

- **Quadratzahlen reimen sich: Beispiele**

$$23 \cdot 23 = 23^2 = \mathbf{529} \quad \mathbf{729} = 27^2 = 27 \cdot 27$$

$$48 \cdot 48 = 48^2 = \mathbf{2304} \quad \mathbf{2704} = 52^2 = 52 \cdot 52$$

Es gibt verschiedene Begründungen für dieses seltsame Verhalten.

Die ersten Quadratzahlen lernt man in der Volksschule beim 1x1 kennen:

Die Flächen von Quadraten mit einstelligen Seitenlängen lauten:

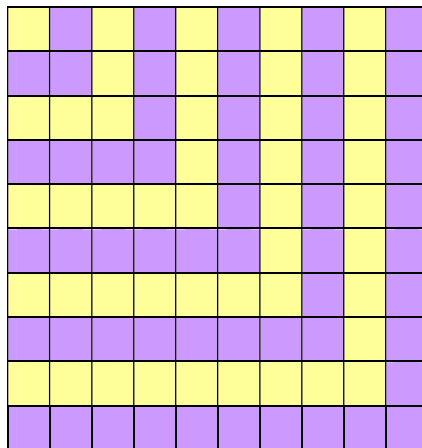
$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Betrachtet man nun die Differenzen dieser Zahlen, so erhält man:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, \dots$$

Wenn man in die Liste der Quadratzahlen 0 auch noch aufnimmt, hat man die fehlende 1 auch in der Liste der Differenzen

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$$



Die nächsten Quadratzahlen kann man nun auch mithilfe der Addition der nächsten ungeraden Zahlen berechnen, sie lauten:

$$100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, \dots$$

Bisher ist kein Reim erkennbar! ☹️

GEDULD!

Betrachtet man nun die Nachbarn der Quadratzahl $25 \cdot 25 = 25^2 = 625$, so startet erstmals dieses Phänomen:

$$\begin{aligned}
 24 \cdot 24 = 24^2 = \mathbf{576} \quad \mathbf{676} &= 26^2 = 26 \cdot 26 \\
 23 \cdot 23 = 23^2 = \mathbf{529} \quad \mathbf{729} &= 27^2 = 27 \cdot 27 \\
 22 \cdot 22 = 22^2 = \mathbf{484} \quad \mathbf{784} &= 28^2 = 28 \cdot 28 \\
 21 \cdot 21 = 21^2 = \mathbf{441} \quad \mathbf{841} &= 29^2 = 29 \cdot 29 \\
 20 \cdot 20 = 20^2 = \mathbf{400} \quad \mathbf{900} &= 30^2 = 30 \cdot 30 \\
 19 \cdot 19 = 19^2 = \mathbf{361} \quad \mathbf{961} &= 31^2 = 31 \cdot 31 \\
 18 \cdot 18 = 18^2 = \mathbf{324} \quad \mathbf{1024} &= 32^2 = 32 \cdot 32
 \end{aligned}$$

Begründung dieses Verhaltens durch Betrachtung der Differenzen:

$$\begin{array}{lll}
 625 - 576 = 49 & 676 - 625 = 51 & 49 + 51 = 100 \\
 576 - 529 = 47 & 729 - 676 = 53 & 47 + 53 = 100 \\
 529 - 484 = 45 & 784 - 729 = 55 & 45 + 55 = 100 \\
 484 - 441 = 43 & 841 - 784 = 57 & 43 + 57 = 100
 \end{array}$$

und so weiter

Noch toller verhalten sich die Quadratzahlen in der Nachbarschaft von 2500:

n	51	52	53	54	55	56	57	58	59
n^2	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481

n	49	48	47	46	45	44	43	42	41
n^2	2401	2304	2209	2116	2025	1936	1849	1764	1681

Was fällt auf?

Die Differenzen sind hier: $99+101$, $97+103$, $95+105$, $93+107$, usw.

Dies lässt sich auch mithilfe der binomischen Formeln toll begründen – und führt zu einem Rechentrick bei den Quadratzahlen zwischen 41^2 und 59^2 :

$$(50 \pm b)^2 = 2500 \pm 100b + b^2 = 100 \cdot (25 \pm b) + b^2$$

Beispiele: $53^2 = 2809$ oder $46^2 = (50-4)^2 = 2116$

Bemerkungen für Fachleute:

Dass sich solche „Reime“ ergeben **müssen**, ist klar aufgrund der quadratischen Reste modulo 100.

Da es nur 22 quadratische Reste modulo 100 gibt, tritt der „Reim“ bereits früh auf (erstmal bei 24^2 und 26^2).

In einer „Reihe“ treten 00 und 25 öfters auf, was nicht überraschend ist.

Die Kinder (und auch viele Mathematiker/innen) sind sehr überrascht.

Die Begründung mit den Differenzen ist für die sechste Schulstufe sehr anschaulich.

Den Trick mit der binomischen Formel erkläre ich geometrisch altergemäß (wobei die Summenformel sehr anschaulich ist)

Ein Quadrat mit Seitenlänge 50 und Flächeninhalt 2500 soll vergrößert werden: Man legt zwei „Bretter“ mit Breite b dran (nicht gegenüber) – diese beiden haben Gesamtfläche $100b$. Es fehlt noch das kleine Quadrat mit Flächeninhalt b^2

Bei der Verkleinerung muss man „Bretter“ wegschneiden, wobei man b^2 nochmals dazufügen muss, um zwei mal abschneiden zu können!