Wiederholungsklausur zur

# Mathematische Statistik I


## Werner G. Müller

**Institut für Angewandte Statistik (IFAS)**
**Johannes-Kepler-Universität Linz**


**Sommersemester 2006**

Die Klausur ist „open book", d.h. das Referenzbuch „Statistical Inference", 2nd edition ist als Prüfungsunterlage zugelassen.

Prüfungsdauer ist zwei Stunden.

**10.1.2006**

1. Warum verwendet man zur Schätzung der Varianz einer Grundgesamtheit anstelle der Stichprobenvarianz üblicherweise den Schätzer $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ ? Begründen Sie ausführlich.

2. (Übungsaufgabe 6.2) Es seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängige Zufallsvariable mit Dichten

$$f_{X_i}(x\,|\,\theta) = \begin{cases} e^{i\theta - x} & x \geq i\theta \\ 0 & x < i\theta \end{cases}.$$

   Zeigen Sie, dass $T=\min_i(X_i/i)$ eine suffiziente Statistik für $\theta$ ist.

3. Wodurch zeichnet sich die nach diesem Herrn: benannte Verteilung aus?

4. Es seien $X_1$ und $X_2$ gleichverteilte Zufallsvariable auf $(\theta, \theta+1)$. Um zu testen, ob $H_0$: $\theta=0$ gegen $H_1$: $\theta>0$ gebe es zwei Tests:
   - $\phi_1(X_1)$: lehne $H_0$ ab wenn $X_1 > 0.95$, und
   - $\phi_2(X_1, X_2)$: lehne $H_0$ ab wenn $X_1 + X_2 > C$.

   Finden Sie jenen Wert für $C$ für den die Tests das gleiche exakte Niveau besitzen.

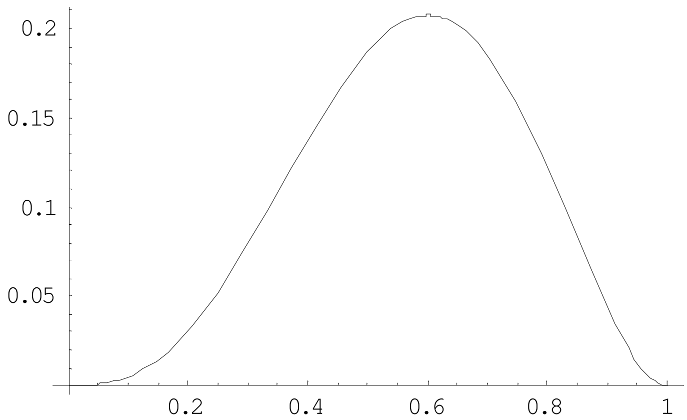
5. Haben die Zufallsvariablen $X$ Dichte $f(x)$ und $Y$, unabhängig von $X$, Dichte $f(y)$ schreiben Sie die Dichte für $Z=X^2-Y^2$ als Integral.

6. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der drittgrößte Wert einer Zufallsstichprobe der Größe $n=10$ aus einer Standardnormalverteilung größer als Null ist.

7. Interpretieren Sie den folgenden Mathematica-code/output:

```
x = 2
Plot[(x+2) (x+1) p^3 (1-p)^x / 2, {p, 0, 1}]
```

2




-Graphics-

$$\int_0^1 (x+2)\,(x+1)\,p^3\,(1-p)^x/2\,dp$$

$$\frac{1}{10}$$

8. Es seien $X_1,\ldots,X_n$ eine Stichprobe aus einer N$(0,\sigma_X^2)$ normalverteilten Grundgesamtheit und $Y_1,\ldots,Y_m$ eine Stichprobe aus einer N$(0,\sigma_Y^2)$ normalverteilten Grundgesamtheit, unabhängig von den $X$en. Definiere $\lambda= \sigma_Y^2/\sigma_X^2$. Bestimmen Sie den Likelihoodverhältnistest zum Niveau $\alpha$ für die Hypothesen $H_0{:}\lambda=\lambda_0$ gegen $H_A{:}\lambda\neq\lambda_0$.