Vorkurs

I. Zahlen

II. Variable

III. Mengen und Logik

IV. Funktionen, Folgen

V. Differenzieren

VI. Integrieren

VII. Vektoren

VIII. Gleichungssysteme – Matrizen

I. Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$

1. Natürliche Zahlen

Verwendung
- Numerieren (Ordnen) — Ordinalzahlen
- Zählen — Kardinalzahlen

Eineindeutige Zuordnung zwischen den Mengen A und B, wenn

(1) Jedem Element von A ist genau ein Element aus B zugeordnet.

(2) Jedes Element von B ist genau einem Element von A zugeordnet.

Definition: Eine Menge M heißt endlich, wenn eine eineindeutige Zuordnung zwischen M und einem Anfangsstück von $\mathbb{N}$ möglich ist.

Eine Menge M heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist

→ LA I

M ist / heißt **abzählbar unendlich**

$:\Longleftrightarrow |M| = |\mathbb{N}| \quad (=: a)$

Bsp.:

$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$ gerade Zahl >0

$\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1\}$ ungerade Zahlen

$\mathbb{Q}$

M heißt / ist **überabzählbar unendlich**

$:\Longleftrightarrow |M| \neq |\mathbb{N}|$, M unendlich

$|M| =: c$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$

Darstellung

- Stellenwertsystem mit Basis 10
- Division mit Rest

Satz: Es sei $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(1) Es gibt Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$, sodaß

$$a = q \cdot b + r \text{ und } r < b$$

(2) Wenn $a = q \cdot b + r$, $r < b$ und

$$a = q' \cdot b + r', \; r' < b$$

dann ist $q = q'$ und $r = r'$

- Stellenwertsystem mit Basis b

Satz: Bei vorgegebener „Basis" $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gibt es zu jeder Zahl $a \in \mathbb{N}$ eine „Stellenzahl" $s \in \mathbb{N}$ und „Ziffern" $z_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ sodaß gilt:

$$z_1 \neq 0 \text{ und } a = z_1 \cdot b^{s-1} + z_2 \cdot b^{s-2} + \dots + z_{s-1} \cdot b + z_s$$

Dabei sind die Stellenzahl s und die Ziffern $z_1, \dots, z_s$ eindeutig

· Schreibweise:

$$z_1 \cdot b^{s-1} + z_2 \cdot b^{s-2} + \ldots + z_{s-1} \cdot b + z_s = \sum_{i=1}^{s} z_i \, b^{s-i}$$

· Horner-Schema

$a = (31224)_5 \quad ? \quad a = (\qquad)_{10}$

$$a = 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 4 =$$

$$= \quad (((3 \cdot 5 + 1) \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 4$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 15 & & 80 & & 410 & & 2060 \\
 & \cdot 5 & & \cdot 5 & & \cdot 5 & & \cdot 5 & \\
+3 & & +1 & & +2 & & +2 & & +4 \\
\hline
3 & & 16 & & 82 & & 412 & & 2064
\end{array}$$

Polynome

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & a_4 \cdot x & & a_4 \cdot x^2 + a_3 x & & a_4 x^3 + a_3 x^2 + a_2 x & & \ldots \\
 & \cdot x & & \cdot x & & \cdot x & & \cdot x & \\
+a_4 & & +a_3 & & +a_2 & & +a_1 & & +a_0 \\
\hline
a_4 & & a_4 \cdot x + a_3 & & a_4 \cdot x^2 + a_3 x + a_2 & & a_4 x^3 + a_3 x^2 + a_2 x + a_1 & &
\end{array}$$

Primzahlen

alternative Definition:

$p \in \mathbb{P}$ ($\subseteq \mathbb{N}$, Menge der Primzahlen)

$:\Leftrightarrow$

$p \in \mathbb{N} \quad \wedge$

$p > 1 \quad \wedge$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n | p \Rightarrow n = 1 \quad \vee \quad n = p$

Dazu

$a, b \in \mathbb{N}$

$a | b \;:\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N}: b = k \cdot a$

d.h. $r = 0$

Primzahlen

Definition: Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, wenn sie ungleich 1 ist und nicht als Produkt zweier kleinerer natürlicher Zahlen dargestellt werden kann.

Bew. zu $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$

i.) $|\mathbb{P}|$ nicht endlich

Sieb des ERATOSTHENES

mit Widerspruchsbeweis

Ann. $|\mathbb{P}| = m$

i.) $\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & \ldots \end{array}$

Axiome von Peano:

(1) $1 \in \mathbb{N}$

(2) Jede natürliche Zahl n hat einen eindeutig bestimmten Nachfolger n'

(3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

(4) Wenn $n \neq m$ ist, so ist $n' \neq m'$

(5) Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $1 \in A$

(b) falls $n \in A$, dann $n' \in A$

Dann ist $A = \mathbb{N}$

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist. Falls

(1) $A(1)$ richtig ist

(2) für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n)$ ist richtig impliziert $A(n')$ richtig, dann ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ richtig.

alternative Definition von $\mathbb{N}$:

M heißt <u>induktiv</u> $:\Longleftrightarrow$

$M \subseteq \mathbb{R}$

$1 \in M$

$\forall m \in M: m+1 \in M$

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \text{ induktiv}} M$$

setzt voraus: $\mathbb{R}$ bereits vorhanden

Bem. zur vollständigen Induktion:

ersetze $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$
und (1): $A(1)$ durch $A(m)$

