Musterlösung zum Grundlagenbeispiel "Getriebewelle"
Klausur Maschinenelemente, Musterlösung 2011

14. Februar 2011

1 Riemenkräfte

Abbildung 1 zeigt die Kräfte und Momente, die auf die freigeschnittene untere Riemenscheibe wirken.

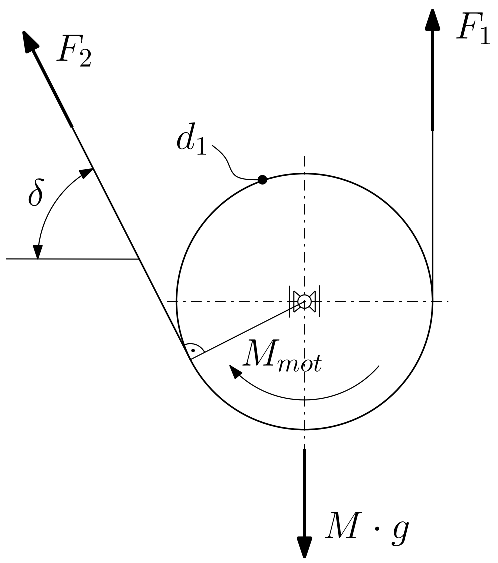

Abbildung 1: Kräfte und Momente an der unteren Riemenscheibe

Zur Bestimmung der Riemenkräfte F_1 und F_2 setzt man die Gleichgewichtsbedingungen (1) an der unteren Scheibe an.

$$\Sigma F_{ver} = 0 \tag{1a}$$
$$\Sigma F_{hor} = 0 \tag{1b}$$
$$\Sigma M = 0 \tag{1c}$$

Die Beziehung (1b) bringt keine für uns nützliche Information, sie dient nur zur Bestimmung der (für die Aufgabe nicht benötigten) horizontalen Führungskraft. Die beiden anderen Gleichungen ergeben folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 \cdot \sin(\delta) - M \cdot g &= 0 \\ F_1 \cdot \frac{d_1}{2} - F_2 \cdot \frac{d_1}{2} - M_{mot} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

mit den unbekannten Trumkräften F_1 und F_2. Das Motormoment M_{mot} bestimmt man aus

$$M_{mot} = \frac{P_{mot} \cdot 30}{\pi \cdot n_{mot}} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt für die Trumkräfte

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{M \cdot g - \frac{P_{mot} \cdot 60}{n_{mot} \cdot d_1 \cdot \pi}}{1 + \sin(\delta)} \\ F_1 &= M \cdot g - F_2 \cdot \sin(\delta) \end{aligned} \tag{4}$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergeben sich

$$\begin{aligned} F_1 &= 1472 \text{ N} \\ F_2 &= 566 \text{ N} \end{aligned} \tag{5}$$

2 Verzahnungsgeometrie

Zur Bestimmung der Geometrie der Zahnradstufe bestimmt man zuerst die notwendige Übersetzung. Gegeben sind die An- und Abtriebsdrehzahl sowie das Durchmesserverhältnis der Riemenscheiben. Daraus kann man die Drehzahl der Getriebewelle bestimmen. Der Schlupf am Riemen wird dabei vernachlässigt.

$$n_{welle} = n_{mot} \cdot \frac{d_1}{d_3} = 1450 \cdot \frac{160}{400} = 580 \text{ min}^{-1} \tag{6}$$

Daraus folgt die notwendige Übersetzung der Zahnradstufe zu

$$i = \frac{n_{welle}}{n_{ab}} = \frac{580}{300} = 1.93 \tag{7}$$

Die Zähnezahl des Rades bestimmt man durch

$$z_2 = i \cdot z_1 = 1.93 \cdot 27 = 52.2 \approx 52 \tag{8}$$

Die Wälzkreisdurchmesser von Ritzel und Rad ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
d_{w1} &= \frac{2 \cdot a_z \cdot z_1}{(z_1 + z_2)} = \frac{2 \cdot 160 \cdot 27}{(27 + 52)} = 109.37 \text{ mm} \\
d_{w2} &= \frac{2 \cdot a_z \cdot z_2}{(z_1 + z_2)} = \frac{2 \cdot 160 \cdot 52}{(27 + 52)} = 210.63 \text{ mm}
\end{aligned} \tag{9}
$$

