<u>**4. Übung Theoretische Physik II**</u> Institut für theoretische Physik, JKU Linz
SS 2010 Übungstermin: 16.4.2010

13. **Drehimpuls und Drehungen**
Die z-Komponente des Drehimpulsoperators erzeugt Drehungen um die z-Achse:

$$\psi(\hat{R}_{z,\alpha}^{-1}\,\mathbf{r}) = e^{-\frac{\imath}{\hbar}\alpha\hat{L}_z}\psi(\mathbf{r}) \tag{1}$$

wobei $\hat{R}_{z,\alpha}$ die Rotationsmatrix für Drehungen um die z-Achse (siehe Bsp. 7) um den Winkel α ist. Zeigen Sie diesen Zusammenhang für kleine α durch Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung. Zeigen Sie anschliesend die Identität für beliebige Winkel durch n maliges hintereinander Ausführen der Drehung um α/n.

Hinweis: Für $\alpha \ll 1$ gilt $\hat{R}_{z,\alpha}\,\mathbf{r} = \mathbf{r} + \alpha\mathbf{e_z} \times \mathbf{r}$

14. **Erzeuger- und Vernichteroperatoren**
Die Erzeuger- und Vernichteroperatoren für den harmonischen Oszillator sind wie folgt definiert:

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{\imath}{\sqrt{2\hbar\omega m}}\hat{p} \tag{2}$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{\imath}{\sqrt{2\hbar\omega m}}\hat{p} \tag{3}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt: $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$

(a) Drücken Sie den Hamiltonoperator durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus.
(b) Sei $|n\rangle$ ein Eigenzustand des Hamiltonoperators zur Energie $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Bestimmen Sie die Wirkung von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ auf $|n\rangle$.
(c) Bestimmen Sie die Normierungskonstanten α und β der Vektoren $\hat{a}\,|n\rangle = \alpha\,|n-1\rangle$ und $\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \beta\,|n+1\rangle$

15. **Harmonischer Oszillator in 3D**
Gegeben sei ein 3-dimensionaler isotroper harmonischer Oszillator. Der Hilbertraum ist der Produktraum der zu den eindimensionalen Oszillatoren gehörenden Hilberträume. Der Hamiltonoperator lässt sich schreiben als

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3}\hat{H}_i \qquad \text{mit} \qquad \hat{H}_i = \frac{1}{2m}(\hat{p}_i^2 + m^2\omega^2\hat{x}_i^2) \tag{4}$$

Die x_i beschreiben die Auslenkung in Richtung $\mathbf{e_i}$. Drücken Sie H durch die Erzeuger- und Vernichteroperatoren $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ aus. Geben Sie das Energiespektrum und die Entartung der für eine bestimmte Energieniveaus an.

16. **Harmonischer Oszillator in Impulsdarstellung**
Zeigen Sie, dass die Eigenwertgleichung des linearen harmonischen Operators für die Wellenfunktion $\phi(k)$, mit $k = p/\hbar$, in Impulsdarstellung die Form

$$\frac{d^2\phi(k)}{dk^2} - \frac{k^2}{\alpha^2}\phi(k) + \frac{2E}{m\omega^2}\phi(k) = 0 \tag{5}$$

annimmt. Geben Sie α an. Geben Sie die Rekursionsbedingung für den Potenzreihenansatz

$$\phi(k) = e^{-u^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}a_m u^m \tag{6}$$

mit $u = k/\sqrt{\alpha}$ an. Warum muss die Potenzreihe abbrechen?