Man beweise durch vollständige (= mathematische) Induktion

1.) Summenformel für die endliche arithmetische Reihe

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+nd)=\sum_{k=0}^{n}(a+k\cdot d)=$$

$$=(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}d$$

2.) Summenformel für die endliche geomtr. Reihe

$$b+bq+\ldots+b\cdot q^n=\sum_{k=0}^{n}b\cdot q^k=b\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\text{)}\ q\neq 1$$

3.) $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

4.) $3+9+15+\ldots+(6n-3)=3n^2$

5.) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

6.) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

Bruchzahlen (positive rationale Zahlen)

$$\frac{a}{b} \qquad a, b \in \mathbb{N}$$

Satz: Es gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann,
wenn $ad = bc$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Darstellung durch Dezimalbrüche

Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}$$

Körperaxiome

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$(a,b) \longmapsto a+b \qquad (a,b) \longmapsto a \cdot b$$

(Ass. +): $\forall a,b,c \in \mathbb{Q} \quad (a+b)+c = a+(b+c)$

(Komm +): $\forall a,b \in \mathbb{Q} \quad a+b = b+a$

(Neut +): $\exists 0 \in \mathbb{Q}\ \forall a \in \mathbb{Q} \quad a+0 = a$

(Inv +): $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists a' \in \mathbb{Q} \quad a+a' = 0$

(Ass ·): $\forall a,b,c \in \mathbb{Q} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(Komm ·): $\forall a,b \in \mathbb{Q} \quad a \cdot b = b \cdot a$

(Neut ·): $\exists 1 \in \mathbb{Q}\ \forall a \in \mathbb{Q} \quad a \cdot 1 = a$

(Inv ·): $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists a^{\times} \in \mathbb{Q} \quad a \cdot a^{\times} = 1$

(Distr): $\forall a,b,c \in \mathbb{Q} \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Anordnungsaxiome

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt:

Trichotomiegesetz

Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$

Transitivitätsgesetz

Wenn $a < b$ und $b < c$, dann $a < c$

Monotoniegesetze

(Mon +): Wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$

(Mon ·): Wenn $a < b$ und $0 < c$, dann $a \cdot c < b \cdot c$

Betrag einer rationalen Zahl

Definition: Für jede rationale Zahl a setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Man nennt $|a|$ den Betrag von a.

Man beweise:

a.) Für alle (rationalen) Zahlen $x \geq 0$ gilt:

$$1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$$

b.) Für alle Zahlen x mit $-1 < x < 0$ gilt die linke, aber nicht die rechte der Ungleichungen in a.)

c.) Für alle Zahlen $x \geq -0{,}5$ gilt:

$$\frac{1}{1+x} \leq 1 - x + 2x^2$$

Beantworte mit Begründung: Gilt für alle $a, b \in \mathbb{Q}$

a.) $a \leq |a|$? $\quad -a \leq |a|$? $\quad -|a| \leq a$? $\quad |-a| \leq a$?

b.) $|a-b| \leq |a| + |b|$? $\quad |a-b| \leq |a+b|$?

$|a-b| \geq |a| - |b|$? $\quad |a-b| \geq |b| - |a|$?

c.) Wenn $|a| < |b|$, dann $a^2 < b^2$?

Wenn $a^2 < b^2$, dann $|a| < |b|$?

Reelle Zahlen

- Inkommensurable Streckenpaare
- Zahlenstrahl

Satz: Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$

Satz: Ist p eine Primzahl, so gibt es keine rationale Zahl x mit $x^2 = p$

Satz: Ist $a \in \mathbb{N}$ und a nicht Zehnerpotenz dann gibt es keine rationale Zahl x mit $10^x = a$

• reelle Zahlen und Dezimalbrüche

Archimedisches Axiom:

Zu jeder Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n mit $x < n$

Definition: Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ und jedem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ versteht man unter der n-ten Wurzel aus a (geschrieben $\sqrt[n]{a}$) die eindeutig bestimmte Zahl $b \in \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft $b^n = a$

• Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{a^2} = |a|$

Definition: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so ist $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}$ das arithmetische Mittel dieser Zahlen. Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ so ist $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}$ das geometrische Mittel

Satz: Das geometrische Mittel von n nichtnegativen Zahlen ist stets kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

(Gleichheit besteht nur für $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$)

