

Wiederholungsklausur zur
Mathematische Statistik II

Werner G. Müller, Institut für Angewandte Statistik (IFAS), JKU Linz

Wintersemester 2007/08

Die Klausur ist „open book“, d.h. das Referenzbuch „Statistical Inference“, 2nd edition ist als Prüfungsunterlage zugelassen. Prüfungsdauer ist eine Stunde.

28.5.2008

1. Die Stirling'sche Formel kann mittels zentralen Grenzwertsatzes hergeleitet werden:

(a) Zeigen Sie, dass, wenn X_i exponentialverteilt(1) ist ($i=1,2,\dots$ alle unabhängig), für jedes x gilt

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow P(Z \leq x),$$

wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsgröße bezeichnet.

(b) Differenzieren Sie nun beide Seiten der obigen Approximation um zu zeigen, dass

$$\frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n)} (x\sqrt{n} + n)^{n-1} e^{-(x\sqrt{n} + n)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

mit Stirlings Formel an der Stelle $x=0$.

2. Wozu dient folgender Mathematica-code/output?

In[1]:= `f[x_] = PDF[ChiSquareDistribution[v], x]`

$$\text{Out[1]} = \frac{2^{-v/2} e^{-x/2} x^{-1+\frac{v}{2}}}{\text{Gamma}\left[\frac{v}{2}\right]}$$

In[2]:= `M[t_] = Integrate[Exp[t * x] * f[x], {x, 0, infinity},`

$$\text{Assumptions} \rightarrow \text{Re}[t] < \frac{1}{2} \ \&\& \ \text{Re}[v] > 0]$$

$$\text{Out[2]} = (1 - 2 t)^{-v/2}$$

$$\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$$

—

3. Erklären Sie das Prinzip des Bootstraps in eigenen Worten.

4. Es seien X_1, X_2 i.i.d. gleichverteilte Zufallsvariablen aus $(\theta-1/2, \theta+1/2)$.

a. Zeigen Sie, dass $(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_2))$ ein 50% Konfidenzintervall für θ darstellt.

b. Angenommen Sie beobachten $X_1=84.03$ und $X_2=84.04$. Wie „zufrieden“ sind sie mit dem obigen 50% Konfidenzintervall? Ändert sich Ihre „Zufriedenheit“ (confi-

dence)“, wenn Sie stattdessen $X_1=64.02$ und $X_2=65.02$ beobachten? Argumentieren Sie ausführlich.