3 Zahnkräfte

Die Umfangskraft F_{tw} berechnet man aus dem Momentengleichgewicht

$$
F_{tw} = \frac{2 \cdot M_{welle}}{d_{w1}} = \frac{60 \cdot P_{mot}}{n_{welle} \cdot \pi \cdot d_{w1}} = \frac{60 \cdot 11000}{580 \cdot \pi \cdot 109.37 \cdot 10^{-3}} = 3311.8 \text{ N} \tag{10}
$$

Zur Bestimmung der Radialkraft F_{rw} benötigt man den Wirkeingriffswinkel α_{wt}. Dieser berechnet sich aus Nullachsabstand und ausgeführtem Achsabstand zu[1]

$$
\cos(\alpha_{wt}) = \frac{(z_1 + z_2) \cdot m_N}{2 \cdot a_z} \cdot \cos(\alpha_t) \Rightarrow \alpha_{wt} = 21.88^\circ \tag{11}
$$

Damit bestimmt man die Radialkraft

$$
F_{rw} = F_{tw} \cdot \tan(\alpha_{wt}) = 3311.8 \cdot \tan(21.88^\circ) = 1330 \text{ N} \tag{12}
$$

4 Auflagerkräfte

Nachdem alle auf die Getriebewelle wirkenden äußeren Kräfte bestimmt sind, kann man nun die Auflagerkräfte berechnen. Abbildung 2 zeigt die auf die Welle wirkenden Kräfte.

Man setzt jetzt die Gleichgewichtsbedingungen (Kräfte und Momente) für die Getriebewelle an.

$$
\Sigma F_x = 0: \quad A_x = 0 \tag{13a}
$$

$$
\Sigma F_y = 0: \quad -F_2 \cos(\beta) + A_y + B_y - F_{rw} = 0 \tag{13b}
$$

$$
\Sigma F_z = 0: \quad F_1 + F_2 \sin(\beta) + A_z + B_z - F_{tw} = 0 \tag{13c}
$$

$$
\Sigma M_{y,B} = 0: \quad F_{tw} \cdot l_2 - A_z \cdot (l - l_1) - F_1 \cdot l - F_2 \sin(\beta) \cdot l = 0 \tag{14a}
$$

$$
\Sigma M_{z,B} = 0: \quad F_{rw} \cdot l_2 - A_y \cdot (l - l_1) + F_2 \cos(\beta) \cdot l = 0 \tag{14b}
$$

$$
A_y = \frac{F_{rw} \cdot l_2 + F_2 \cos(\beta) \cdot l}{l - l_1} = \frac{566 \cdot \cos(30) \cdot 400 + 1330 \cdot 150}{400 - 100} \tag{15}
$$

$$
A_y = 1318.6 \; N \tag{16}
$$

[1] Für ein geradverzahntes Stirnrad mit Verzahnungsprofil nach DIN 867 gilt: $\alpha_n = \alpha_t = \alpha = 20^\circ$