- Heron - Algorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel von a

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ist GW $\longrightarrow$

Komplexe Zahlen

komplexe Zahl: $z = \underbrace{a}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{b}_{\text{Imaginärteil}} \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$\operatorname{Re} z = a \qquad \operatorname{Im} z = b$

$$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + ib \,;\, a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1 \}$$

$$(a+ib) = (c+id) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

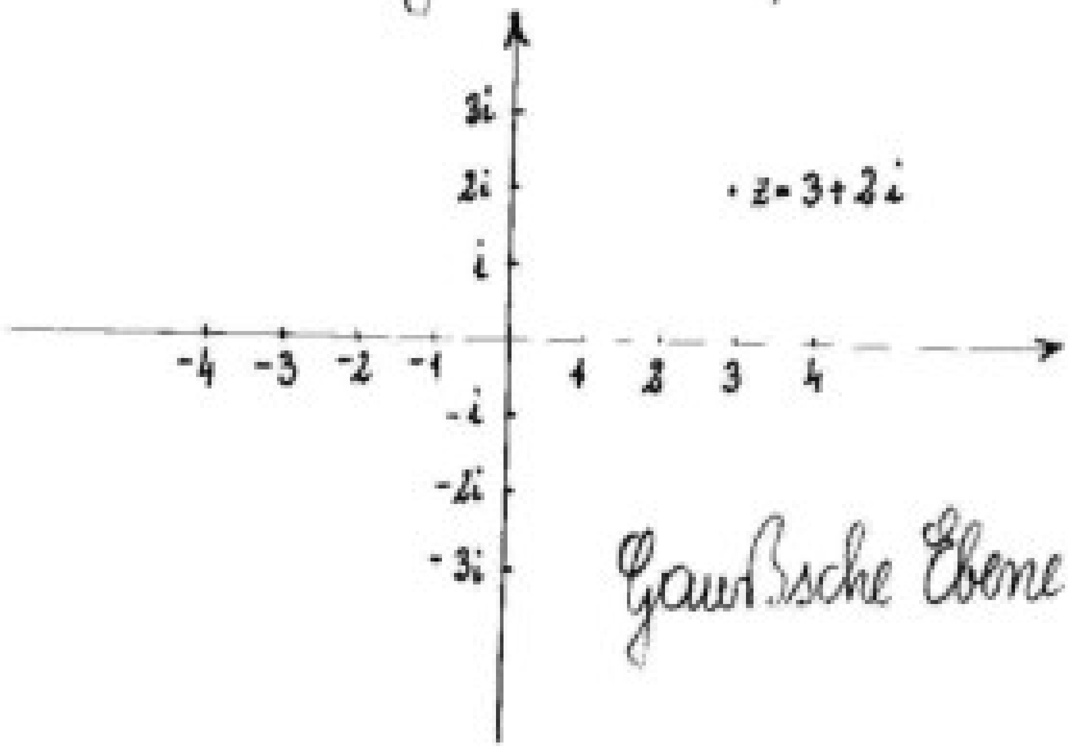
Addition: $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

Subtraktion: $(a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$

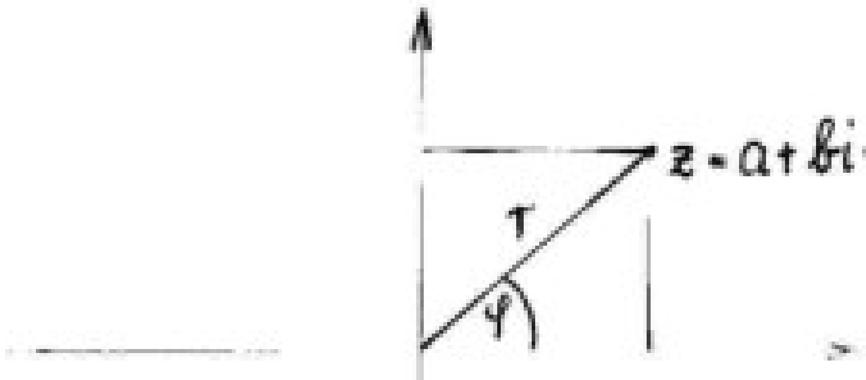
Multiplikation: $(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

Division: $\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{\underbrace{(c+id)(c-id)}_{c^2+d^2}} \qquad (c+id) \neq 0$

Darstellung der komplexen Zahlen



Gaußsche Ebene



$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$a = r\cos\varphi \qquad b = r\sin\varphi$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan\varphi = \dfrac{b}{a} \qquad 0 \le \varphi \le 360^\circ$

Multiplikation:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Potenzieren

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Formel von Moivre

Wurzeln komplexer Zahlen

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + k\cdot 360^\circ) + i\sin(\varphi + k\cdot 360^\circ))$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

oder $z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\cdot 360^\circ}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\cdot 360^\circ}{n}\right)\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, (n-1)$$

oder $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$

$$k = 0, 1, \ldots, (n-1)$$

Der Wurzelwert für $k = 0$ heißt Hauptwert der Wurzel

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Exponentialform komplexer Zahlen

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{i^2\varphi^2}{2!} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{i^4\varphi^4}{4!} + \frac{i^5\varphi^5}{5!} + \frac{i^6\varphi^6}{6!} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} + - \ldots$$

$$= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + - \ldots + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + - \ldots\right)$$

$$= \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad !$$

II. Rechnen mit Variablen

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \underbrace{n \cdot (n-1)!}_{\text{REKURSIV}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0! = 1$$

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$ $\qquad \binom{n}{n} = 1$

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0} a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots \pm (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

oder $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

Kürzen

$$\frac{64a^2b}{16ab^2}\ ,\quad \frac{6x-12}{7x-14}\ ,\quad \frac{a^2x-ax^2}{x^2-a^2}$$

$$\frac{mx+m-x-1}{m^2-1}$$

Addieren

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ ,\quad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\ ,\quad \frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x-1}{x^2+x}-\frac{4}{x^2-1}$$

$$\frac{2}{(a-1)^3}+\frac{1}{(a-1)^2}-\frac{2}{1-a}-\frac{1}{a}\ ,\quad \frac{a(3b-2c)}{6bc}-\frac{b(4a-5c)}{10ac}+\frac{8a^2+3b^2}{6ab}-\frac{5a-4b}{10c}$$

