber G setzt weniger Inputs ein.

Der Effizienzwert von 80 % bedeutet, dass N maximal 80 % seiner Inputs einsetzen dürfte, um effizient zu sein.

Durch Reduktion der Inputquantitäten um 20 % wäre N aber noch nicht auf Höhe der Inputs von G. Ergänzend können sogenannte „Slacks“ berechnet werden.

Handlungsempfehlungen kommen also aus einem differenzierten Vergleich mit den effizienten Peers.

Für weitere Hinweise ist eine Ursachenanalyse (Umfelddeterminanten) bzgl. Effizienzdefiziten anzuschließen.

DEA (nicht-parametrisch) vs. SFA (parametrisch)

Cantner et al. (2007), Mühlenkamp (2016)

DEA braucht keine Annahme über die Gestalt der Produktionsfunktion.

DEA braucht keine Annahme über die Form der Verteilung der Ineffizienz.

DEA bestimmt die Frontierfunktion allein auf Basis effizienter Einheiten.

DEA ist sensitiv in Bezug auf Datenfehler und Ausreißer, jede Abweichung von der Frontierfunktion wird als Ineffizienz betrachtet. Trennung des Störterms in der SFA in Zufallseffekte und Ineffizienz allerdings auch nicht ganz trivial.

Behandlung von Produktionsprozessen mit mehreren Outputgütern einfacher mit der DEA.

Ermittlung der Skalenineffizienz einfacher mittels DEA.

Untersuchung allokativer Effizienz einfacher mit SFA.

Konventionelle Hypothesentests nur bei der SFA möglich.

Rahmenbedingungen und Umweltfaktoren (z.B. regionale Faktoren) in der SFA einfach und direkt berücksichtigbar.

Fallstricke

Ahn (2010)

Methodische Komplexität bedingt eine Reihe von Fallstricken.

Siehe Dyson et al. (2001), oder auch Brown (2006).

Ahn (2010): Beispiel mit 10 Handelsfilialen.

Schildert z.B. Probleme in Bezug auf

- ▶ nicht-diskretionäre (nicht beeinflussbare) Faktoren,
- ▶ Skalenertragsform, sowie
- ▶ versteckte Heterogenität.

Generelle Themen (alle Methoden)

- ▶ Berücksichtigung aller relevanten Faktoren.
- ▶ Berücksichtigung der Qualität von Input- und Outputfaktoren schwierig.
- ▶ Definition was ist Input, was ist Output?
- ▶ Umgang mit Messfehlern in den Daten.
- ▶ Sicherstellung der Vergleichbarkeit (Homogenität) der DMUs.
- ▶ Einfluss von Zielen abseits von Kostenminimierung und Gewinnmaximierung (verallgemeinerte DEA-Modelle, GDEA)?

- ▶ Super-Effizienz von Benchmarks
- ▶ Berücksichtigung unerwünschter Objektarten
- ▶ Festlegung von Gewichtsrestriktionen (Priorisierung bestimmter KPIs)
- ▶ Berücksichtigung von Zufallseffekten (stochastische DEA)
- ▶ nicht-orientierte (ungerichtete) Effizienzmaße
- ▶ u.v.a.m.

- ▶ Excel-Add-Ins (z.B. DEAFrontier, DEA Solver Pro)
- ▶ Standalone-Programme
(z.B. Frontier Analyst, DEAP, EMS, MaxDEA, PIM-DEA)
- ▶ Routinen in bzw. Ergänzungen zu gängigen Programmpaketen
(z.B. Limdep, Stata, SAS, GAMS)
- ▶ Packages für R (z.B. Benchmarking, FEAR) bzw. Python (z.B. pyDEA),
DEA-Toolbox für Matlab
- ▶ Online-Tools (z.B. DEAOS)

- ▶ Ahn, H. (2014). Data Envelopment Analysis – mehr als Benchmarking, *Controller Magazin*, 39(5), 63-65.
- ▶ Ahn, H. (2010). Effizienzmessung mittels Data Envelopment Analysis (DEA) – Ohne Expertenwissen geht es nicht!, *Controller Magazin* 35(2), 48-51.
- ▶ Brown, R. (2006). Mismanagement or mismeasurement? Pitfalls and protocols for DEA studies in the financial services sector, *European Journal of Operational Research* 174(2), 1100-1116.
- ▶ Cantner, U., Krüger, J., Hanusch, H. (2007). *Produktivitäts- und Effizienzanalyse – Der nichtparametrische Ansatz*, Springer.
- ▶ Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research* 2(6), 429-444.
- ▶ Daraio, C., Kerstens, K.H.J., Nepomuceno, T.C.C., Sickles, R.C. (2019). Productivity and efficiency analysis software: an exploratory bibliographical survey of the options, *Journal of Economic Surveys* 33(1), 85-100.
- ▶ Daraio, C., Kerstens, K.H.J., Nepomuceno, T.C.C., Sickles, R.C. (2020). Empirical surveys of frontier applications: a meta-review, *International Transactions in Operational Research* 27(2), 709-738.
- ▶ Dyckhoff, H., Allen, K. (1999). Theoretische Begründung einer Effizienzanalyse mittels Data Envelopment Analysis (DEA), *Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 51(5), 411-436.
- ▶ Dyson, R.G., Allen, R., Camanho, A.S., Podinovski, V.V., Sarrico, C.S., Shale, E.A. (2001). Pitfalls and protocols in DEA, *European Journal of Operational Research* 132(2), 245-259.
- ▶ Farrell, M.J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)* 120(3), 253-290.
- ▶ Mühlenkamp, H. (2016). Effizienzmessung und quantitative Instrumente zur Effizienzsteigerung im öffentlichen Sektor, *Perspektiven der Wirtschaftspolitik* 17(2), 106-128.
- ▶ Richter, M., Borsch, E. (2017). Effizienzmessung mittels Data Envelopment Analysis, *WiSt - Wirtschaftswissenschaftliches Studium* 46(5), 20-26.

Weitere Literatur zum Benchmarking

- ▶ Bogetoft, P. (2012). *Performance Benchmarking*, Springer.
- ▶ Bogetoft, P., Otto, L. (2011). *Benchmarking with DEA, SFA, and R*, Springer.
- ▶ Coelli, T.J., Rao, D.S.P., O'Donnell, C.J., Battese, G.E. (2005). *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, 2. Auflage, Springer.
- ▶ Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K. (2007). *Data Envelopment Analysis*, 2. Auflage, Springer.
- ▶ Dyckhoff, H. (2006). *Produktionstheorie*, 5. Auflage, Springer.
- ▶ Scheel, H. (2000). *Effizienzmaße der Data Envelopment Analysis*, Springer.
- ▶ Toloo, M. (2014). *Data Envelopment Analysis*, VŠB-TU Ostrava.
- ▶ Zhu, J. (2014). *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking*, 3. Auflage, Springer.