Abschlussklausur zur

Mathematische Statistik I

Werner G. Müller

Institut für Angewandte Statistik (IFAS)
Johannes-Kepler-Universität Linz

Sommersemester 2007

Die Klausur ist „open book", d.h. das Referenzbuch „Statistical Inference", 2nd edition ist als Prüfungsunterlage zugelassen.

Prüfungsdauer ist zwei Stunden.

8.11.2007

1. (Übungsaufgabe 8.19) Die Zufallsvariable X habe Dichte $f(x)=e^{-x}$, $x>0$. Man erhält eine Beobachtung der Zufallsvariable $Y=X^{\theta}$ auf deren Basis die Hypothesen $H_0{:}\,\theta=1$ gegen $H_A{:}\,\theta=2$ getestet werden sollen. Geben Sie zwei Gleichungen an, deren Lösungen den gleichmäßig trennschärfsten Test zum Niveau α bestimmen.

2. Haben die Zufallsvariablen X Dichte $f(x)$ und Y, unabhängig von X, Dichte $f(y)$ schreiben Sie die Dichte für $Z=X^2-Y^2$ als Integral.

3. Es seien $X_1,\ldots,X_n$ eine Stichprobe aus einer N$(\theta,a\theta)$ normalverteilten Grundgesamtheit. Bestimmen Sie die Maximum-Likelihoodschätzer für θ und a.

4. Was ist das Hauptkennzeichen, der auf diesen Herrn zurückgehenden statistischen Gedankenschule?

5. Es seien $X_1,\ldots X_n$ i.i.d. normalverteilte Zufallsvariable N(μ,σ^2). Mit unbekanntem μ und σ^2. Zeigen Sie, dass die Summe und Quadratsumme der Beobachtungen zusammen eine minimal suffiziente Statistik für die Parameter sind.

6. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz für die Verteilung des drittgrößten Wertes einer Zufallsstichprobe der Größe $n=10$ aus einer $(0,\theta)$ Gleichverteilung.

7. Wozu dient der folgende Mathematica-code/output?

$$\textbf{Solve}[\{x == (u/p)/(v/q),\ y == u+v\},\ \{u, v\}]$$

$$\left\{\left\{u \to \frac{p\,x\,y}{q+p\,x},\ v \to \frac{q\,y}{q+p\,x}\right\}\right\}$$

$$\textbf{D}\left[\left\{\frac{p\,x\,y}{q+p\,x},\ \frac{q\,y}{q+p\,x}\right\},\ \{\{x, y\}\}\right]$$

$$\left\{\left\{-\frac{p^2\,x\,y}{(q+p\,x)^2}+\frac{p\,y}{q+p\,x},\ \frac{p\,x}{q+p\,x}\right\},\ \left\{-\frac{p\,q\,y}{(q+p\,x)^2},\ \frac{q}{q+p\,x}\right\}\right\}$$

$$\textbf{Det}\left[\left\{\left\{-\frac{p^2\,x\,y}{(q+p\,x)^2}+\frac{p\,y}{q+p\,x},\ \frac{p\,x}{q+p\,x}\right\},\ \left\{-\frac{p\,q\,y}{(q+p\,x)^2},\ \frac{q}{q+p\,x}\right\}\right\}\right]$$

$$\frac{p\,q\,y}{(q+p\,x)^2}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{p\,x\,y}{q+p\,x}\right)^{p/2-1} \left(\frac{q\,y}{q+p\,x}\right)^{q/2-1} e^{-y/2}\,\frac{p\,q\,y}{(q+p\,x)^2}\,dy$$

$$\frac{1}{x}\,\text{If}\Big[\text{Re}[p+q] > 0,\ 2^{\frac{p+q}{2}} \left(\frac{q}{q+p\,x}\right)^{q/2} \left(\frac{p\,x}{q+p\,x}\right)^{p/2} \text{Gamma}\left[\frac{p+q}{2}\right],\ \text{Integrate}\left[\frac{e^{-y/2}\left(\frac{q\,y}{q+p\,x}\right)^{q/2}\left(\frac{p\,x\,y}{q+p\,x}\right)^{p/2}}{y},\ \{y, 0, \infty\},\ \text{Assumptions} \to \text{Re}[p+q] \le 0\right]\Big]$$

8. (Übungsaufgabe 7.40) Es seien $X_1,\ldots,X_n$ iid Bernoulli(p)-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass die Varianz von $\bar{X}$ die Cramér-Rao Schranke erreicht.