Multiplizieren

$$\frac{2a}{3bc}\cdot 6b^2\ ,\quad (m-n)\cdot\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\ ,\quad \frac{72uv^2}{11rs}\cdot\frac{121r^2s}{8uv}$$

$$\left(\frac{4x}{3a}-\frac{3y}{5b}\right)\left(\frac{4x}{3a}+\frac{3y}{5b}\right),\quad \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$$

Dividieren

$$\frac{98x^2}{15ab}:49x\ ,\quad (pq-2qr):\frac{2q}{pr}\ ,\quad \frac{p^2-q^2}{2a^2b^2}:\frac{p-q}{10ab}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y^2}{x}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Doppelbrüche

$$\frac{\frac{3}{a}-\frac{5}{b}}{\frac{5}{a}-\frac{3}{b}} \quad , \quad \frac{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad , \quad \frac{\frac{2}{m}-\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{m}\cdot\frac{4}{n}}$$

$$\frac{\frac{a+1}{a-1}-1}{1+\frac{a+1}{a-1}} \quad , \quad \frac{\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$$

1. Bernoullische Gleichung

$$p + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho v^2 = c \qquad \varrho = ?$$

2. Elektrische Widerstände in Parallelschaltung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (R \neq R_1) \qquad R_2 = ?$$

3. Gesetz von Hagen-Poiseuille

$$I = \frac{\pi \cdot r^4 (p - p_0)}{8 \eta l} \quad (r > 0) \qquad p = ?$$

4. Van der Waal'sches Gesetz

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = n \cdot R \cdot T \quad (p, a > 0) \quad b = ?$$

5. Linsengleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad (a, b, r_1 \in \mathbb{R}^+, \; (b+a) r_1 \neq a b (n-1)$$

$r_2 = ?$

1. $\rho = \dfrac{2(c-p)}{2gh+v^2}$

2. $R_2 = \dfrac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$

3. $p = p_0 + \dfrac{I \cdot 8\eta l}{r^4 \pi}$

4. $b = V - \dfrac{nRT V^2}{pV^2 + a}$

5. $r_2 = \dfrac{r_1 (n-1)ab}{(a+b)r_1 - (n-1)ab}$

Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n\text{-mal}}$$

$a^0 := 1$ für $a \gtrless 0$; $\quad 0^n = 0 \quad (n \neq 0)$

0^0 ist nicht definiert!

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{falls } n \geq m \\ \dfrac{1}{a^{m-n}} & \text{falls } n < m \end{cases}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad a \neq 0$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad b \neq 0$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\frac{a^n}{a^3}, \quad \frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}, \quad \frac{a^3}{a^{3m}}$$

$$\frac{a^7}{a^{-3}}, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$$

$$x^{n-8} : x^{5-2n}, \quad a^{m-1} b^{n-1} : (a^m b^n)$$

$$\frac{(a-1)^4 (x-1)^3}{(a-1)^3 (1-x)^2}, \quad \frac{a^3 b^{-2}}{x^5 y^{-4}} \cdot \frac{a^{-2} b}{x^{-3} y^{-1}}, \quad \frac{6a^5 b^2 c^{n+1}}{5x^3 y z^{n+4}} : \frac{3a^3 b^4 c}{10x^4 y^n z^5}$$

$$(ax^m + bx^n + cx^{m+n}) : x^{m-n}, \quad (x^{2m} - y^{2n}) : (x^m - y^n)$$

$$(a^3)^{n-1}, \quad \frac{(a^3 b^4)^3}{(a^2 b^3)^2}, \quad \left(\frac{ab^2}{x^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{xy^2}{a}\right)^3, \quad \left(\frac{4a^2 - 9b^2}{2x^2 + 3xy}\right)^3 : \left(\frac{2ab - 3b^2}{4x^2 - 9y^2}\right)^3$$

$$a^n = b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Wurzel: Unter der n-ten Wurzel $\sqrt[n]{b}$ aus einer Zahl $b \geq 0$ versteht man diejenige Zahl $a \geq 0$ für die gilt $a^n = b$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^r} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^r$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[n \cdot r]{a} = \sqrt[r]{\sqrt[n]{a}}$$

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Logarithmen

Definition: Seien $a, y \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.
Dann heißt jene Zahl $x \in \mathbb{R}$ für die gilt $a^x = y$, Logarithmus von y zur Basis a.
(Schreibweise: $x = {}^a\log y$)

$$ {}^a\log(x \cdot y) = {}^a\log x + {}^a\log y $$

$$ {}^a\log\left(\frac{x}{y}\right) = {}^a\log x - {}^a\log y $$

$$ {}^a\log(x^y) = y \cdot {}^a\log x $$

$$ {}^b\log y = \frac{{}^a\log y}{{}^a\log b} $$

III. Mengen und Logik

- Mengen
- Darstellung — aufzählend / beschreibend

- Aussagen
- Aussageformen

– Äquivalenz   A(x) äqu. B(x) genau dann, wenn
$\{x \mid A(x)\} = \{x \mid B(x)\}$