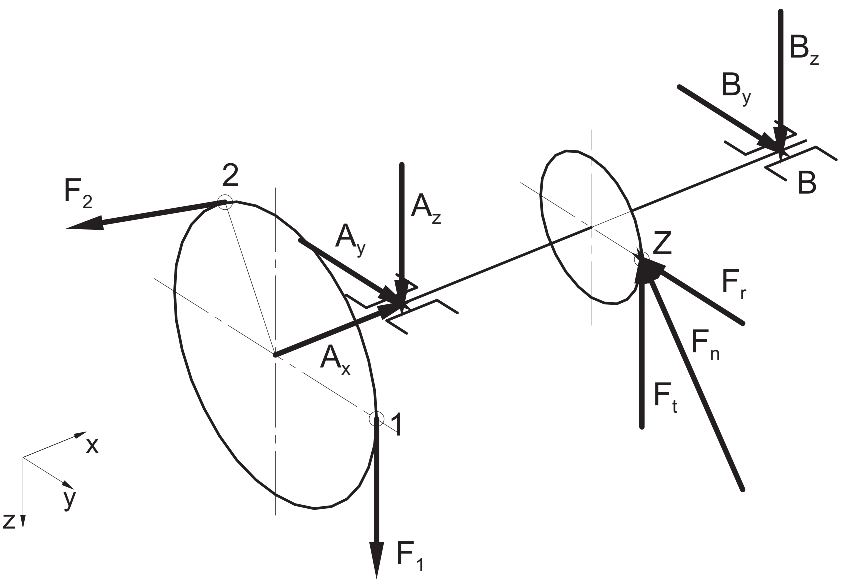

Abbildung 2: Zur Bestimmung der Auflagerkräfte an der Getriebewelle

$$A_z = \frac{F_{tw} \cdot l_2 - F_1 \cdot l - F_2 \sin(\beta) \cdot l}{l - l_1} = \frac{3311.8 \cdot 150 - 1472 \cdot 400 - 566 \sin(30) \cdot 400}{400 - 100} \tag{17}$$

$$A_z = -684.1\ N \tag{18}$$

$$B_y = F_{rw} + F_2 \cos(\beta) - A_y = 1330 + 566 \cos(30) - 1318.6 \tag{19}$$

$$B_y = 501.6\ N \tag{20}$$

$$B_z = F_{tw} - A_z - F_1 - F_2 \sin(\beta) = 3311.8 - (-684.1) - 1472 - 566 \sin(30) \tag{21}$$

$$B_z = 2240.9\ N \tag{22}$$

5 Schnittgrößen

Nach der Bestimmung der Auflagerkräfte kann man die Schnittgrößen an der Kerbe ermitteln. Abbildung 3 zeigt das geschnittene Wellenstück mit den auftretenden Belastungen.

$$\Sigma F_x = 0 : \quad N = 0 \tag{23a}$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad Q_y + B_y - F_{rw} = 0 \tag{23b}$$

$$\Sigma F_z = 0 : \quad Q_z + B_z - F_{tw} = 0 \tag{23c}$$

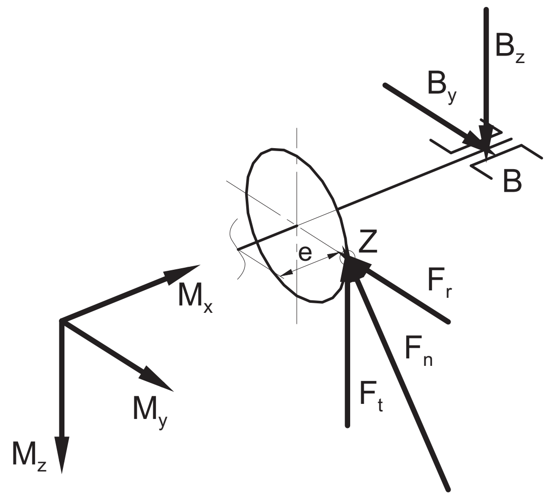

Abbildung 3: Zur Bestimmung der Schnittgrößen

$$N = 0 \tag{24a}$$
$$Q_y = F_{rw} - B_y = 1330 - 501.6 = 828.4\ N \tag{24b}$$
$$Q_z = F_{tw} - B_z = 3311.8 - 2240.9 = 1070.9\ N \tag{24c}$$

$$\Sigma M_x = 0: \qquad M_x - F_{tw} \cdot \frac{d_{w1}}{2} = 0 \tag{25a}$$
$$\Sigma M_y = 0: \qquad M_y - B_z(l_2 + e) + F_{tw} \cdot e = 0 \tag{25b}$$
$$\Sigma M_z = 0: \qquad M_z + B_y(l_2 + e) - F_{rw} \cdot e = 0 \tag{25c}$$

