45. **Massenpunkt auf Zylinder**
Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes, die auf einen Zylindermantel (Radius R, Achse parallel zur z-Achse durch den Koordinatenursprung) beschränkt ist. Weiters ist die Masse über eine Feder mit dem Koordinatenursprung verbunden.

(a) Bestimmen Sie kinetische und potentielle Energie in Zylinderkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und daraus die kanonischen Impulse. Gibt es zyklische Koordinaten?

(c) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion und daraus die kanonischen Bewegungsgleichungen.

(d) Nutzen Sie die offensichtliche Erhaltungsgröße um das Problem auf ein eindimensionales zurückzuführen.

46. **Poisson-Klammern: Identitäten**
Beweisen Sie für die Poisson-Klammern

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)$$

folgende Identitäten:

(a) Jacobi Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

(b)

$$\{A, BC\} = \{A, B\} C + B \{A, C\}$$

(c)

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$$

47. **Poisson-Klammern: Beispiele**

(a) Bestimmen Sie die Poisson-Klammern aus den kartesischen Komponenten des Impulses $\boldsymbol{p}$ und des Drehimpulses $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ eines Massenpunkten. *Hinweis:* Verwenden Sie die fundamentalen Poisson-Klammern, $\{L_i, p_j\}$.

(b) Bestimmen Sie die Poisson-Klammern, die aus den Komponenten des Drehimpulses (in kartesischen Koordinaten) gebildet werden, $\{L_i, L_j\}$.

(c) Zeigen Sie, dass für eine beliebige skalare Funktion f, die nur von den Koordinaten und Impulsen eines Teilchens abhängt, gilt:

$$\{f, L_z\} = 0$$

48. **Geladenes Sphärisches Pendel**

An einem sphärischen Pendel der Länge l ist ein punktförmiges Teilchen der Masse m und Ladung e befestigt. Es wirkt ein homogenes Gravitationsfeld in z-Richtung und ein konstantes Magnetfeld $\boldsymbol{B} = -B\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.

(b) Benutzen sie die Euler-Lagrange Gleichungen um Bewegungsgleichungen abzuleiten.

(c) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion.

(d) Stellen sie die Hamilton'schen (kanonischen) Gleichungen auf.

Hinweise:

(a) Verwenden Sie Kugelkoordinaten.

(b) Die potentielle Energie setzt sich aus der Gravitationsenergie und der magnetischen Energie zusammen.

(c) Im cgs-System führt die Lorentzkraft auf ein Teilchen mit der Ladung q,

$$F_L = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,\dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}\right) ,$$

zusammen mit den Potentialen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

auf die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\,\dot{\boldsymbol{x}}^2 + \frac{q}{c}\,\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - q\,\phi$$

und den verallgemeinerten Impuls

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\,\mathcal{L} = m\,\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{q}{c}\,\boldsymbol{A} \ .$$

Die Hamiltonfunktion ist also

$$\mathcal{H} = \dot{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{p} - \mathcal{L} = \frac{1}{2\,m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\,\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi \ .$$

(d) Wählen Sie ein Vektorpotential welches auf $\boldsymbol{B} = -B\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ führt. Da B konstant ist, muss $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ verschwinden und weil zusätzlich auch kein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ vorhanden ist muss auch ϕ verschwinden. Setzen Sie $\boldsymbol{A}$ explizit in die Lagrangefunktion ein.

(e) Verwenden sie die Erhaltungsgröße die aus der zyklischen Variable folgt um das Problem (im Lagrange Formalismus) als *eine* Differentialgleichung zweiter Ordnung darzustellen.

(f) Stellen sie die Hamiltonfunktion nach dem bekannten "Rezept"

$$\mathcal{H} = \sum_i \dot{x}_i\,p_i - \mathcal{L} = \dot{\varphi}\,p_\varphi + \dot{\theta}\,p_\theta - \mathcal{L}$$

auf.

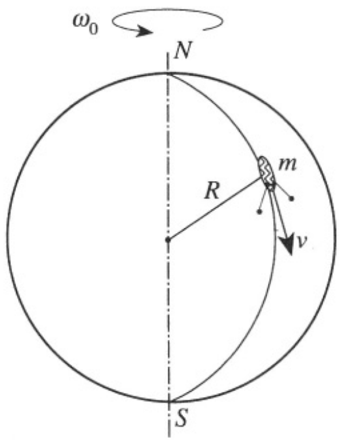

Abbildung 1: Skizze zu Weihnachtsbeispiel I: Käfer auf Globus.

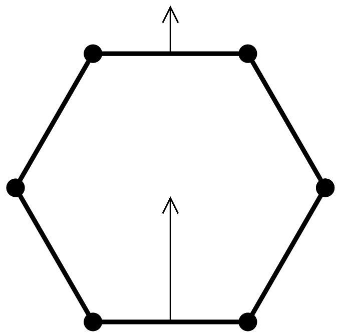

Abbildung 2: Skizze zu Weihnachtsbeispiel II: Sechseck.

W1. **Weihnachtsbeispiel I: Käfer auf Globus**

Ein Globus (Kugelförmig, Masse M, Radius R) rotiert frei und ohne Reibung mit einer initialen Winkelgeschwindigkeit ω_0. Plötzlich fällte ein punktförmiger Käfer der Masse m auf den Nordpol. Der Käfer beginnt mit konstanter Geschwindigkeit v auf direktem Wege zum Südpol zu laufen. Die Rotationsachse des Globus wird konstant gehalten.

Zeigen Sie, dass sich der Globus währen der Reise des Käfers um den Winkel

$$\Delta\varphi = \frac{\pi\,\omega_0\,R}{v}\sqrt{\frac{2\,M}{2\,M+5\,m}}$$

weiter dreht.

Hinweise:

(a) Ist der Käfer nicht an einem Pol, so ändert er das Trägheitsmoment des Globus und damit die Winkelgeschwindigkeit.

(b) Ein hilfreiches Integral ist

$$\int dx\,\frac{1}{a+b\,\cos x} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a^2 > b^2)\ .$$

W2. **Weihnachtsbeispiel II: Sechseck**

Sechs gleichartige (unendlich dünne) Stäbe der Masse m sind an ihren Enden mit reibungsfreien Gelenken so verbunden, dass sie Anfangs ein regelmässiges Sechseck bilden. Sie liegen auf einer reibungsfreien, ebenen Oberfläche. Zur Zeit $t = 0$ wird ein Stab an seiner Mitte senkrecht zur Länge angestoßen, sodass er unmittelbar nach dem Stoß die Geschwindigkeit u hat.

Zeigen Sie, dass der gegenüberliegende Stab sich mit der Geschwindigkeit $v = \frac{u}{10}$ zu bewegen beginnt.

Hinweis: Für beliebige Zeiten ist dieses Problem nur schwer zu lösen, gefragt ist deshalb nur die Geschwindigkeit des gegenüberliegenden Stabs unmittelbar nach dem Stoß.

Die Übungsleiter wünschen ein gesegnetes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch in's neue Jahr!