– Gleichungen – Lösen von Gleichungen

– Quantoren : $\exists$ Existenzquantor

$\forall$ Allquantor

Aussagen: wahr/falsch

625 ist eine Quadratzahl JA

Regnet es? NEIN

Hans Krankl wird 2006 Rapid-Trainer JA

Aussageform: mind. 1 freie Variable

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$ JA

625 ist eine Quadratzahl NEIN

JA

$\forall n,m \in \mathbb{N}: \underbrace{n+m \in \mathbb{N}}_{A(n,m)}$

Operationen für Aussagen und Mengen

- Negation ($\neg$)
- Konjunktion ($\wedge$)
- Disjunktion ($\vee$)

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
W	W	F	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	F

Seien A, B Mengen

$\complement A$ Komplement von A

$A \cap B$ Durchschnitt

$A \cup B$ Vereinigung

$A \subseteq B$ $A \subsetneq B$

weitere logische Operatoren

Implikation "$\Longrightarrow$"

Äquivalenz "$\Longleftrightarrow$"

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w	w
w	F	F	F
F	w	w	F
F	F	w	w

noch mehr

$p \barwedge q$, $p \veebar q$, $p ! q$

Zu Mengen:

$A \times B := \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ kartesisches Produkt weitere logische Operatoren

Implikation "$\Rightarrow$"

Äquivalenz "$\Leftrightarrow$"

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w	w
w	F	F	F
F	w	w	F
F	F	w	w

noch mehr

$p \barwedge q$, $p \veebar q$, $p \,!\, q$

Zu Mengen:

$A \times B := \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ kartesisches Produkt

IV. Funktionen

Definition: Es seien A, B Mengen. Unter einer Funktion oder Abbildung f von A nach B versteht man eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element von A genau ein Element von B zuordnet.

Schreibweise: $$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x)$$

A heißt Definitionsmenge, B heißt Zielmenge. Jedes Element x der Definitionsmenge heißt Argument oder Stelle, das dem Element $x \in A$ zugeordnete Element $f(x) \in B$ heißt Bildelement an der Stelle x oder Funktionswert an der Stelle x.

Graph von f : $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$

$$G_f \subseteq A \times B$$

- Darstellungen von Funktionen
  - Wertetabelle
  - graphische Darstellungen

Seien $f_1 : A_1 \to B_1$ und $f_2 : A_2 \to B_2$ Funktionen

$f_1 = f_2$ wenn $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$ und $\forall x \in A_1$ $f_1(x) = f_2(x)$

Sei $f : A \to B$ eine Funktion

f heißt injektiv, wenn aus $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

f heißt surjektiv, wenn für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$

f ist bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

- Umkehrabbildung

Reelle Funktionen

$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- konstante Funktion : $x \longmapsto c$
- identische Funktion : $x \longmapsto x$
- lineare Funktion : $x \longmapsto ax$
- affine Funktion : $x \longmapsto ax + b$
- Potenzfunktionen : $x \longmapsto x^n$
- Polynomfunktion : $x \longmapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
- (gebrochen) rationale Funktion : $x \mapsto \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$
- Wurzelfunktion : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
- Betragsfunktion : $x \longmapsto |x|$
- Größte - Ganze - Funktion : $x \longmapsto [x]$

- Winkelfunktionen: sin, cos, tan
- Exponentialfunktionen: $x \longmapsto a^x$
  zur Basis $a > 0$
- Logarithmusfunktion: $x \longmapsto {}^a\log x$
  zur Basis $a > 0$

Folgen

Definition: Eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longmapsto a_n$

heißt reelle Zahlenfolge

Schreibweisen: (a_n), $\langle a_n \rangle$, $\langle a_n | n \in \mathbb{N} \rangle$

Definition: Die Zahlenfolge (a_n) konvergiert oder strebt gegen a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß

für alle $n > n_0(\varepsilon)$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ ist.

a heißt Grenzwert oder Limes der Folge (a_n)

Schreibweisen: $a_n \longrightarrow a$ für $n \to \infty$ oder $a_n \to a$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $\lim a_n = a$

- Arithmetische Folge: $n \longmapsto k \cdot n + d$
- geometrische Folge: $n \longmapsto b \cdot q^n$ $(q \neq 0)$

Satz: Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{für jede Konstante } c$$

Ist überdies $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so sind fast alle $b_n \neq 0$

und $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Beispiele: $(a, a, a, \ldots,) \to a$

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{\sqrt[p]{n}} \to 0$ $(p \in \mathbb{N}$ fest$)$

$\sqrt[n]{n} \to 1$, $q^n \to 0$ f. $|q| < 1$

$(1+\frac{1}{n})^n \to e$, $(-1)^n$ diverg., $\frac{(n+1)^2 - n^2}{n} \to 2$

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ diverg.

Stetigkeit von Funktionen

Definition 1: Sei $f: X \to Y$ eine Funktion
Eine Funktion f heißt stetig an einer Stelle x ihres Definitionsbereiches X, wenn für jede Folge (x_n) aus X, die gegen x strebt, immer auch $f(x_n) \to f(x)$ konvergiert.

