29. **Erhaltungsgrößen**
Zeigen Sie, im Lagrange-Formalismus, dass aus folgenden Invarianzen die entsprechenden Erhaltungsgrößen folgen:

- Homogenität der Zeit → Energieerhaltung
- Homogenität des Raums → Impulserhaltung
- Isotropie des Raums → Drehimpulserhaltung

Zeigen Sie, dass all diese Erhaltungsgrößen additiv sind, dass also ihr Wert für ein System, dass aus mehreren untereinander nicht wechselwirkenden Teilsystemen besteht, die Summe der Werte der jeweiligen Teilsysteme ist.

30. **Kugel auf Keil**
Eine Kugel der Masse M (konstante Dichte) mit Radius R rollt ohne zu rutschen auf einem Keil mit Öffnungswinkel φ und Masse m hinunter, der reibungsfrei auf einer ebenen Oberfläche gleitet. Auf das gesamte System wirkt die Schwerkraft, zu Beginn befinden sich Kugel und Keil in Ruhe, der Kugelmittelpunkt befindet sich in Höhe H.

- Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten und bestimmen sie die Lagrange-Funktion in diesen.
- Bestimmen sie die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten. Gibt es zyklische Koordinaten?
- Lösen sie die Bewegungsgleichungen.

Hinweis: Die Rotationsenergie einer Kugel die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch ihren Mittelpunkt dreht ist gegeben durch

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \frac{2\,M\,R^2}{5} \omega^2 \ .$$

31. **Kugel**
Bestimmen Sie das Gravitationspotential einer Kugel mit Radius R und homogener Massendichte ρ innerhalb (!) und ausserhalb der Kugel. Fertigen sie eine Skizze des Potentials an. Welche bedingung gilt an der Oberfläche der Kugel, welche Freiheiten haben Sie?

Hinweis: Das Gravitationspotential berechnet sich zu

$$\phi(\boldsymbol{r}) = G \int d^3r'\, \rho(\boldsymbol{r}')\, \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

wobei G die Gravitationskonstante und $\rho(\boldsymbol{r}')$ die Dichte im Punkt $\boldsymbol{r}'$ sind. Überlegen Sie sich zuerst wie die Dichte aussieht!

32. **Teilchen in Potential**
Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential

$$V(x) = A\left(e^{-2\beta x} - 2\,e^{-\beta x}\right) \ .$$

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Teilchen auf.
- Nehmen sie an, das Teilchen bewege sich nur in der Nähe des Potentialminimums (unter welcher Bedingung ist es überhaupt ein Minimum?). Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen um diesen Punkt.
- Betreiben sie backwards engineering und geben Sie die zur linearisierten Bewegungsgleichung gerhörende Lagrange-Funktion an. Vergleichen Sie diese mit der Reihenentwicklung des Potentials bis 2. Ordnung um das Minimum und interpretieren sie das Resultat.
- Skizzieren sie das Phasenraumbild der Bewegung um das Minimum.