33. Die Methode der kleinen Schwingungen führt auf die Gleichung

$$\left(\hat{P} - \omega_j^2 \hat{M}\right) \mathbf{w}^j = 0 \tag{1}$$

für die Normalmoden $\mathbf{w}^j$, wobei $\hat{P}$ und $\hat{M}$ reelle, symmetrische Matrizen sind, $\hat{M}$ ist zudem positiv definit.

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte ω_j^2 reell sind. [*Hinweis*: Gl. (1) mit $(\mathbf{w}^j)^*$ multiplizieren]

(b) Unter welcher Bedingung sind alle Eigenwerte ω_j^2 positiv? Was bedeutet diese Bedingung physikalisch? Was würde passieren, wenn ein ω_j^2 negativ wäre?

(c) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren $\mathbf{w}^j$ reell gewählt werden können [*Hinweis:* Differenz zur konjugiert komplexen Gleichung betrachten]

(d) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren (bei geeigneter Normierung) der Orthonormierungsbedingung

$$\mathbf{w}^j \hat{M} \mathbf{w}^k = \delta^{jk} \tag{2}$$

genügen, und dass daraus die Bedingung

$$\mathbf{w}^j \hat{P} \mathbf{w}^k = \omega_j^2 \delta^{jk} \tag{3}$$

folgt. Die Bedingungen (2) und (3) bedeuten, dass die Matrizen $\hat{P}$ und $\hat{M}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation mit der selben Matrix $\hat{S}$ diagonalisiert werden, die aus den Spaltenvektoren $\mathbf{w}^j$ gebildet wird.

(e) Lösen sie das Eigenwertproblem (1) für die Matrizen

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bilden Sie die Matrix $\hat{S}$ und überprüfen Sie die Bedingungen (2) und (3).

34. Ein ebenes Federpendel besteht aus einer Masse m, die an einem Ende einer Feder mit der Federkonstanten k befestigt ist (sh. Abbildung 1). Die Feder ist am anderen Ende an einem festen Punkt angebracht. Im entspannten Zustand hat die Feder die Länge l.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und berechnen Sie daraus die Bewegungsgleichungen.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen θ_0, r_0.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Winkel θ und kleine Verschiebungen r.

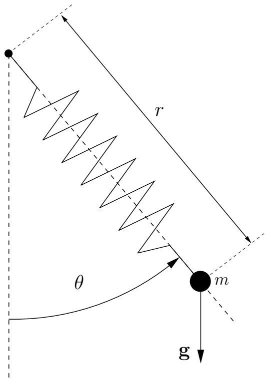
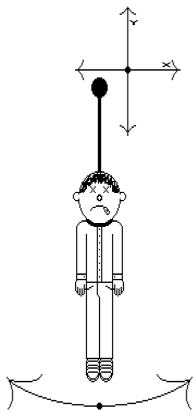


Abbildung 1: Skizze zu Beispiel 27.

35. Lösen Sie folgendes Übungsbeispiel der A&M University Texas:

    In the good ol' days of Texas, an unhappy crowd of graduate students decided after an exam to hang their instructor on the next tree. After the deed was done, and they saw both him and the branch of the tree perform harmonic oscillations, the students realized that the experiment would not have been nesessary if they had studied enough. To show that *you* have studied enough, solve the following problem:

    The branch of the tree can be approximated by a two-dimensional harmonic oscillator which can move horizontally and vertically, but has negligible mass. The rope is considered as rigid and massless, and the instructor is a point (or spherical) mass. Consider only motions in the plane perpendicular to the branch and work out the possible frequencies.

36. Gegeben sei ein lineares Molekül (sh. Abbildung 2), dessen Atome entlang der Molekülachse schwingen können. Der Gleichgewichtsabstand zwischen den Atomen sei a.

    (a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und berechnen Sie die Eigenmoden für kleine Schwingungen um die Ruhelage

    (b) Die Lagrangefunktion ist offensichtlich invariant unter der Transformation

    $$x_1 \to -x_3, \qquad x_2 \to -x_2, \qquad x_3 \to -x_1.$$

    Nachdem das transformierte System identisch zum ursprünglichen System ist, muss es auch die selben Eigenvektoren besitzen. Konstruieren Sie daraus eine Bedingung für die Eigenvektoren, und verwenden Sie diese, um die Dimensionalität des ursprünglichen Problems zu reduzieren.

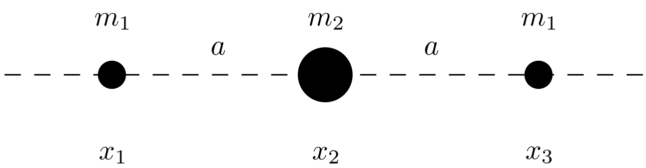


Abbildung 2: Skizze zu Beispiel 36.