Definition 2: Die Funktion $f: X \to Y$ heißt stetig in $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so daß

für alle $y \in X$ mit $|y - x| < \delta$ stets $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Definition 3: f ist genau dann stetig in x, wenn zu jeder ε-Umgebung V von $f(x)$ immer eine δ-Umgebung U von x existiert, so daß

$$f(U \cap X) \subset V$$

Nullstellensatz von Bolzano:

Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und ist überdies $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$), so besitzt die Funktion f mindestens eine Nullstelle in (a, b)

Zwischenwertsatz von Bolzano:

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

REGULA FALSI

V. Differenzieren

Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

f heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert (und endlich ist).}$$

Dieser Limes wird als Ableitung an der Stelle x_0 bezeichnet (Schreibweise $f'(x_0)$)

Andere Formulierungen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

oder

$$F_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

ist stetig.

Satz: Die Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn $f(x_0+h) - f(x_0)$ in der Form

$$f(x_0+h) - f(x_0) = a \cdot h + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

dargestellt werden kann; in diesem Fall ist $a = f'(x_0)$

Differentiationsregeln

Satz: Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall I definiert und in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann sind auch $f+g$, $f-g$, αf, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$) differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(f+g)' = f'+g' \qquad (f-g)' = f'-g'$$

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' g \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Satz (Kettenregel): Seien f und g differenzierbare Funktionen, sodass $g \circ f$ existiert. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Differentiation elementarer Funktionen

$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$ für $a > 0$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

Definition: Die Funktion $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0 \in X$ ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum, wenn es eine δ-Umgebung U von x_0 gibt, so daß $\forall x \in U \cap X$ stets $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. stets $f(x) \geq f(x_0)$

Satz: Die Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ besitze in dem inneren Punkt x_0 von X ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar, dann gilt

$$f'(x_0) = 0$$

Satz: Ist die Funktion f auf dem Intervall I stetig und im Innern $\mathring{I}$ desselben differenzierbar, so ist f monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ auf $\mathring{I}$ bzw. f ist monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ auf $\mathring{I}$

Definition: Die Funktion $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0 \in X$ ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum, wenn es eine δ-Umgebung U von x_0 gibt, so daß $\forall x \in U \cap X$ stets $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. stets $f(x) \geq f(x_0)$

Satz: Die Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ besitze in dem inneren Punkt x_0 von X ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar, dann gilt

$$f'(x_0) = 0$$

Satz: Ist die Funktion f auf dem Intervall I stetig und im Innern $\mathring{I}$ desselben differenzierbar, so ist f monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ auf $\mathring{I}$ bzw. f ist monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ auf $\mathring{I}$

Satz: Die Funktion f sei differenzierbar auf einer δ-Umgebung U von x_0 und ihre Ableitung verschwinde in x_0. Dann ist

x_0 Stelle eines lokalen Maximums, wenn $f'(x)$ positiv für alle $x < x_0$ und negativ für alle $x > x_0$ ist;

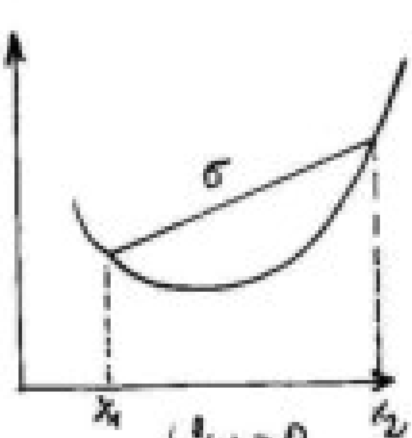
x_0 ist Stelle eines lokalen Minimums, wenn $f'(x)$ negativ für alle $x < x_0$ und positiv für alle $x > x_0$ ist.

Existiert überdies $f''(x_0)$, so ist x_0

Stelle eines lokalen Maximums, wenn $f''(x_0) < 0$

Stelle eines lokalen Minimums, wenn $f''(x_0) > 0$

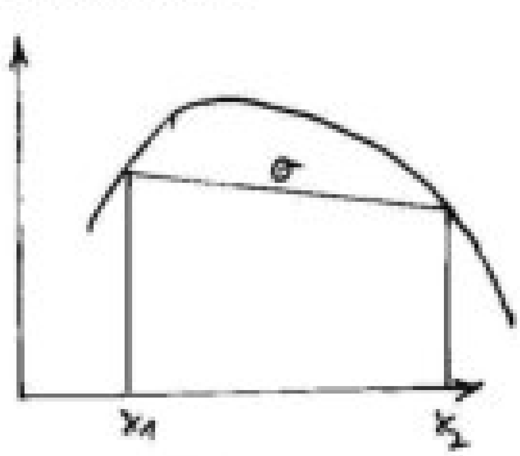
konvex



$f''(x) > 0$

f unterhalb σ

konkav



$f''(x) < 0$

f oberhalb σ

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist die Funktion f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig und im Inneren desselben differenzierbar, so gibt es mindeste einen Punkt x_0 in (a, b) an dem

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz von Rolle:

Ist die Funktion f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig und im Inneren desselbe differenzierbar und gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