$$M_x = F_{tw} \cdot \frac{d_{w1}}{2} = 3311.8 \cdot \frac{109.37}{2} \cdot 10^{-3} \tag{26a}$$
$$M_x = 181.1\ Nm \tag{26b}$$
$$M_y = B_z \cdot (l_2 + e) - F_{tw} \cdot e = 2240.9 \cdot (150 + 40) \cdot 10^{-3} - 3311.8 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \tag{26c}$$
$$M_y = 293.3\ Nm \tag{26d}$$
$$M_z = F_{rw} \cdot e - B_y \cdot (l_2 + e) = 1330 \cdot 40 \cdot 10^{-3} - 501.6 \cdot (150 + 40) \cdot 10^{-3} \tag{26e}$$
$$M_z = -42.1\ Nm \tag{26f}$$

Die maximal auftretende Biegespannung ergibt sich nach

$$M_b = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{293.3^2 + (-42.1)^2} = 296.3\,\mathrm{Nm} \tag{27}$$

6 Sicherheit gegen Dauerbruch

Mit den im vorigen Punkt berechneten Schnittgrößen können jetzt die auftretenden Spannungen bestimmt werden. Zuerst berechnet man die Widerstandsmomente

$$W_b = \frac{d^3\,\pi}{32} = \frac{35^3\,\pi}{32} = 4209.2\,\mathrm{mm}^3 \tag{28a}$$

$$W_t = \frac{d^3\,\pi}{16} = \frac{35^3\,\pi}{16} = 8418.5\,\mathrm{mm}^3 \tag{28b}$$

Für die Biegespannung (Ausschlagspannung) ergibt sich dann

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{296.3 \cdot 10^3}{4209.2} = 70.4\,\mathrm{N/mm}^2 \tag{29}$$

und die Torsionsspannung (Mittelspannung)

$$\tau_t = \frac{M_x}{W_t} = \frac{181.1 \cdot 10^3}{8418.5} = 21.5\,\mathrm{N/mm}^2 \tag{30}$$

Die Biegebeanspruchung wirkt dabei wechselnd (umlaufende Welle bei raumfester Belastung), die Torsion hingegen ruhend. Daher bestimmt man die Mittel- und Ausschlagsspannung folgendermaßen:

Als erster Schritt werden die Spannungskonzentrationsfaktoren $\alpha_{k,i}$ aus Tafel 3/6 in [Nie81] (wurde bei der Klausur ausgegeben) bestimmt. Dazu benötigt man die beiden Kennzahlen

$$d/D = 35/45 = 0.\dot{7} \approx 0.8 \tag{31a}$$

$$X = \sqrt{d/r} = \sqrt{35/2} = 4.18 \tag{31b}$$

mit denen man dann die Koeffizienten A, B und C bestimmt. Für die Biegung ergibt sich

$$\alpha_{k,b} = A + B\,(X - C) = 0.78 + 0.2885 \cdot 4.18 = 1.99 \tag{32a}$$

$$\alpha_{k,t} = A + B\,(X - C) = 0.95 + 0.1452 \cdot (4.18 - 0.3) = 1.51 \tag{32b}$$

Für die wechselnde Biegung muß noch die Kerbwirkungszahl $\beta_{k,b}$ bestimmt werden. Dazu benötigt man die Werkstoffkonstante $\rho^* = 0.038\,\mathrm{mm}$ (für Stahl mit einer Zugfestigkeit von $Rm = 500\,N/mm^2$, aus Tafel 3/8, ebenfalls [Nie81]) und das bezogene Spannungsgefälle $s_{\sigma,b}$ (siehe Tafel 3/7, wieder aus [Nie81])

$$s_{\sigma,b} = \frac{4}{D+d} + \frac{2}{r} = \frac{4}{45+35} + \frac{2}{2} = 1.05\frac{1}{mm} \tag{33}$$

