Endklausur zur

Mathematische Statistik II

Werner G. Müller, Institut für Angewandte Statistik (IFAS), JKU Linz

Wintersemester 2009/10

Die Klausur ist „open book“, d.h. das Referenzbuch „Statistical Inference“, 2nd edition ist als Prüfungsunterlage zugelassen. Prüfungsdauer ist zwei Stunden.

11.3.2010

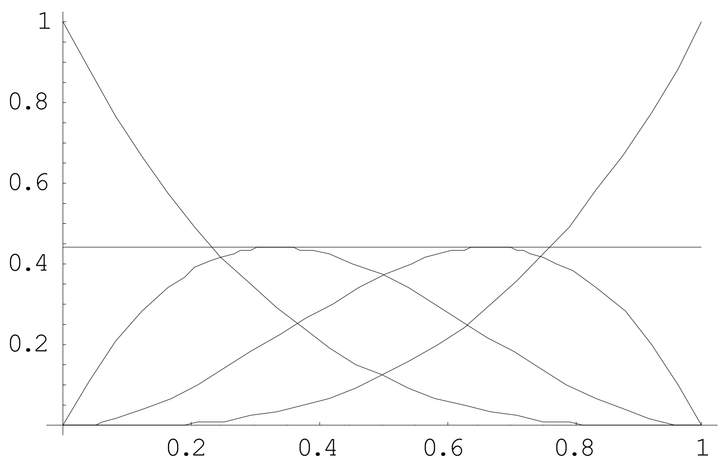
1. Die Stirling’sche Formel kann mittels zentralen Grenzwertsatzes hergeleitet werden:

   (a) Zeigen Sie, dass, wenn X_i exponentialverteilt(1) ist ($i=1,2,\ldots$ alle unabhängig), für jedes x gilt
   $$P\left(\frac{\bar{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \to P(Z \leq x),$$
   wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsgröße bezeichnet.

   (b) Differenzieren Sie nun beide Seiten der obigen Approximation um zu zeigen, dass
   $$\frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n)}(x\sqrt{n}+n)^{n-1} e^{-(x\sqrt{n}+n)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$
   mit Stirlings Formel an der Stelle $x=0$.

2. Was illustriert der folgende Mathematica-code/output?

```
Plot[{(1 - p)^3, 3 p (1 - p)^2, 3 p^2 (1 - p), p^3, 0.442},
  {p, 0, 1}]
```



- Graphics -

3. Erklären Sie das Prinzip des Bootstraps in eigenen Worten.

4. Es seien X_1, X_2 i.i.d. gleichverteilte Zufallsvariablen aus $(\theta-1/2,\ \theta+1/2)$.
   a. Zeigen Sie, dass $(\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2))$ ein 50% Konfidenzintervall für θ darstellt.
   b. Angenommen Sie beobachten $X_1=84.03$ und $X_2=84.04$. Wie „zufrieden“ sind sie mit dem obigen 50% Konfidenzintervall? Ändert sich Ihre „Zufriedenheit (confidence)“, wenn Sie stattdessen $X_1=64.02$ und $X_2=65.02$ beobachten? Argumentieren Sie ausführlich.

5. Geben Sie eine einfache Zufallsfolge an, die in Wahrscheinlichkeit, jedoch nicht mit Wahrscheinlichkeit konvergiert und begründen Sie.

6. Es seien $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. Beobachtungen aus einer Bernoulli(p)-population. Die Varianz des Maximum-Likelihood-Schätzers für die Varianz der Population lässt sich abschätzen durch $\hat{p}(1-\hat{p})(1-2\hat{p})^2/n$, wenn $p\neq 1/2$. Finden Sie eine analoge Abschätzung für den Fall $p=1/2$.

7. Zeigen Sie, dass die asymptotische relative Effizienz des Medians M_n gegenüber dem Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ von Skalenänderungen unberührt bleibt. Das heißt, es ist unerheblich, ob die zugrunde liegende Dichte $f(x)$ oder $(1/\sigma)f(x/\sigma)$ ist.

8. Auf diesen Herren geht eine nach ihm benannte Approximation zurück, welche bei der Konstruktion von Konfidenzintervallen von Bedeutung ist. Erklären Sie.