Ableitung der Umkehrfunktion

VI. Integrieren

Definition: Es sei f eine reelle Funktion. Eine reelle Funktion F heißt Stammfunktion von f, falls $F' = f$

Man bezeichnet F auch als unbestimmtes Integral

Schreibweise: $F = \int f \, dx$

oder $F(x) = \int f(x) \, dx$

Satz: Es sei f eine auf einem Intervall definierte reelle Funktion und F_0 eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

F ist genau dann eine Stammfunktion von f wenn $F = F_0 + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Stammfunktionen

$$\int c\,dx = cx$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int e^{x}dx = e^{x}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \ln x\,dx = x\cdot \ln x - x$$

Integrationsregeln

$$\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$$

$$\int (\lambda f)\,dx = \lambda \int f\,dx \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|$$

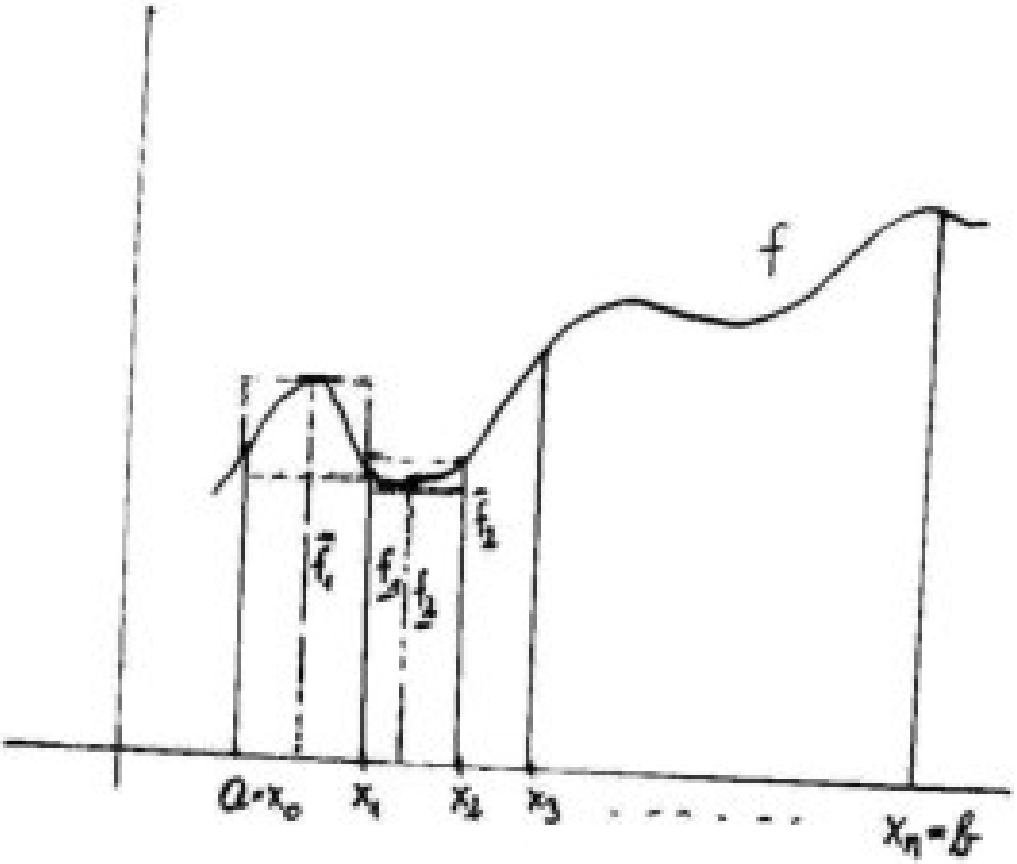
$$\int fg\,dx = Fg - \int Fg'\,dx$$

(partielle Integration)

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt\right)\Big|_{t = g^{-1}(x)}$$

Substitution

Flächeninhalt und Integral



Seien $x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ Einteilungspunkte

$$U_n = \underline{f}_1 (x_1 - x_0) + \underline{f}_2 (x_2 - x_1) + \ldots + \underline{f}_n (x_n - x_{n-1})$$

$$O_n = \overline{f}_1 (x_1 - x_0) + \overline{f}_2 (x_2 - x_1) + \ldots + \overline{f}_n (x_n - x_{n-1})$$

$$\underline{f}_i := \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$\overline{f}_i := \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

<u>Def.:</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt

Supremum aller Untersummen U_n

= Infimum aller Obersummen O_n

$\Leftrightarrow$: f ist (Riemann, R-) integrierbar

Bezeichnung: $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$

a untere Grenze des Integrals $\int_a^b f$
b obere

<u>Satz:</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ f ist R-integrierbar

<u>Satz:</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stückweise stetig
(endl. viele Sprungstellen)

$\Rightarrow$ f ist R-integrierbar

Definition: Es sei $f: D_f \to \mathbb{R}$ eine integrierbare reelle Funktion und D_f ein Intervall. Jede Funktion

$$F_d : D_f \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_d^x f \qquad (d \in D_f)$$

heißt Integralfunktion von f

Satz: (Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung)
Es sei $f: D_f \to \mathbb{R}$ eine {integrierbare und} stetige {reelle} Funktion und D_f ein Intervall $[a,b]$
Dann gilt: Jede Integralfunktion von f ist eine Stammfunktion von f

Satz: Es sei $f: D_f \to \mathbb{R}$ eine (integrierbare) (und) stetige (reelle) Funktion und D_f ein Intervall. Ferner sei F eine Stammfunktion von f.