Nun bestimmt man den dynamischen Stützfaktor

$$v_{0,b} = 1 + \sqrt{\rho^* \, s_{\sigma,b}} = 1 + \sqrt{0.038 \cdot 1.05} = 1.2 \tag{34}$$

und damit folgt

$$\beta_{k,b} = \frac{\alpha_{k,b}}{v_{0,b}} = \frac{1.99}{1.2} = 1.66 \tag{35}$$

Mit diesen Werten kann man nun die Mittel- und Ausschlagsvergleichsspannungen bestimmen. Es ergibt sich

$$\sigma_{v,m} = \sqrt{\sigma_m^2 + 3\,\tau_m^2} = \sqrt{3\,\left(\alpha_{k,t}\,\tau_t\right)^2} = \sqrt{3 \cdot (1.51 \cdot 21.5)^2} = 56.23\,\mathrm{N/mm^2} \tag{36a}$$

$$\sigma_{v,a} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\,\tau_a^2} = \beta_{k,b}\,\sigma_b = 1.66 \cdot 70.4 = 116.9\,\mathrm{N/mm^2} \tag{36b}$$

Nun bestimmt man die für die Mittelspannung $\sigma_{v,m}$ zulässige Ausschlagsspannung $\sigma_{v,a,zul}$ aus dem Smith-Diagramm (siehe z.B. [MMWB94], hier dargestellt in Abbildung 4.

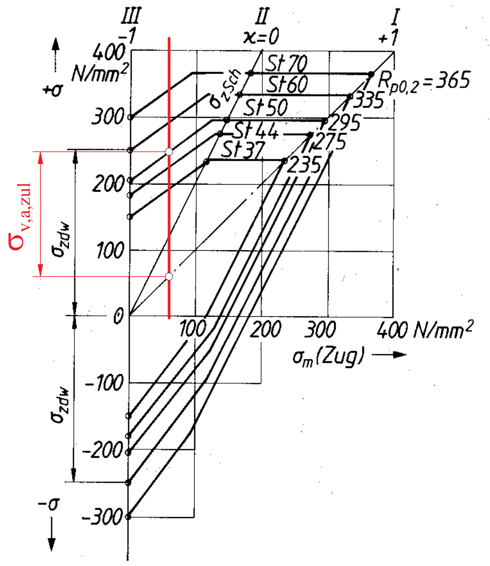

Abbildung 4: Smith-Diagramm für Baustähle (Zug-Druck-Beanspruchung)

Dort liest man für $\sigma_{v,a,zul}$ ca. 190 N/mm^2 ab. Zur Bestimmung der Sicherheit gegen Dauerbruch fehlen nur mehr Oberflächenbeiwert b_S und Größenbeiwert b_0. Für diese Werte gibt es eine Tabelle bzw. ein Diagramm in [Sch99]. Dort liest man für eine geschlichtete Welle aus einem Werkstoff mit einer Bruchfestigkeit von 500 N/mm^2 einen Oberfächenfaktor von $b_S = 0.92$ und für einen Wellendurchmesser von ca. 40 mm einen Größenfaktor $b_0 = 0.88$ ab. Damit berechnet man die Sicherheit gegen Dauerbruch

$$S = \frac{b_S\, b_0\, \sigma_{v,a,zul}}{\sigma_{v,a}} = \frac{0.92 \cdot 0.88 \cdot 190}{116.9} = 1.32 \tag{37}$$

Der Wellenabsatz ist somit dauerfest.

Literatur

[MMWB94] Matek, Wilhelm ; Muhs, Dieter ; Wittel, Herbert ; Becker, Manfred: *Maschinenelemente - Tabellenbuch.* 13. überarbeitete Auflage. Braunschweig : Vieweg, 1994

[Nie81] Niemann, Gustav: *Maschinenelemente*. Bd. 1. 2. Auflage. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 1981. – Konstruktion und Berechnung von Verbindungen, Lagern, Wellen. – ISBN 3-540-06809-0

[Sch99] Scheidl, Rudolf. *Vorlesungsskriptum Maschinenelemente I.* Februar 1999