Dann gilt für alle $a, b \in D_f$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

mit $c < d \in \mathbb{R}$

Sei $x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n$ eine Einteilung des Intervalls $[a, b]$.

$$Z_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

wobei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Verfeinert man die Einteilung so, daß $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$ wobei $\delta_n = \max\limits_{0 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$

So gilt:

Satz: Sei f integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt für jede Folge (Z_n) von Zwischensummen, für die ~~lim~~ die zugehörige Folge von Zerlegungen $\delta_n \to 0$

$$\lim_{n \to \infty} Z_n = \int_a^b f$$

VII. Vektoren

Vektoren

Zwei Vektoren werden als gleich bezeichnet, wenn sie durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen.

Vektoraddition

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Koordinatendarstellung eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Addition, Multiplikation mit eines reellen Zahl

Länge eines Vektors

Ortsvektoren

Unter dem Ortsvektor eines Punktes A versteht man den Vektor, der vom Koordinatenursprung zum Punkt A führt, d. h. den Vektor $\overrightarrow{OA}$

Abstand zweier Punkte

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

Mittelpunkt einer Strecke AB

$$M = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \\ \frac{a_3+b_3}{2} \end{pmatrix}$$

Inneres Produkt zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\alpha$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Vektorielles Produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$

Vektorraum

Gerade:

$$X = P + t\vec{a} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \qquad \vec{n} \text{ Normalvektor}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_0$$

Ebene

$$X = P + t\vec{a} + s\vec{b}$$

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \qquad \vec{n} \text{ Normalvektor}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a_0$$

VIII. Gleichungssysteme – Matrizen

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

allgemeines lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Gaußsches Eliminationsverfahren

Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_m = \mathbb{R}^{m \times n}$$

Anzahl d. Spalten

Anzahl d. Zeilen

$A = (a_{ij})$ Zeilenindex, Spaltenindex

spezielle Matrizen

Spaltenvektoren: $\bar{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$

Zeilenvektoren: $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$

Addition

Multiplikation mit einer reellen Zahl

Matrizenprodukt

$A \in \mathbb{R}^n_m \quad , \quad B \in \mathbb{R}^p_n$

$A \cdot B = C \in \mathbb{R}^p_m$

$$(a_{ij}) \cdot (b_{kl}) = (c_{il})$$

$$c_{il} = a_i \cdot \bar{b}_l = a_{i1} \cdot b_{1l} + a_{i2} \cdot b_{2l} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nl}$$

Matrizen und lineare Abbildungen

Rang einer Matrix

Ableitung / Differenzieren einer vektorwertigen Funktion

$$f: D \to \mathbb{R}^n \quad , \quad D \subseteq \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

mit $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$

f differenzierbar in x_0

$:\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : f_i$ differenzierbar in x_0

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix}$$

Differenzieren von

$f: D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n$

Dazu:

partielle Ableitung

f ist in $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ nach x_k partiell differenzierbar ($k \in \{1, \dots, n\}$ fix)

$:\Leftrightarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x)}{h}$$

$$=: \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \quad \text{existiert}$$

Falls alle partiellen Ableitungen existieren:

f ist partiell differenzierbar

$\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$

Gradient von f

Differenzieren von

$f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$f = (f_1, \dots, f_m)^T$

alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)$ ex.

Dann

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} =: Df(x) =: J_f(x)$$

Jakobimatrix von f in x

Ist einziger Kandidat für $f'(x)$

$\longrightarrow$ An I

a) $x \geq 0 \Rightarrow \quad x+1 \geq 1 > 0$

$\Rightarrow$ Ungleichungen darf mit $x+1$ mult. werden

$$\Leftrightarrow \underbrace{1-x^2}_{\leq 0} \leq 1 \leq 1-x+x^2 +x-x^2+x^3 = 1+\underbrace{x^3}_{\geq 0}$$

w. A.

b) $x > -1 \Rightarrow$ linke Teil gilt

$0 > x > -1 \Rightarrow x^3 < 0 \rightsquigarrow$ rechts ist falsch

c) $x \geq -0{,}5 \Rightarrow 1+x \geq 0{,}5 > 0$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1-x+2x^2 +x-x^2+2x^3$$

$$= 1 + \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{2x^3}_{\substack{? \geq 0 \\ \leq 0}}$$

aber $x^3 \geq -0{,}5^3$

reicht nicht

$\Rightarrow$ umschreiben

$$= 1 + \underbrace{x^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1+2x)}_{\geq 0} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Teil 2.

a) beachte iii) $-a \leq |a| \Leftrightarrow a \geq -|a|$

$\overline{\text{iv}}$ $\not\,$ $a=-1$

b) ii) $\not\,$ $a=1, b=1$

c) $|a| \leq |b| \Rightarrow |a|\cdot|a| \leq |a|\cdot|b|, \quad |a|\,|b| < |b|\,|b| =$

$\Downarrow$

$b \neq 0$